高等学校“十一五”规划教材

概率论与数理统计

Gailülun Yu Shuli Tongji

殷志祥 许 峰 主编

中国矿业大学出版社
China University of Mining and Technology Press

内 容 简 介

全书共分 9 章:随机事件及概率论基本概念、随机变量及其分布、多维随机变量、随机变量的数字特征、大数定律和中心极限定理、数理统计的基本概念、参数估计、假设检验、方差分析与回归分析。每节均附有一定量的有习题,供读者练习。

本书可作为工科、理科(非数学专业)各专业的教材使用,也可供工程技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计 / 殷志祥,许峰主编. —徐州:中国矿业大学出版社,2009.8

ISBN 978-7-5646-0373-1

Ⅰ.概… Ⅱ.①殷…②许… Ⅲ.①概率论—高等学校—教材②数理统计—高等学校—教材 Ⅳ.O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第102900号

书　　名　概率论与数理统计
主　　编　殷志祥　许　峰
责任编辑　耿东锋　张　岩
责任校对　周俊平
出版发行　中国矿业大学出版社
（江苏省徐州市中国矿业大学内　邮编 221008)
网　　址　http://www.cumtp.com **E-mail**:cumtpvip@cumtp.com
排　　版　中国矿业大学出版社排版中心
印　　刷　徐州中矿大印发科技有限公司
经　　销　新华书店
开　　本　787×960 1/16　**印张** 20.5　**字数** 388千字
版次印次　2009 年 8 月第 1 版　2009 年 8 月第 1 次印刷
定　　价　26.00元

前　言

概率论与数理统计是研究随机现象规律性的一门学科。由于自然界随机现象存在的广泛性，使得概率论与数理统计的方法正日甚一日地渗入到几乎一切自然科学、技术科学以及经济管理各领域中去。从学科分类看，概率论、数理统计都是近代数学的分支，概率论是对随机现象统计规律演绎的研究，而数理统计是对随机现象统计规律归纳的研究。虽然两者在方法上有着明显的不同，但它们却是相互渗透、相互联系的。因此，《概率论与数理统计》在编排上，也大致分成两部分：第一部分为概率论，包括第一章至第五章，其中也掺杂一些数理统计的例子；第二部分为数理统计，包括第六章至第九章。带“＊”部分为选学内容。《概率论与数理统计》在编写过程中，努力做到通俗易懂，简详得当，在选材和叙述上尽量做到联系实际，突出基本内容的掌握和基本方法的训练，注重数理统计的应用，所选用的例子不仅能加深对基本概念和基本方法的了解，同时，也能提高读者学习的兴趣。为了帮助读者巩固所学知识，《概率论与数理统计》在习题的选择上也做了些努力，既有基本训练题，也有较为复杂的综合应用题，读者可酌量做一部分以开拓思路，加深理解。

参加《概率论与数理统计》编写的有殷志祥（第一章）、周维（第二章、第三章）、范自强（第四章、第五章）、关维娟（第六章及附录）、许峰（第七章、第八章、第九章），最后由殷志祥、许峰负责全书的统稿和定稿。限于编者的水平，书中难免存在不妥之处，敬请读者批评指正。

编者

目　录

1 随机事件及概率论基本概念

概率论(Probability)是从数量角度研究随机现象(偶然现象)的统计规律性的一门数学分支.

1.1 随机现象与随机事件

人们在自己的实践活动中,常常会遇到随机现象.科学的任务就在于,从看起来错综复杂的偶然性中揭露出潜在的必然性,即事物的客观规律性.

1.1.1 随机现象

自然界中的现象,从其发生的必然性的角度区分,可以分为两类:一类是确定性现象;一类是不确定性现象.确定性现象是指这样一类现象:当一定的条件实现时,它一定发生,而当条件不满足时,它一定不发生.例如,带同种电荷的两个小球相互排斥,而带异种电荷的两个小球必相互吸引;硬币在空中自由降落,必然落向地面,等等,都是确定性现象的例子.不确定性现象,是指当一定的条件实现时,这种现象可能出现,也可能不出现.远距离射击较小的目标,可能击中,也可能击不中,每一次射击的结果是随机(偶然)的.自动车床加工出来的机械零件,可能是合格品,也可能是废品.进行实验时,把得到的实验数据在坐标图纸上用点表示出来,我们可以看到,这些点(假设它们足够多)通常并不是位于一条曲线上,而是散布在某一带形区域内,这就是所谓实验点的随机散布.当我们抛出的硬币落到地面时,它可能正面(我们规定硬币的某一面为正面,另一面为反面)向上,也可能反面向上.一个口袋,装有红、白两种球,从中任意取出一个,假设取到每个球的可能性相同,那么我们可能取出红球,也可能取出白球.在一定的条件下,对不确定性现象,重复同一个试验,出现的结果常常是不同的.

