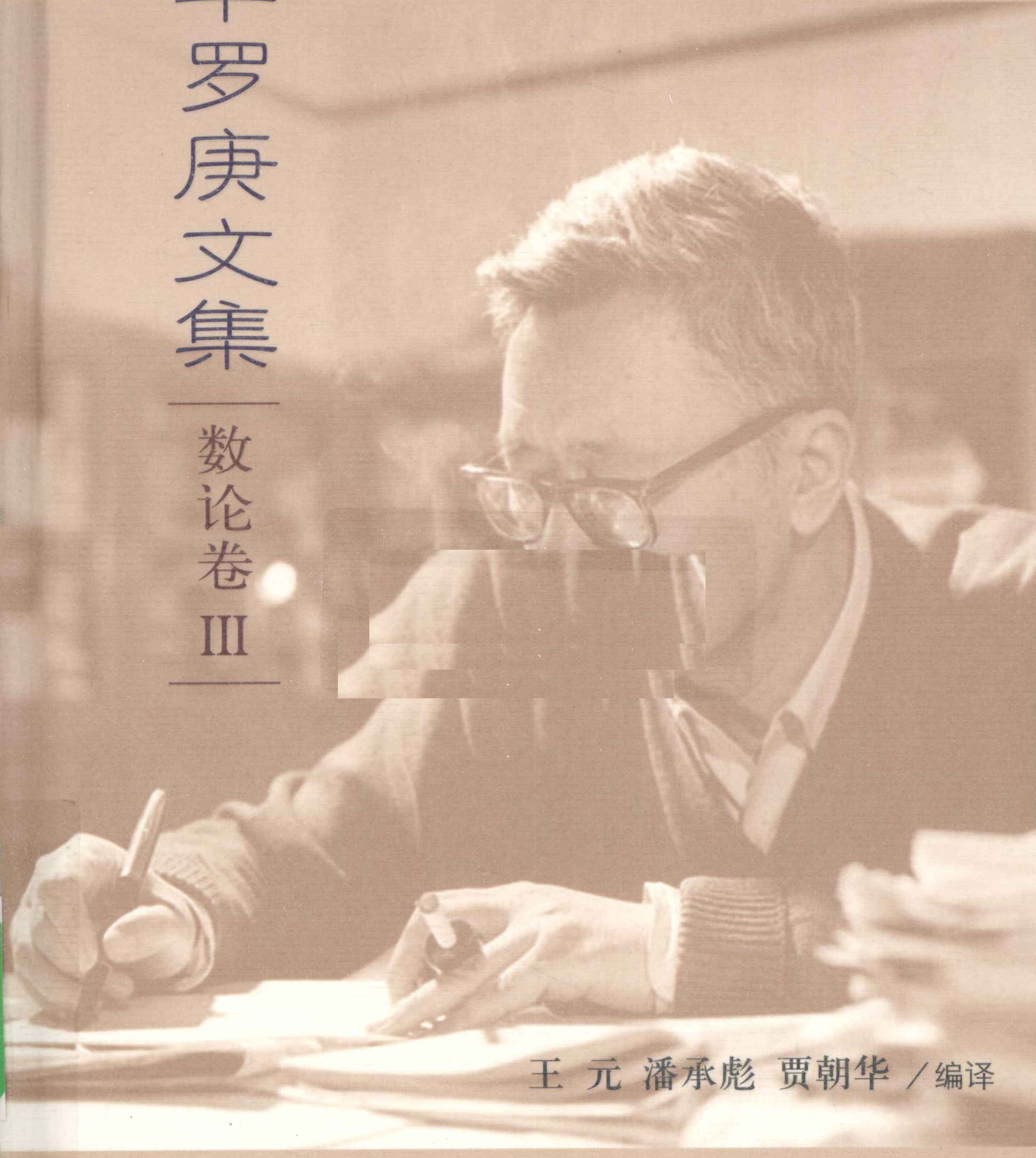
国家出版基金资助项目

中国科学院华罗庚数学重点实验室丛书

华罗庚文集

数论卷 III



王 元 潘承彪 贾朝华 /编译

科学出版社
www.sciencep.com

国家出版基金资助项目

中国科学院华罗庚数学重点实验室丛书

华罗庚文集

数论卷 III

王　元　潘承彪　贾朝华　编译

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书精选、翻译了华罗庚在各个时期数论方面的代表性论文，这些论文是关于华林问题、Tarry 问题、指数和估计、Vinogradov 中值定理、整数分拆、Pell 方程的最小解、最小原根、圆内格点等重要数论问题的研究.

本书适合数学专业的大学生、研究生、教师、科研工作者以及对华罗庚学术思想有兴趣的读者阅读.

