研究生教育创新工程教材

# Mechanical Vibration

# 机械振动学

于德介　程军圣　杨　宇◎编著

湖南大学出版社
Hunan University Press

研究生教育创新工程教材

# Mechanical Vibration

# 机械振动学

于德介　程军圣　杨　宇◎编著

湖南大学出版社
Hunan University Press

## 内容简介

本书系统地阐述了线性振动的基本理论，介绍了有关的基本概念、原理和分析方法，并给出了许多工程技术实例。

全书共11章，包括七大部分：单自由度系统振动、两自由度系统振动、多自由度系统振动、多自由度系统模态分析、多自由度系统振动分析的近似方法与数值方法、弹性体振动、随机振动、模态测试技术基础。

本书为力学、机械专业本科生专业课和研究生课程用教材或参考书，也可供有关工程技术人员和研究人员自学或参考。


**图书在版编目(CIP)数据**

机械振动学/于德介，程军圣，杨宇主编. 一长沙：湖南大学出版社，2010.7

研究生教育创新工程教材

**ISBN 978-7-81113-847-4**

Ⅰ.①机… Ⅱ.①于…②程…③杨… Ⅲ.①机械振动—研究生—教材

Ⅳ.①TH113.1

中国版本图书馆CIP数据核字(2010)第125953号

**机械振动学**

Jixie Zhendongxue

**编　　著**：于德介　程军圣　杨　宇

**责任编辑**：陈　别

**出版发行**：湖南大学出版社　　**责任印制**：张　毅

**社　　址**：湖南·长沙·岳麓山　　**邮　　编**：410082

**电　　话**：0731-88822559(发行部)，88820008(编辑室)，88821006(出版部)

**传　　真**：0731-88649312(发行部)，88822264(总编室)

**电子邮箱**：abiel3755020141@126.com

**网　　址**：http://press.hnu.cn

**印　　装**：长沙国防科大印刷厂

**开本**：787×1092　16开　　**印张**：17.5　　**字数**：405千

**版次**：2010年7月第1版　　**印次**：2010年7月第1次印刷

**书号**：ISBN 978-7-81113-847-4/TH·41

**定价**：35.00元

# 前　言

机械振动是工程技术和日常生活中常见的物理现象，是设计和研制机械设备时必须解决的重要工程问题。振动具有有害的一面，如产生振动噪音、缩短机器的使用寿命等。但是振动也具有有利的一面，如利用振动原理工作的振动筛、夯实机等。随着科学技术的发展，现代工业对各种机械设备提出了低振动、低噪声、高抗振能力的要求，因此为了更好地利用或者控制振动，必须对振动现象进行研究。

本书在参考相关教材的基础上，结合作者多年来的教学实践，介绍了机械振动的基本概念、原理和分析方法，深入阐明了各种振动现象的基本原理和分析方法，给出了许多工程技术实例。编写中，着重注意培养读者分析和解决振动问题的基本能力。

全书共分 11 章，包括三部分内容。第一部分包括第一章至第七章，分别介绍了单自由度系统、两自由度系统、多自由度系统的基本概念和分析方法以及近似和数值分析方法；第二部分包括第八章和第九章，介绍了弹性体的基本概念和分析方法；第三部分包括第十章和第十一章，分别介绍了随机振动的基础知识和模态测试技术基础。

阅读本书需要掌握高等数学、工程数学、理论力学与材料力学知识。本书可以作为力学、机械专业本科生专业课和研究生课程用教材或参考书，也可以作为有关科技人员的参考书。

作　者

# 目　次

**第一章　绪　论**

§1.1　引言 …… (1)
§1.2　振动的分类 …… (1)
§1.3　简谐振动及其表示方法 …… (2)
§1.3.1　简谐振动及其特征 …… (2)
§1.3.2　简谐振动的表示方法 …… (3)
§1.4　振动的合成 …… (4)
§1.4.1　振动方向相同的简谐振动的合成 …… (4)
§1.4.2　振动方向相互垂直的简谐振动的合成 …… (5)
§1.5　谐波分析 …… (5)

**第二章　单自由度系统的自由振动**

§2.1　引言 …… (7)
§2.2　无阻尼自由振动 …… (7)
§2.3　固有频率的计算方法 …… (12)
§2.3.1　静变形法 …… (12)
§2.3.2　能量法 …… (12)
§2.3.3　瑞利法 …… (14)
§2.4　粘滞阻尼系统的自由振动 …… (17)