图书在版编目(CIP)数据

华罗庚文集：数论卷Ⅲ/王元，潘承彪，贾朝华编译. —北京：科学出版社，2010

(中国科学院华罗庚数学重点实验室丛书)

ISBN 978-7-03-028514-0

Ⅰ.华… Ⅱ.①王… ②潘… ③贾… Ⅲ.①数学-文集 ②数论-文集 Ⅳ.O1-53

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2010) 第 151898 号

责任编辑：张 扬 赵彦超／责任校对：陈玉凤
责任印制：钱玉芬／封面设计：陈 敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

中国科学院印刷厂 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2010 年 8 月第 一 版 开本：B5(720×1000)
2010 年 8 月第一次印刷 印张：20 3/4
印数：1—3 000 字数：404 000

定价：98.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

《华罗庚文集》序言

2010 年是著名数学家华罗庚先生诞辰 100 周年. 值此机会, 我们编辑出版《华罗庚文集》, 作为对他的美好纪念.

华罗庚先生是他那个时代的国际领袖数学家之一, 也是中国现代数学的主要奠基人和领导者. 无论是在和平建设时期, 还是在政治动荡甚至是战争年代, 他都抱定了为国家和人民服务的宗旨, 为中国数学的发展倾注了毕生精力, 受到了中国人民的广泛尊敬.

华罗庚先生最初研究数论, 后将研究兴趣拓展至代数和多复变等多个领域, 取得了一系列国际一流的成果, 引领了这些领域的学术发展, 产生了广泛持久的影响. 他从一名自学青年成长为著名数学家, 其传奇经历激励了几代中国数学家投身于数学事业.

华罗庚先生为我们留下了丰富的精神遗产, 包括大量的学术著作和研究论文. 我们认为, 认真研读这些著作和论文, 是深刻把握华罗庚学术思想精髓的最佳途径. 无论对于数学工作者还是青年学生, 其中许多内容都是很有启发和裨益的.

华罗庚先生担任中国科学院数学研究所所长 30 余年, 他言传身教, 培养和影响了一批国际水平的数学家, 他的学术思想和治学精神已经成为数学所文化的核心. 自 2008 年起以中科院数学所为基础成立的中国科学院华罗庚数学重点实验室, 旨在继承和弘扬华罗庚先生的学术思想和治学精神, 积极推动中国数学的发展. 为此, 我们选择华罗庚先生的著作和论文作为实验室的首批出版物, 今后还将陆续推出更多优秀的数学出版物.

在出版《华罗庚文集》的过程中, 我们得到了各方面的关心和支持, 包括国家出版基金的资助, 在此我们表示深深的感谢. 同时, 对于有关人员在策划、翻译和审校等方面付出的辛勤劳动, 对于科学出版社所作的大量工作, 我们表示诚挚的谢意.

中国科学院华罗庚数学重点实验室

《华罗庚文集》编委会

2010 年 3 月

目 录

华罗庚 (1910–1985)①

哈贝斯坦 著

王 元 译

哈贝斯坦教授曾任美国伊利诺伊大学数学系主任, 研究方向是解析数论, 现已退休. 华罗庚教授曾在 1948 —1950 年间任伊利诺伊大学的教授, 回国之后与哈贝斯坦的友谊保持终生. 哈贝斯坦教授的这篇有关著名数学家华罗庚的传记文章, 发表在美国科学院出版的《科学家传记》第 81 卷 (*Biographical Memoirs*, Vol.81. Washington, D. C.: The National Academy Press, 2002) 中. 该传记丛书每卷大约 500 页, 包括 20 名科学家. 据查, 在 70—81 卷中, 只收录了一位大陆科学家 —— 华罗庚. 本传记中的观点均属于作者本人, 并不一定反映美国国家科学院的观点.

华罗庚是他那个时代的领袖数学家之一及他那一代人中两位最杰出的中国数学家之一, 另一位是陈省身. 正当中国在经历一场又一场政治波动的时候, 华罗庚度过了年富力强的年代. 如果今天许多中国数学家能在科学前沿作出突出的贡献, 如果数学在中国享有异常的普遍尊重, 那就要在很大程度上归功于作为学者与教师的华罗庚 50 年来对他国家的数学事业的领导.

华罗庚于 1910 年生于中国江苏省南部的金坛县. 现在金坛已经是一个繁荣的城市, 它有一所以华罗庚命名的中学及一个颂扬他功绩的纪念馆. 但在 1910 年, 金坛还只是一个小村镇, 华罗庚的父亲在那里开一家杂货店. 在华罗庚的整个青少年时期, 他的家庭都是很贫穷的. 除此之外, 他还是一个不断被病痛折磨的羸弱孩子, 在一次伤寒病后竟使左腿瘫痪了, 这给他带来终生行走时的严重不便. 但很幸运地, 华罗庚天性愉快与乐观, 这对他以后遇到困难时是很有帮助的.

华罗庚受到的正规教育是短暂的, 从表面上看, 它几乎不足以奠定学术生涯的基础 —— 他得到的第一个学位为 1980 年法国南锡 (Nancy) 大学授予的荣誉博士, 然而, 优质的正规教育使他得到了智力的发展. 1922 年, 当华罗庚小学毕业时, 金坛中学开办了, 该校有一位高素质与严格的数学老师, 他认识到华罗庚的才能并加以培养. 此外, 华罗庚在很早就养成了缺少书籍时自学的习惯, 往后, 在缺少文献的情况下, 直接去处理问题成为他的首要原则, 在他的一生中都热情地贯穿这一原则,

---

① 本文原载《中国科技史料》第 23 卷, 第 3 期 (2002 年): 181–188.

并鼓励他的学生也用这一方法.

其后, 华罗庚进入了位于上海的中华职业学校, 在那里, 他荣获过全市珠算比赛冠军. 尽管学校的学费较低, 但生活费用对华罗庚来说还是太高了, 从而迫使他在差一学期就要毕业时便辍学了. 华罗庚无法在上海找到一份工作, 只好在 1927 年回老家帮助他的父亲经营杂货店. 同年, 他与吴筱元结婚, 次年得女儿华顺, 1931 年又得长子华俊东.

华罗庚回到金坛后, 即开始自学数学并在上海《科学》杂志 1929 年 12 月号上发表了他的处女作《Sturm 氏定理的研究》. 次年, 在同一杂志上发表的一篇短文中, 华罗庚指出了该杂志在 1926 年发表的五次方程可解的文章有原则性错误. 华罗庚透澈的分析得到了北京清华大学一位伯乐教授的青睐. 尽管他缺乏正式学历并有部分教员持保留意见, 华罗庚仍于 1931 年被邀请到该校数学系工作, 开始时任图书馆管理员, 然后改任数学助教; 1932 年 9 月他开始授微积分课; 两年后晋升为教员, 那时, 华罗庚已发表了十多篇文章, 从其中一些文章中, 人们可以看出他将来的兴趣所在. 由于他的才华与贡献, 24 岁的华罗庚已经是一位职业数学家了.

这时的清华大学是中国高等教育的最高学府, 那里的教员致力于使中国的数学与科学赶上西方的先进水平. 中国的科学在停滞了数百年之后, 这无疑是一项极艰难的工作. 在 1935 年和 1936 年, 阿达马 (J. S. Hadamard) 与维纳 (Norbert Wiener) 访问了清华大学, 华罗庚热切地听了他们二人的讲课并给他们留下了良好的印象. 随后维纳访问了英国并向哈代 (G. H. Hardy) 介绍了华罗庚, 从而, 华罗庚得到了英国剑桥大学的邀请. 他于 1936 年到达剑桥. 在那里, 他度过了富于成果的两年. 在华林 (Waring) 问题范围内的众多方面, 华罗庚发表了不少论文 (还有丢番图分析与函数论的一些课题). 华罗庚很好地利用了声誉达到顶点的哈代–李特尔伍德 (J. E. Littlewood) 学派的学术环境, 华罗庚是靠中华文化教育基金会每年 1250 美元的资助在英国生活的. 我们饶有兴趣地回顾一下, 该基金来自于中国在 19 世纪与美国及其他一些国家在中国进行的战争对美国的赔款中退回来的钱 (译者注: 即 "八国联军" 入侵, 在屈辱的《辛丑条约》中规定的赔款 ——"庚子赔款"), 这一赔款是强权强加于中国的. 哈代向华罗庚保证, 在两年中他便能轻易地得到博士学位, 但是华罗庚因交不起学费而取消了拿博士的做法. 当然, 他对这一决定作了另一个完全不同的解释.

在剑桥期间, 华罗庚成为达文波特 (Harold Davenport) 与海尔布龙 (Hans Heilbronn) 的朋友, 这二人是 "三一学院" 的年轻研究员, 前者为李特尔伍德以前的学生. 而后者为兰道 (E. Landau) 在哥廷根时最后的助教, 华罗庚跟他们一起, 对于哈代–李特尔伍德处理华林问题这类的堆垒问题深感兴趣. 他们帮助修改了华罗庚的一些论文中的英文, 这些论文说明华罗庚是相当高产的. 这一时期华罗庚撰写了超过 10 篇论文, 其中不少篇都发表在伦敦数学会出版的杂志上面.