**第三章　单自由度系统的强迫振动**

§3.1　引言 …… (25)
§3.2　简谐激振力引起的强迫振动 …… (25)
§3.3　隔振原理 …… (36)
§3.4　惯性式测振仪原理 …… (38)
§3.5　周期激振力引起的强迫振动 …… (40)
§3.6　单自由度系统的频响函数 …… (42)
§3.7　任意激振力引起的强迫振动 …… (48)

**第四章　两自由度系统的振动**

§4.1　引言 …… (50)

§4.2 两自由度系统的自由振动 …… (50)
§4.3 拍的现象 …… (55)
§4.4 两自由度系统的强迫振动 …… (58)
§4.5 动力吸振器 …… (61)

**第五章 多自由度系统的振动**

§5.1 多自由度系统振动微分方程的建立 …… (67)
§5.1.1 拉格朗日方程法 …… (67)
§5.1.2 柔度影响系数法 …… (71)
§5.2 固有频率和主振型 …… (73)
§5.3 主振型的正交性 …… (77)
§5.4 主振型正交的物理意义 …… (78)
§5.5 主振型的归一化 …… (79)
§5.6 固有频率相等的情况 …… (79)
§5.7 固有频率为零的情况 …… (80)
§5.8 多自由度振动系统的若干基本方程 …… (82)
§5.9 无阻尼系统对初始条件的响应 …… (83)
§5.10 无阻尼系统在外力作用下的振动响应…… (85)
§5.11 参数变化对系统固有频率与振型的影响…… (87)
§5.12 约束对系统固有频率的影响…… (89)

**第六章 多自由度振动系统模态分析**

§6.1 粘滞阻尼系统实模态分析 …… (93)
§6.1.1 粘滞阻尼矩阵的解耦条件 …… (93)
§6.1.2 实模态系统的振动响应 …… (94)
§6.2 粘滞阻尼系统复模态分析的状态空间法 …… (97)
§6.2.1 复频率与复振型 …… (97)
§6.2.2 复振型的正交性 …… (98)
§6.2.3 一般粘滞阻尼系统的自由振动响应 …… (100)
§6.2.4 一般粘滞阻尼系统的强迫振动响应 …… (101)
§6.3 粘滞阻尼系统复模态分析的拉普拉斯变换法 …… (102)
§6.3.1 复频率与复振型 …… (102)
§6.3.2 复振型的正交性 …… (103)
§6.3.3 传递函数的有理分式表达 …… (103)
§6.3.4 留数和复振型的关系 …… (104)
§6.3.5 复频率与留数的物理意义 …… (105)
§6.4 实模态理论与复模态理论的关系 …… (105)
§6.4.1 实模态系统的复频率与复振型 …… (106)

§6.4.2 实模态参数与复模态参数 …………………………………… (106)
§6.4.3 实模态理论与复模态理论的传递函数 ……………………… (107)

**第七章 多自由度系统振动分析的近似方法与数值方法**
§7.1 多自由度系统特征值问题的近似解法 ………………………………… (111)
§7.1.1 瑞利法 ……………………………………………………………… (111)
§7.1.2 邓可莱法(迹法) ………………………………………………… (115)
§7.1.3 里兹法 ……………………………………………………………… (116)
§7.1.4 矩阵迭代法 ………………………………………………………… (119)
§7.1.5 子空间迭代法 ……………………………………………………… (123)
§7.2 多自由度系统振动响应分析的直接积分法 ………………………… (125)
§7.2.1 中心差分法 ………………………………………………………… (125)
§7.2.2 Houbolt 法 ………………………………………………………… (126)
§7.2.3 Newmark 法………………………………………………………… (128)
§7.2.4 Wilson－$\theta$ 法 ……………………………………………………… (129)

**第八章 弹性体振动**
§8.1 弦的横向振动 ………………………………………………………… (132)
§8.2 杆的纵向振动 ………………………………………………………… (136)
§8.3 杆的纵向强迫振动 …………………………………………………… (141)
§8.4 圆轴的扭转振动 ……………………………………………………… (144)
§8.5 梁的弯曲振动 ………………………………………………………… (146)
§8.6 梁弯曲振动的固有频率与振型函数 ………………………………… (149)
§8.7 梁弯曲振动振型函数的正交性 ……………………………………… (154)
§8.8 梁的横向强迫振动 …………………………………………………… (156)
§8.9 轴向力、转动惯量和剪切变形对梁振动的影响……………………… (161)

**第九章 弹性体振动的近似解法**
§9.1 集中质量法 …………………………………………………………… (166)
§9.2 传递矩阵法 …………………………………………………………… (167)
§9.2.1 轴的扭转振动 ……………………………………………………… (168)
§9.2.2 梁的弯曲振动 ……………………………………………………… (173)
§9.3 瑞利-里兹法…………………………………………………………… (176)
§9.4 假设振型法 …………………………………………………………… (183)
§9.5 有限元法 ……………………………………………………………… (187)
§9.5.1 梁的弯曲振动 ……………………………………………………… (187)
§9.5.2 杆的纵向振动 ……………………………………………………… (190)

**第十章　随机振动**

§10.1　引言…………………………………………………………………………（194）
§10.2　随机过程及各态历经过程…………………………………………………（194）
§10.3　正态随机过程………………………………………………………………（196）
§10.4　相关函数……………………………………………………………………（198）
§10.5　功率谱密度函数……………………………………………………………（201）
§10.6　振动系统在单一随机激励下的响应………………………………………（205）
§10.7　振动系统在多个随机激励下的响应………………………………………（210）

**第十一章　模态测试技术基础**

§11.1　引言…………………………………………………………………………（215）
§11.2　频响函数测试系统…………………………………………………………（216）
§11.3　数字信号处理………………………………………………………………（218）
§11.3.1　离散傅立叶变换（DFT）及其快速算法（FFT）………………………（218）
§11.3.2　频混、泄漏与栅栏效应 ………………………………………………（218）
§11.3.3　细化……………………………………………………………………（220）
§11.4　激振技术……………………………………………………………………（222）
§11.4.1　激振信号………………………………………………………………（222）
§11.4.2　激振器…………………………………………………………………（223）
§11.5　模态参数识别的频域方法…………………………………………………（223）
§11.5.1　导纳圆拟合法…………………………………………………………（225）
§11.5.2　最小二乘迭代法………………………………………………………（227）
§11.6　模态参数识别的时域方法…………………………………………………（231）
§11.6.1　随机减量法……………………………………………………………（232）
§11.6.2　ITD（The Ibrahim Time Domain Technique）法 ……………………（234）
§11.6.3　STD 法 …………………………………………………………………（238）

**习　题**…………………………………………………………………………（240）
**附录 A　傅立叶变换及其主要性质**……………………………………………（265）
**附录 B　Laplace 变换及其主要性质** …………………………………………（267）
**参考文献**………………………………………………………………………（268）

# 第一章 绪 论

## §1.1 引 言

机械或结构系统在其平衡位置附近的往复运动称为振动。而振动是一个复杂的物理过程。要解析这个过程，就必须建立振动理论并且利用这些理论来解决工程实际问题。机械振动可视为一种特殊形式的机械运动。19 世纪后期，人们在制造动力机械等工程实际中遇到大量灾害性振动问题及由此产生的噪声、疲劳问题，从而使得关于工程振动问题的研究成为热点，并因此发展了近似分析方法和实验方法。20 世纪 20 年代起，机械振动已成为机械工程师必须了解和掌握的知识。近年来随着电子计算机的飞速发展和应用，使得人们解决复杂振动问题和进行大量运算成为可能。这也推动了机械振动理论的发展。