大概华林问题仅有的简单事情为它的陈述：在 1770 年，华林断言但未证明以下的命题 (非原话)：对于每一个整数 $k \geqslant 2$，皆存在一个仅依赖于 k 的整数 $s = s(k)$ 使每一个正整数 N 皆可以表示为

$$N = x_1^k + \cdots + x_s^k, \tag{1}$$

其中 $x_i(i = 1, 2, \cdots, n)$ 为非负整数. 同年，拉格朗日 (J. L. Lagrange) 证明了 $s(2) = 4$，即解决了 $k = 2$ 的情况. 这是一个臻于至善的结果; 往后则进展甚缓，直到 1909 年，希尔伯特 (D. Hilbert) 才完全解决了一般情况下的华林问题，他用的方法为复杂的代数恒等式的应用，而且 $s(k)$ 的值甚大. 1918 年，哈代与拉马努詹 (S. Ramanujan) 又回到了 $k = 2$ 的情况，试图用傅里叶 (J. B. J. Fourier) 分析方法决定将整数表为 s 个平方和的表示数目问题. 他们的想法是受到他们关于分拆的著名工作的启发而形成的，他们成功了，这就鼓舞了哈代与李特尔伍德在 1920 年将类似的方法用于一般的 k. 他们发明了所谓的圆法来处理一般的希尔伯特–华林定理及包括哥德巴赫 (C. Goldbach) 问题在内的一大批堆垒问题. 在往后的 20 年里，圆法结构的困难程度在整个数学中都被认为是可以与任何其他东西相比拟的. 即使在今天，在经过众多的改进与很大进展后，这一方法的复杂性仍然令人望而生畏①. 概要地讲，经过维诺格拉多夫 (I. M. Vinogradov) 改进过的哈代–李特尔伍德–拉马努詹圆法可以这样来叙述：命

$$T(\alpha) = \sum_{x=0}^{P} \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} \alpha x^k}, \quad P = [N^{1/k}]$$

及 $R_s^{(k)}$ 表示 N 表为形式 (1) 的表示数，则

$$R_s^{(k)}(N) = \int_0^1 T(\alpha)^s \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} N\alpha} \mathrm{d}\alpha,$$

所以欲证希尔伯特–华林定理，只要证明当 s 为某个仅依赖于 k 的自然数时，对于所有充分大的整数 N 皆有 $R_s^{(k)}(N) > 0$ 就够了. 我们记 $G(k)$ 为这种可允许的 s 值中的最小者. 在 [0, 1] 中以较小分母有理数为中心的互不相交的诸小区间的集合上，生成函数 $T(\alpha)$ 可得到很好的逼近，从而设想可以证明在这些区间上的积分之和即得到 $R_s^{(k)}(N)$ 的主项，而关于通常称为劣弧的补集上的积分则为一个较低阶的无穷大. 后面这项工作，即在劣弧上进行估计，更为困难些，但哈代与李特尔伍德在此用了一个比 $T(\alpha)$ 更广泛的三角和的估计，这是外尔 (Hermann Weyl) 于 1916 年建立的与序列一致分布判别法的基本工作相联系的一项工作. 这样一来，他们就证

① R. C. Vaughan. *The Hardy-Littlewood Method*, 2nd. Cambridge: Cambridge University Press, 1977.

明了

$$G(k) \leqslant k2^{k-1} + 1,$$

这就是华罗庚作为一个青年人的工作背景. 这样说或许是适当的. 华罗庚在这方面的贡献使他青史留名, 即他关于类似于 $T(\alpha)$ 的三角和的单个与平均卓越的原创性估计. 这一种平均估计, 即现在著名的华氏引理是说, 对于任何 $\varepsilon > 0$ 及 $1 \leqslant j \leqslant k$, 皆有

$$\int_0^1 |T(\alpha)|^{2^j} \mathrm{d}\alpha = 0_\varepsilon(P^{2^j - j + \varepsilon}).$$

显然 $T(\alpha) \leqslant P$, 所以对于每一个 $j \leqslant k$, 这一不等式几乎省去了一个 P 的 j 次方幂. 当在劣弧上与 $T(\alpha)$ 的外尔估计联系使用时, 华氏不等式导出了改进的界

$$G(k) \leqslant 2^k + 1.$$

当今虽然有了更好的结果, 但皆为十分困难复杂的.

华罗庚满可以在英国逗留更长的时间, 但他思家心切, 日本于 1937 年入侵了中国, 更使他忧心如焚. 他于 1938 年离开剑桥, 作为一位正教授回到他原来的大学. 这时, 在大部分中国被日本占领后, 清华大学已不在北京了, 它搬到了南方的云南省省会昆明, 与其他几所大学 (指的是北京大学与南开大学 —— 译者注) 一起组成了临时的西南联合大学. 华罗庚与他的家庭一道在昆明一直待到 1945 年第二次世界大战结束. 那时, 华罗庚是很贫穷的, 加上体质很差与学术上的孤立. 尽管困难重重, 华罗庚仍然维持着他在剑桥时的工作强度, 甚至有过之, 至 1945 年底, 他已发表了 70 多篇论文. 在这期间, 他研究了维诺格拉多夫原创性的三角和估计方法并用更精确的形式作了简洁的复述, 即现在普遍熟知的维诺格拉多夫中值定理, 这一著名结果的中心作用为改进希尔伯特–华林定理, 及关于黎曼 (G. F. B. Riemann)ζ-函数研究的重要应用. 华罗庚将这一工作写成一本小册子. 早在 1940 年即被前苏联接受用俄文发表, 但由于战争原因, 直到 1947 年才以斯捷克洛夫 (V. A. Steklov) 数学研究所的专著 (其扩充形式) 正式发表了.