## §1.2 振动的分类

根据振动的不同特征，可以把振动分为不同的类型：

(1)按照振动有无周期性，可以分为周期振动和非周期振动两大类。

① 周期振动：振动系统的某些物理量在相等的时间间隔内做往复运动。往复一次所需的时间称为“周期”。

② 非周期振动：振动系统的物理量的变化没有固定的时间间隔，即没有一定的周期，又称瞬态振动。

(2)按照振动的输入特性，可以把振动分为自由振动、受迫振动和自激振动三大类。

① 自由振动：系统受到初始激振作用后，仅靠其本身的弹性恢复力自由地振动。其振动特性仅由系统本身的物理特性决定。

② 受迫振动：系统受到外界持续的激振作用而“被迫地”进行振动，又称强迫振动。其振动特性不仅与系统本身的物理特性有关，还与激振的特性有关。

③ 自激振动：某些系统在输入和输出之间具有反馈特性，并有能源补充，从而可以引起振动。

(3)按照振动的输出特性，可以把振动分为简谐振动、非简谐振动和随机振动三大类。

① 简谐振动：可以用简单的正弦函数或余弦函数表示其运动规律的振动。简谐振动是一种周期振动。

② 非简谐振动：无法直接用简单的正弦函数或余弦函数表示其运动规律的振动。非

简谐振动也可能是周期振动。

③ 随机振动：无法用简单函数或简单函数的组合表示其运动规律，而只能用统计的方法来研究其振动规律的非周期性振动。

(4)按照振动系统结构参数的特性，可以分为线性振动和非线性振动两大类。

① 线性振动：振动系统的惯性力、阻尼力、弹性恢复力分别与加速度、速度、位移成线性关系，能够用常系数线性微分方程表述的振动。

② 非线性振动：振动系统的阻尼力或弹性恢复力具有非线性性质，只能用非线性微分方程表述的振动。

(5)按照振动系统的自由度数目，可以分为单自由度系统振动和多自由度系统振动两大类。

① 单自由度系统的振动：只需要一个独立坐标就能够确定系统在振动过程中任何瞬时的几何位置的振动。

② 多自由度系统的振动：需要多个独立坐标才能够确定系统在振动过程中任何瞬时的几何位置的振动。

③ 弹性体振动：需要无限多个独立坐标(位移函数)才能确定系统在振动过程中任何瞬时的几何位置的振动，又称无限自由度系统的振动。

(6)按照振动位移的特征，可以分为横向振动、纵向振动、扭转振动和摆振动四大类。

① 横向振动：振动体上的质点在垂直于轴线的方向产生位移的振动。

② 纵向振动：振动体上的质点沿轴线方向产生位移的振动。横向振动和纵向振动统称为直线振动。

③ 扭转振动：振动体上的质点绕轴线方向产生位移(角位移)的振动。扭转振动又称为角振动。

④ 摆振动：振动体上的质点在平衡位置附近做弧线运动。

# §1.3 简谐振动及其表示方法

## §1.3.1 简谐振动及其特征

当机械系统的某个物理量随时间按正弦或余弦规律变化时，其振动称为简谐振动，一般表示式为：

$$x = A\sin(\omega_n t + \varphi) \tag{1.1}$$

式中，$A$、$\omega_n$ 和 $\varphi$ 分别为振幅、角频率(或圆频率)和初相位。

一次振动循环所需的时间 $T$ 称为周期，单位时间内振动循环的次数 $f$ 称为频率，周期 $T$、频率 $f$ 和角频率 $\omega_n$ 的单位分别为 s(秒)、Hz(赫兹)和 rad/s(弧度/秒)，三者之间的关系如下：

$$T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega_n} \tag{1.2}$$

对简谐振动的位移表达式(1.1)分别求一阶和二阶导数，可得到简谐振动的速度和加

速度表达式：

$$\dot{x} = A\omega_n\cos(\omega_n t + \varphi) = A\omega_n\sin\left(\omega_n t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right) \tag{1.3}$$

$$\ddot{x} = -A\omega_n^2\cos(\omega_n t + \varphi) = A\omega_n^2\sin(\omega_n t + \varphi + \pi) \tag{1.4}$$

由以上分析可知，简谐振动具有以下特征：

① 简谐振动是一种周期运动，即满足

$$x(t + T) = x(t) \tag{1.5}$$

② 简谐振动的速度和加速度也是简谐函数，且具有和位移函数相同的频率。

③ 速度和加速度的幅值分别是位移幅值的 $\omega_n$ 倍和 $\omega_n^2$ 倍。

④ 速度的相位超前位移$\frac{\pi}{2}$，加速度的相位超前位移 $\pi$。

## §1.3.2 简谐振动的表示方法

简谐振动可以用矢量或复数来表示。

(1)简谐振动的矢量表示法

如图 1.1 所示，一模为 $A$ 的矢量 **OP** 以角速度 $\omega$ 逆时针旋转，则 **OP** 称为旋转矢量。

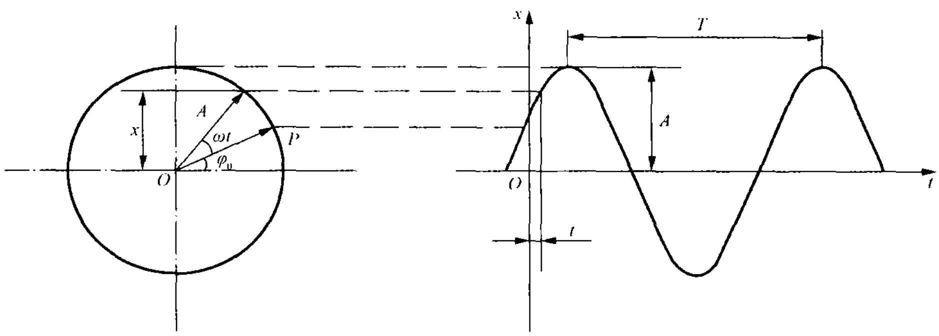


**图 1.1**

旋转矢量起始位置与水平轴的夹角为 $\varphi_0$，在任一瞬时，旋转矢量与水平轴的夹角为 $\omega t + \varphi_0$，则旋转矢量在垂直轴上的投影为

$$x = A\sin(\omega t + \varphi_0) \tag{1.6}$$

在水平轴上的投影为

$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0) \tag{1.7}$$

显然，旋转矢量在坐标轴上的投影均可以表示一简谐振动，这也说明任一简谐振动都可以用一个旋转矢量的投影来表示。这个旋转矢量的模 $A$ 就是简谐振动的振幅，它的角速度 $\omega$ 就是简谐振动的角频率，它与水平轴的夹角 $\omega t + \varphi_0$ 就是简谐振动的相位角。

(2)简谐振动的复数表示法

一个复数 $z$ 可以代表该复平面上的一个矢量，称为复矢量。这个矢量的模就是复数 $z$ 的模 $A$，它的位置由复角 $\theta$ 确定，该矢量在实数轴和虚数轴上的投影分别为 $A\cos\theta$ 和

$A\sin\theta$,若用 i 表示虚轴上的单位长度,则矢量 **OP** 就代表了下列复数:

$$z = A(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta) = A\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \tag{1.8}$$

若使矢量 **OP** 绕 $O$ 点以等角速度 $\omega$ 在复平面内逆时针旋转,就成为一个复数旋转矢量。它在任一瞬时的复角 $\theta=\omega t$,因此该旋转矢量的复数表达式为:

$$z = A(\cos\omega t + \mathrm{i}\sin\omega t) = A\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} \tag{1.9}$$

如前所述,任一简谐振动均可以用一个旋转矢量在直角坐标轴上的投影来表示。所以,同样可以用一个复数旋转矢量在复平面的实轴或虚轴上的投影来表示一个简谐振动。本书中为了统一,均采用复数旋转矢量在虚轴上的投影来表示一个简谐振动:

$$x = A\sin\omega t = \mathrm{Im}z = \mathrm{Im}[A\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}] \tag{1.10}$$

式中,符号 $\mathrm{Im}z$ 表示取复数的虚数部分。

简谐振动的速度和加速度同样可以用复数旋转矢量来表示:

$$\dot{x} = A\omega\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\omega t+\frac{\pi}{2}\right)} \tag{1.11}$$

$$\ddot{x} = A\omega^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t-\pi)} \tag{1.12}$$

## §1.4 振动的合成

### §1.4.1 振动方向相同的简谐振动的合成

(1)两个同频率简谐振动的合成

若有两个同频率的简谐振动

$$x_1 = A_1\sin(\omega t + \varphi_1),\ x_2 = A_2\sin(\omega t + \varphi_2)$$

则它们的合成运动为同频率的简谐振动

$$x = A\sin(\omega t + \varphi)$$

式中,$A=\sqrt{(A_1\cos\varphi_1+A_2\cos\varphi_2)^2+(A_1\sin\varphi_1+A_2\sin\varphi_2)^2}$

$$\tan\varphi=\frac{A_1\sin\varphi_1+A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1+A_2\cos\varphi_2}$$