应维诺格拉多夫的邀请, 华罗庚于 1946 年春在俄罗斯呆了 3 个月. 除数学交流外, 华罗庚对那里科学活动的组织甚有好感. 当日后他在新中国处于领导岗位时, 这一经验对他是颇有影响的. 往后的岁月里, 尽管华罗庚的科学活动扩展到了其他领域, 他总是准备回到华林问题及一般数论中来, 特别是回到涉及指数和的问题. 因此在 1959 年, 他发表了为《数学百科全书》(*Enzyklopädie der Matematischen Wissenschaften*) 而写的重要专著《指数和的估计及其在数论中的应用》. 他关于什么东西重要的感知及关于技术的出色掌握使他的数论论文即使在今天来看仍为 20 世纪上半叶数论重要活动的一个索引.

在昆明的后几年中, 华罗庚的兴趣转入了代数与分析, 首先他着力于使学生得益, 继之即在这些领域作出了原创性的贡献. 华罗庚对矩阵代数有兴趣并撰写了一些矩阵几何学方面的实质性论文. 他被邀请访问位于普林斯顿的高等研究院, 但由于西格尔 (C. L. Siegel) 在那里做着某些类似的工作, 华罗庚起先拒绝了这一邀请, 以便能独立地发展他自己的想法. 在华罗庚从俄国回国不久, 他仍于 1946 年 9 月启程赴普林斯顿, 华罗庚不仅带去了矩阵理论的构想, 而且还有多个复变数函数论与群论的计划. 这时中国的内战正酣, 因而他难于成行, 为此, 中国当局在华罗庚的护照上赋予了将军的头衔以 "便于旅行".

按照他的传记作者的看法, 华罗庚在美国期间 "最重要与值得的研究工作" 为除环 (skew field) 这一领域, 即 (非交换) 可除代数, 四元数为除环的一个经典例子. 华罗庚是下面命题的首先证明者, 即每一个除环 F 的半自同构或者为一个自同构或者为一个反自同构 —— 更确切地讲, 若 σ 是一个 F 至自身的一一映射且满足 $1^\sigma = 1$ 及对所有 F 中的 a, b 皆有

$$(a+b)^\sigma = a^\sigma + b^\sigma, \quad (aba)^\sigma = a^\sigma b^\sigma a^\sigma,$$

则对于所有 $a, b \in F$, 或者

$$(ab)^\sigma = a^\sigma b^\sigma$$

或者

$$(ab)^\sigma = b^\sigma a^\sigma.$$

他亦给予他 "直接" 处理问题的一个惊人证明, 即证明了每一个除环的正规子域必包含在其中心之中, 证明只有一页半, 它依赖于下面的恒等式: 若 $ab \neq ba$, 则

$$a = [b^{-1} - (a-1)^{-1}b^{-1}(a-1)][a^{-1}b^{-1}a - (a-1)^{-1}b^{-1}(a-1)].$$

在文献中, 这一结果被称为嘉当 (H. Cartan)– 布饶尔 (R. Brauer)– 华氏定理, 嘉当最初的证明用到了很多较深奥的工具.

当然, 在他生命的最后大创造时期中, 他还做了不少别的工作, 华罗庚与范迪维尔 (H. Vandiver) 合写了几篇有限域上不定方程求解的文章及与赖纳 (I. Reiner) 合写了典型群自同构的文章. 他的大部分代数工作构成了他在日后与万哲先合写的专著《典型群》(上海科技出版社出版, 1963 年, 中文) 的基础.

在个人方面, 1947 年春, 华罗庚在约翰 · 霍普金斯大学手术治疗腿疾, 经治疗后他的一条瘸腿在行走时有了很大的改善, 为此他与他的家庭都感到十分欣慰. 另外, 在 1947 年他的女儿华苏出生了; 在这之前, 他还有两个儿子华陵与华光, 后者生于 1945 年, 稍晚, 还有一个华密. 1948 年春, 华罗庚接受了作为位于乌尔班那–香槟的伊利诺伊大学正教援的聘请. 在那里他指导了阿尤布 (R. Ayoub) 的博士论文

(后来, 阿尤布成为宾州州立大学的教授); 继续与赖纳的合作; 并影响了几个年轻研究人员的思路, 其中包括舍内菲尔德 (L. Schoenefeld) 与米切尔 (J. Mitchell). 华罗庚待在伊利诺伊的时间是很短暂的, 中国正发生着巨大的变化, 华罗庚热切地注视着事态的发展而且愿意投身于这一新时代中. 尽管他与妻子及三个年幼的孩子在乌尔班那安顿得非常舒适, 他回归的冲动却异常激烈. 1950 年 3 月 16 日, 他回到了北京他的母校清华大学, 准备对这美好的新世界作出他自己的贡献. 那时, 他正处于他的数学才智之巅. 正如在许多年后, 他给我的信中所说, 回顾起来, 40 年代对他而言, 是一生中的黄金岁月. 尽管他需要面对种种困难, 他从未对他的回国决定后悔过.

回到中国后, 华罗庚即投身到教学改革当中, 组织各种不同层次的数学活动, 指导研究生①, 到中学做报告, 以及到新兴工业部门中给工人们讲课. 1952 年 7 月中国科学院数学研究所开办了, 华罗庚被任命为首任所长. 次年, 他作为中国科学院访苏代表团的 26 名成员之一访问了苏联. 代表团企图建立与俄国科学的联系, 这时, 华罗庚曾疑惑共产党是否信任他, 但在莫斯科时, 当他得知中国政府已同意苏联政府将斯大林奖金授予华罗庚的建议, 这对他确是十分惊喜的事. 但在斯大林去世后, 奖励被中止, 华罗庚也就失去了得奖的机会. 对于以后的发展, 华罗庚告诉我, 他倍感满意!

除了许多数学与行政职务外, 华罗庚的研究工作仍很活跃, 并继续写作, 其中不仅在他进行过的领域, 也包括一些对他来说是新的, 或以前稍有过接触的领域. 1956 年, 他的巨型教科书《数论导引》出版了 (根据政府命令, 1975 年中文版的序言被删去, 这是由于华罗庚在文化大革命中大部分时间靠边站了); 以后施普林格出版社出版了这本书的英文版, 而且该书仍在继续再版之中. 1958 年出版了《多复变函数论中的典型域的调和分析》, 同年这本书被译成俄文出版, 接着 1963 年美国数学会出版了它的英文译本. 这本重要专著中的绝大部分结果都是属于华罗庚本人的, 其中与西格尔的工作有某些重复. 这本书的结果对表示理论、齐性空间理论与自守形式理论都有应用. 这本专著也包含他与陆启铿合作的关于泊松 (S. D. Poisson) 与伯格曼 (S. Bergman) 核的工作. 华罗庚的这项工作以后对于施泰因 (E. Stein) 关于全纯函数的边界性质的研究是有用的. 1959 年华罗庚给予了将霍奇 (W. W. D. Hodge) 理论推广至开埃尔米特 (C. Hermite) 流形以重要评价; 1962 年科恩 (J. J. Kohn) 成功地完成了这项工作. 早先提到的 1959 年出版的关于指数和的专著亦被译成俄文出版了. 华罗庚是一位深入浅出与多产的作家, 为了使学生易于进入近代数学, 他用中文为学校及大学生写了很多书与文章. 为了自述情怀及朋友们的愉悦, 他终身都在写诗.

① 在他的学生中, 数论方面有陈景润、潘承洞与王元; 代数方面有万哲先; 分析方面有龚昇与陆启铿.

1958 年, 华罗庚在所谓 "大跃进" 乌托邦的美梦中被猛然唤醒. 毛泽东鼓励向知识分子的猛烈攻击横扫了全国, 在 "卑贱者最聪明, 高贵者最愚蠢" 这样的口号激励下, 由顺从的政府官员满怀热情地予以实施. 除了他的高位和来自高层的保护外, 华罗庚遭到了折磨、公开的谩骂与不断的监视, 然而就在这样骚乱的时期, 华罗庚与王元一起发展了线性规划、运筹学与高维数值积分等广泛的课题. 关于最后这个方面, 由于蒙特卡罗 (Monte Carlo) 方法的研究与一致分布的作用促使他们去创造了一个基于代数数论的不同的决定性方法, 他们的理论含于著作《数论在近似分析中的应用》之中. 这本书出版得相当晚, 直到 1978 年才面世. 1981 年, 施普林格出版社出版了英文译本. 新建立的应用数学兴趣使华罗庚在 60 年代带着一个小分队跑遍全国, 向各种工人传授如何将他们的知识技能用于工厂与日常生活的问题, 不管在工厂的问题解答会上或现场教学中, 他用数学精神感染了他的听众到了这样的程度, 从而使他成了一个民族英雄, 甚至毛泽东主动给他写了一封赞扬信, 这为他在动乱时期提供了宝贵的保护. 华罗庚仪表堂堂, 和蔼可亲, 有一种将事理简化的奇异手段, 从而随着他旅行的影响, 他的盛名广传而且数学的声誉也遍及全国①, 当较晚他出国旅行时, 各种政治信仰的中国人群都争相拜会他并向他致敬. 1984 年, 当他在杭州举办一个多复变函数论会议时, 西方同行对中国新闻媒体宣传的规模甚感惊奇.