(2)两个不同频率简谐振动的合成

若有两个不同频率的简谐振动

$$x_1 = A_1\sin\omega_1 t,\ x_2 = A_2\sin\omega_2 t$$

① 如果 $\omega_1 \ll \omega_2$,则它们的合成运动为

$$x = x_1 + x_2 = A_1\sin\omega_1 t + A_2\sin\omega_2 t$$

如图 1.2 所示,合成运动的性质就如同高频振动的轴线被低频振动所调制。

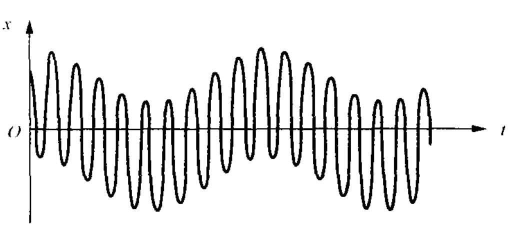


图 1.2

② 如果 $\omega_1 \simeq \omega_2$,且 $A_1=A_2=A$,则有

$$x= x_1 + x_2 = A_1\sin\omega_1 t + A_2\sin\omega_2 t = 2A\cos\left(\frac{\omega_2-\omega_1}{2}\right)t\sin\left(\frac{\omega_2+\omega_1}{2}\right)t$$

令 $\omega=\frac{\omega_2+\omega_1}{2}$，$\Delta\omega=\omega_2-\omega_1$，则上式可以表示为 $x=2A\cos\frac{\Delta\omega}{2}t\sin\omega t$，即此时合成运动的振幅以 $2A\cos\frac{\Delta\omega}{2}t$ 变化，亦即出现了“拍”的现象，拍频为 $\Delta\omega$。

③ 如果 $\omega_1\simeq\omega_2$，且 $A_1\ll A_2$

$$x=x_1+x_2=A_1\sin\omega_1 t+A_2\sin(\omega_1+\Delta\omega)t\simeq A\sin\omega_1 t$$

式中，
$$A=A_1\sqrt{1+\left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2+\frac{2A_2}{A_1}\cos\Delta\omega t}\simeq A_1\left(1+\frac{A_2}{A_1}\cos\Delta\omega t\right)$$

即

$$x=A_1\left(1+\frac{A_2}{A_1}\cos\Delta\omega t\right)\sin\omega_1 t=A_1(1+m\cos\Delta\omega t)\sin\omega_1 t$$

显然，此时出现了幅值调制，其中 $m$ 为调幅系数，载波频率为 $\omega_1$，调制频率为 $\omega_2-\omega_1$。

### §1.4.2 振动方向相互垂直的简谐振动的合成

(1)两个同频率简谐振动的合成

设沿 $x$ 方向和 $y$ 方向的简谐运动分别为 $x=A\sin\omega t$ 和 $x=B\sin(\omega t+\varphi)$，则合成运动将位于边长分别为 $2A$ 和 $2B$ 的矩形中。

其轨迹可用椭圆方程描述：

$$\frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{B^2}-\frac{2xy}{AB}\cos\varphi-\sin^2\varphi=0 \tag{1.13}$$

(2)两个不同频率简谐振动的合成

设沿 $x$ 方向和 $y$ 方向的简谐运动分别为 $x=A\sin\omega_1 t$ 和 $x=B\sin(\omega_2 t+\varphi)$，其合成运动也能在矩形中画出各种曲线，但运动轨迹较为复杂。当频率之间存在一定的比例关系时，合成后的运动轨迹呈现出有规律的图形，这些图形被称为 Lissajous(李沙育)图。

## §1.5 谐波分析

简谐振动是一种最简单的周期振动，但工程实际中出现得更多的却是非简谐的周期振动。而一般的周期振动可以通过谐波分析分解成简谐振动。把一个周期函数展开成一个傅立叶三角级数，亦即展开成一系列简谐函数之和，称为谐波分析。

设一个周期振动函数为 $x(t)$，它的周期为 $T$，则有

$$x(t)=x(t+kT) \tag{1.14}$$

式中，$k$ 为整数，并令 $\omega_1=\frac{2\pi}{T}$，则该函数可以展开成：

$$x(t)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\omega_1 t+b_n\sin n\omega_1 t)\quad(n=1,2,\cdots) \tag{1.15}$$

式中，$a_0=\frac{1}{T}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}x\mathrm{d}t$，$a_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}x\cos n\omega_1 t\mathrm{d}t$，$b_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}x\sin n\omega_1 t\mathrm{d}t$

由于两个频率相同的简谐振动可以合成为一个简谐振动，因此上式又可以写成：

$$x(t)=c_0+\sum_{n=1}^{\infty}c_n\sin(n\omega_1 t+\varphi_n)\quad(n=1,2,\cdots)\tag{1.16}$$

式中，$c_0=a_0$，$c_n=\sqrt{a_n^2+b_n^2}$，$\varphi_n=\arctan\dfrac{b_n}{a_n}$。

由此可见，一个周期振动过程可以看成频率依次为基频 $\omega_1$ 及其整数倍的若干或无数简谐振动分量的合成振动过程。这些简谐分量分别称为基频分量、二倍频分量、三倍频分量等。$c_0$ 是 $x(t)$ 的均值或直流分量，$c_n$ 和 $\varphi_n$ 分别是 $n$ 倍频分量的幅值和初相位。基频分量有时又称为基波，$n$ 倍频分量则称为 $n$ 次谐波。

# 第二章 单自由度系统的自由振动

## §2.1 引 言

一个振动系统的自由度是指在振动过程中任何瞬时都可以完全确定系统在空间的几何位置所需要的独立坐标的数目。一个振动系统究竟有多少个自由度是一个复杂的问题。这不仅取决于系统本身的结构特征，还取决于所研究的振动问题的性质、要求的精确度以及振动的实际情况等。本章将讨论单自由度线性系统的自由振动，即振系在受到初始扰动后的振动。其思路是应用牛顿运动定律，列出确定这种振动规律的微分方程，说明其求解方法，得出位移与速度的表达式以及频率与周期的公式。对理想的无阻尼振系，还应用了能量守恒原理，列出微分方程，或者不通过微分方程而直接导出频率与周期的公式。

## §2.2 无阻尼自由振动

无阻尼振系的自由振动是简谐运动。振动一经开始后，就可以无限期地进行，振幅大小不变。如图 2.1 所示的质量弹簧系统，质量 $m$ 作为一个质点在空间有三个自由度。但如果它只在垂直方向做上下振动，则在振动过程中任何瞬时，系统的几何位置就只需要用一个独立坐标就可以完全确定，从而成为单自由度系统。

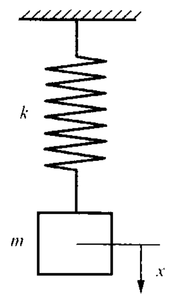


**图 2.1**

现在讨论图 2.2(a)所示的单自由度弹簧质量系统。质量块的质量为 $m$，单位为 kg。它所受的重力为 $W$。弹簧刚度为 $k$，其定义为弹簧每伸长或缩短一个单位长度所需施加的力，常用单位为 $kg \cdot s^2/m$。

当质量块没有加到弹簧上时，弹簧处于自由状态，不受压缩，它的位置如图 2.2(a)中虚线所示。当质量块联结到弹簧上而没有振动时，系统处于静平衡状态，弹簧受重力 $W$ 的作用而产生压缩变形 $\lambda_s$，称为系统的静变形。此时质量块的外力情况如图 2.2(b)所示。由静平衡条件有

$$k\lambda_s = W \tag{2.1}$$

当这个系统受到外界某种初始干扰，则系统的静平衡状态遭到破坏，弹簧力将不再与重力平衡，而产生不平衡的弹性恢复力，系统就依靠这种弹性恢复力维持自由振动。

现在考虑系统在垂直方向的振动。首先建立坐标，为了简便，将坐标原点放在平衡位

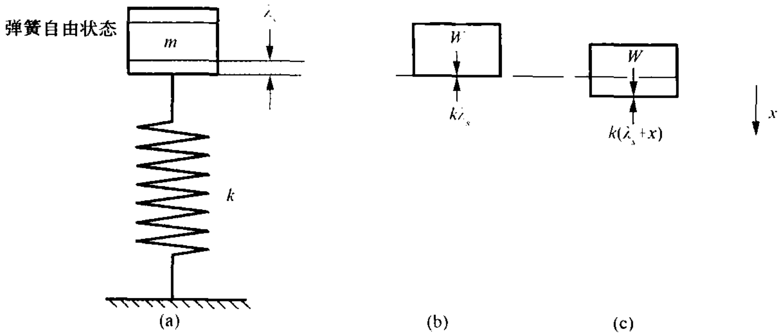


图 2.2

置，以 $x$ 表示质量块由静平衡位置算起的垂直位移，向下为正。分析质量块在振动过程中任一瞬时位置的受力情况，如图 2.2(c)。此时质量块重力 $W$ 不变，而弹簧力已增加到 $k(\lambda_s+x)$。这两个力不再平衡，使质量块产生加速度运动。根据牛顿第二定律：作用于一个质点上所有力的合力等于该质点的质量和沿合力的加速度的乘积。取所有与 $x$ 方向一致的力、速度和加速度为正，便得到运动微分方程式