但所有这些都是未来的事了. 1966 年, 毛泽东发动了另一全国性灾难的运动, 即延续了十年之久的所谓 "文化大革命", 早在 1965 年 6 月 26 日, 毛泽东在一次讲话中, 即向知识分子传递了一个不祥的信息: "书读得愈多愈愚蠢". 华罗庚许多年实际上处于软禁中, 他将他的生存归功于周恩来亲自出面对他的保护. 即使这样, 他仍然遭到不断侵扰的质询. 他的一些手稿 (数学经济) 被查抄了, 而且永远丢失了. 他的同事与以前的学生被发动起来发表攻击他的言论 (在 1978 年, 中国驻英大使向我叙述了这样一个场面: 可能是下一代中国最为知晓的数学家陈景润被命令站在一个公共场所几小时, 一群造反派围着他, 要他揭露华罗庚. 当时也在场的陈景润插话说, 实际上他很喜欢这一机会, 因为没有学生会用无聊的问题来打扰他, 因此他有时间可以毫无干扰地想数学问题了!). 这的确不奇怪, 1965 年华罗庚就过早地停止发表著作了. 当然, 他仍然在工作, 他还有几篇关于近似分析的合作文章 (与王元) 及最优化文章 (登于《科学通报》, 发表于 70 年代). 这些工作或许是基于他早先做的工作而写成的, 也有些他多年在广泛的教学与咨询经验中提取积累而写成的综合论文与教科书. 他在 1981 年的一篇文章中, 悲伤地回顾道 "谁知步入第十六个年头的时候, 我被 …… 弄得走投无路, 几乎精疲力尽".

随着 1976 年 "文化大革命" 的结束, 华罗庚进入了他生命的最后阶段, 在国内

① 关于处理过的问题精选请见 *Popularizing Mathematical Methods in the People's Republic of China*. by L. K. Hua and Y. Wang. Boston: Birkhäuser, 1989.

他恢复了荣誉. 他被任命为中国科学院副院长、全国人民代表大会代表及政府的科学顾问, 除此之外, 中央电视台 (CCTV) 拍了一个短的电视系列剧来讲述华罗庚一生的故事. 这一电视剧至少被播放了两次. 1980 年, 他扮演着他国家的文化大使, 重建与西方学术界的联系, 在往后的五年中, 他遍访了欧洲、美国与日本, 1979 年, 他是英国科学研究委员会设于伯明翰大学的一位研究员, 在 1983—1984 年, 他作为一位杰出学者 (Sherman fairchild distinguished scholar) 在加州理工学院停留, 绝大多数时间里, 他都很疲倦并且健康欠佳, 但他并未丧失对生命的情趣与无限的好奇心. 1984 年春他在乌尔班那对一大堆听众报告他的数学经济工作, 人们感到他在加紧努力以补偿他丢失的岁月, 1985 年 5 月 21 日在他给我的最后信件中, 他告诉我, 现在的绝大部分时间都在不幸地从事 "非数学活动, 而这些活动对他的国家与人民都是必需的". 1985 年 6 月 12 日在东京的一次演讲结束时, 他逝世于心脏病发作.

华罗庚得到南锡大学 (1980 年)、香港中文大学 (1983 年) 与伊利诺伊大学 (1984 年) 的荣誉博士. 他被选为美国国家科学院外籍院士 (1982 年)、德国自然科学院 (Deutsche Akademie der Naturforscher Leopoldia)(1983 年)、第三世界科学院 (1983 年) 与巴伐利亚科学院 (Bavarian Academy of Sciences)(1985 年) 院士.

王元教授为华罗庚写过一个很好的传记①, 我对能用到这本书的一些材料表示感谢, 我也曾为《算术学报》(*Acta Arithmetica*) 写过一篇悼念他的文章 (LI(1988): 99—117).

① Y. Wang, Hua Loo-keng. Translated by Peter Shiu. Singapore: Springer, 1999.

著作精选

1936

With S. S. Shu. On Fourier transforms in L^p in the complex domains. *J. Math.* Phys, 15: 249–263.

1938

On Waring's problem. *Q. J. Math.*, 9: 199–202.

On the representation of numbers as the sums of the powers of primes. *Math. Z.*, 44: 335–346.

1940

On an exponential sum. *J. Chin. Math. Soc.*, 2: 301–312.

With H. F. Tuan. Some "Anzahl" theorems for groups of prime-power orders. *J. Chin. Math. Soc.*, 2: 313–319.

1942

On the least primitive root of a prime. *Bull. Am. Math. Soc.*, 48: 726–730.

The Lattice-points in a circle. *Q. J. Math.*, 13: 18–29.