$$\sum F = W - k(\lambda_s + x) = m\ddot{x} \tag{2.2}$$

由式(2.1)，$k\lambda_s=W$，上式可简化为

$$m\ddot{x} = -kx$$

或

$$m\ddot{x} + kx = 0 \tag{2.3}$$

这就是单自由度系统自由振动的微分方程式。由式(2.3)可知，质量块的重力只对弹簧的静变形 $\lambda_s$ 有影响，即只改变了质量块的静平衡位置，而不影响质量块在静平衡位置附近做振动的规律。所以当取静平衡位置为坐标原点建立运动微分方程时，在方程式中就可以不出现重力的项。

式(2.3)中 $-kx$ 称为弹性恢复力。它的大小和位移 $x$ 的大小成正比。但它的方向却始终和位移的方向相反，即始终指向静平衡位置。这正是第一章讨论过的简谐振动的一个特点。

下面解微分式(2.3)。引进符号 $\omega_n$

$$\omega_n^2 = \frac{k}{m} \tag{2.4}$$

式(2.3)可改写为

$$\ddot{x} + \omega_n^2 x = 0 \tag{2.5}$$

显然，$x=e^{st}$ 是式(2.5)的一个解。代入式(2.5)，可得

$$(s^2 + \omega_n^2)e^{st} = 0$$

得特征方程

$$s^2 + \omega_n^2 = 0$$

解出

$$s = \pm i\omega_n$$

因此，式(2.5)的通解为

$$x = c_1 e^{i\omega_n t} + c_2 e^{-i\omega_n t}$$

由欧拉公式 $e^{i\omega_n t} = \cos\omega_n t + i\sin\omega_n t$，上式可化为

$$x = b_1 \cos\omega_n t + b_2 \sin\omega_n t \tag{2.6}$$

式中，$b_1 = c_1 + c_2$，$b_2 = i(c_1 - c_2)$。

它们是两个待定常数，由振动的初始条件决定。从式(2.6)可以看到，一个弹簧质量系统的自由振动包含两个频率相同的简谐振动，一个正比于 $\cos\omega_n t$，另一个正比于 $\sin\omega_n t$。第一章已经证明，这样的两个同频率的简谐振动，合成后仍然是一个简谐振动。可用下式表达

$$x = A\sin(\omega_n t + \varphi) \tag{2.7}$$

式中，$A = \sqrt{b_1^2 + b_2^2}$，$\varphi = \arctan\dfrac{b_1}{b_2}$。

当然，式(2.6)也可以用余弦函数来表达

$$x = A\cos(\omega_n t - \varphi')$$

此处 $\varphi' = \arctan\dfrac{b_2}{b_1}$，$\varphi'$ 与 $\varphi$ 角互为余角。可见一个单自由度系统的自由振动是简谐振动。

简谐振动的圆频率为 $\omega_n$，称为固有圆频率。由式(2.4)可得

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{2.8}$$

固有频率为

$$f = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \tag{2.9}$$

周期为

$$T = \frac{1}{f} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \tag{2.10}$$

自由振动的固有频率和周期仅决定于系统本身的物理性质：质量 $m$ 和弹簧刚度 $k$，与由初始条件决定的振幅无关。这种线性系统自由振动所具有的性质称为等时性。所以，系统的质量 $m$ 和弹簧刚度 $k$ 一旦确定，固有频率就是一定值。刚度相同的两个系统，质量大的系统固有频率低，质量小的系统固有频率高。质量相同的两个系统，弹簧刚度小的固有频率低，弹簧刚度大的固有频率高。

从力学分析上可作这样的解释：弹簧刚度大，表示在同样的位移条件下，振动系统有较大的弹性恢复力，使质量块产生较大的加速度。由于

$$a = \ddot{x} = -A\omega_n^2 \sin(\omega_n t + \varphi)$$

即固有频率是和加速度的平方根成正比的，所以导致固有频率高。如果质量大，则惯性大，在同样的弹性恢复力作用下，质量块大的加速度小，频率低。

式(2.6)中的两个待定常数 $b_1$ 和 $b_2$ 必须根据振动的初始条件决定。设振动的初始条件为

$$t = 0 \text{ 时}, x = x_0, \dot{x} = \dot{x}_0$$

不难解出