1944

On the theory of automorphic functions of a matrix variable. I. Geometrical basis. II. The classification of hypercircles under the symplectric group. *Am. J. Math.*, 66: 470–488, 531–563.

1945

Geometries of matrices. I. Generalizations of von Staudt's theorem. II. Arithmetical construction. *Trans. Am. Math. Soc.*, 57: 441–481, 482–490.

1946

Orthogonal classification of Hermitian matrices. *Trans. Am. Math. Soc.*, 59: 508–523.

1947

Geometries of matrices. III. Fundamental Theorems in the geometries of symmetric

matrices. *Trans. Am. Math. Soc.*, 61: 229–255.

With S. H. min. On a double exponential sum. *Sci. Rep. Tsing Hua Univ.*, A4: 484–518.

1948

On the automorphisms of the symplectic group over any field. *Ann. Math.*, 49: 739–759.

1949

On the automorphisms of a sfield. *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.*, 35: 386–389.

Some properties of a sfield. *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.*, 35: 533–537.

An improvement of Vinogradov's mean-value theorem and several applications. *Q. J. Math.*, 20: 48–61.

1951

Supplement to the paper of Dieudonné on the automorphisms of classical groups. *Mem. Am. Math. Soc.*, 2: 96–122.

With I. Reiner. Automorphisms of the unimodular group. *Trans. Am. Math. Soc.*, 71: 331–348.

1957

On exponential sums. *Sci Rec.* (*N. S.*), 1(1): 1–4.

On the major arcs of Waring problem. *Sci. Res.* (*N. S.*), 1(3): 17–18.

On the Riemannian curvature in the space of several complex variables. *Schr. Forschungsinst. Math.*, 1: 245–263.

1959

Abschätzungen von Exponentialsummen und ihre Anwendung in der Zahlentheorie. Leipzig: Teubner. (Chinese translation: Peking: Academic Press, 1963; Rus-sian translation: Moskva: Mir, 1964.)

1963

Harmonic Analysis of Functions of Several Complex Variables in the Classical Domains (English translation). Providence, R. I.: American Mathematical Society(In Chinese: Peking: Academic Press, 1958, rev. ed., 1965; Russian translation: Moskva: Izd. Inostran. Lit., 1959).

1965

Additive theory of prime numbers (English translation). Providence. R. I.: American Mathematical Society(In Russian: *Trudy Inst. Math. Steklov*, 22(1947): 1–179; Chinese translation [revised]: Peking: Academic Press, 1957; Hungarian translation: Budapest: Académiai Kiadó, 1959; German translation: Leipzing: Teuber, 1959).

1981

With Y. Wang . *Application of Number Theory to Numerical Analysis* (English translation). New York: Springer(In Chinese: Peking: Academic Press, 1978.)

关于多变量堆垒数论的一个问题①

华罗庚②(中国, 北平)

本文将回答如下的问题:

设 $P(x,y)$ 和 $P'(x,y)$ 为两个整值多项式, $\varepsilon_\nu=\pm1$. 是否存在一个正整数 s, 使得对于所有的整数 n 和 n', 丢番图方程组

$$\left\{\begin{array}{l}\displaystyle\sum_{\nu=1}^{s}\varepsilon_\nu P(x_\nu,y_\nu)=n,\\ \displaystyle\sum_{\nu=1}^{s}\varepsilon_\nu P'(x_\nu,y_\nu)=n'\end{array}\right. \tag{1}$$

总有解?

如果 P 和 P' 满足某个限制条件, 则问题的答案是肯定的. 这里还将给出 s 的上界, 它等于 $2^k k-1$, 其中 k 为 P 与 P' 的次数的最大者.

我们假设: $P(x,y)$ 和 $P'(x,y)$ 为两个整值多项式, 次数分别为 k 和 k'. 对于任一个素数 p, 不存在整数 $q,q'((q,q')=1)$ 和 l, 使得

$$qP(x,y)+q'P'(x,y)\equiv l(\text{mod}p) \tag{2}$$

恒等地成立. 不失一般性, 我们可设 $k\geqslant k'$. 在本问题里, 上述限制条件不能够去掉, 否则, n 和 n' 将无法取到任意的整数.

引理 1 每一个整值多项式 $P(x,y)$ 都可以表作

$$P(x,y)=\sum a_{\mu,\nu}P_\mu(x)P_\nu(y),$$

其中 $a_{\mu,\nu}$ 为整数, 而

$$P_\mu(z)=\frac{z(z-1)\cdots(z-\mu+1)}{\mu!}\quad(\mu>0),\quad P_0(z)=1.$$

引理 2 令

$$P(x,y)=\sum a_{\mu,\nu}P_\mu(x)P_\nu(y)$$

① 1936 年 4 月 20 日收到. 发表于 *Mathematische Zeitschrift*, 1936, 41(5): 708–712.

② 时任中华教育与文化促进基金会研究员.