在事物的联系和发展过程中,随机现象是客观存在的.表面上是偶然性在起作用,实际上这种偶然性又始终受事物内部隐藏着的必然性所支配.现实世界上事物的联系是非常复杂的,一切事物的发展过程中既包含着必然性的方面,也包含着偶然性的方面,它们是互相对立而又互相联系的,必然性经常通过无数的偶然性表现出来.例如,当向同一目标发射多发炮弹时,将会看到弹着点的分布具

有一定的规律性，它大致关于目标成中心对称，且越靠近目标，弹着点越密；远离目标的区域，弹着点则较稀疏，弹着点落入目标周围任意一个区域内的频率，是基本稳定的. 再如，大量重复抛硬币这一试验，将会发现正面向上的次数约占1/2. 一般说来，试验的次数越多，这种规律性就越明显. 在大量重复试验中不确定性现象表现出的这种规律性叫做**统计规律性**(Statistical regularity). 这种在个别试验中出现的结果具有偶然性，而在大量重复试验中表现出统计规律性的现象称为**随机现象**(Random phenomenon).

1.1.2 样本空间

科学的任务就在于，要从看起来是错综复杂的偶然性中揭露出潜在的必然性，即事物的客观规律性，这种客观规律性是在大量现象中发现的.

在科学研究或工程技术中，为了在大量现象中揭露出事物的客观规律性，我们会经常遇到，在不变的条件下重复地进行多次实验或观测，抛开这些实验或观测的具体性质，就得到概率论中试验的概念. 所谓试验就是一定的综合条件的实现，我们假定这种综合条件可以任意多次地重复实现，大量现象就是很多次试验的结果. 研究随机现象时，我们称条件实现一次为一次试验(trial). 概率论中的"试验"是一个含义广泛的术语，它既包含科学研究和工程技术中的各种试验，也包括对一些事物某一特征的观察. 一般说来，我们希望试验具有如下一些特征：

(1) 试验可以在相同的条件下重复进行；

(2) 试验可能出现的所有结果是事先预知的；

(3) 每次试验有且只有其中的一个结果出现，但在每次试验结束之前，不知道哪一个结果会出现.

对试验的这些要求是合理的. 我们称具有上述三个特征的试验为**随机试验**(random trial). 以后我们常用字母 E 表示随机试验. 本书下文提及的试验都是指随机试验.

试验的结果中每一个可能发生的事件叫做**试验的样本点**(Sample point)，通常用字母 x 来表示.

试验的所有样本点 $x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots$ 构成的集合叫做**样本空间**(Sample space)，通常用字母 S 表示. 于是，我们有

$$S=\{x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots\}$$

例如，我们规定硬币的一面为正面(徽花)，另一面为反面(字)，则抛一枚硬币，有两个可能的结果：正面向上或反面向上. 正面向上，记为 x，反面向上，记为 $\overline{x}$，则 x 和 $\overline{x}$ 就是这个试验的两个样本点. 样本空间就是

$$S=\{x,\overline{x}\}$$

根据随机试验的特征(3)，样本点 $x,\overline{x}$ 应是随机试验的最简单的、不可以再

分的结果.当随机试验确定之后,样本空间 S 就是已知的.

下面我们来考察几个例子.

例 1.1 设 E_1 表示抛一枚硬币 2 次,观察正、反面出现的情况,则 E_1 的样本空间为

$$S=\{xx,x\overline{x},\overline{x}x,\overline{x}\overline{x}\}$$

其中表示每一个样本点的两个字母中,第一个表示第一次抛出时得到的结果,第二个表示第二次抛出时得到的结果.例如,xx 表示两次都出现正面,$x\overline{x}$表示第一次出现正面而第二次出现反面,其余类推.

例 1.2 仍考虑抛一枚硬币 2 次,观察正面出现的次数,这个试验记作 E_2,E_2 可能出现的结果有 0 次,1 次,2 次.每种结果是一个样本点,故样本空间为

$$S=\{0,1,2\}$$

例 1.3 设试验 E_3 为从装有 3 个白球(记为 1,2,3 号)与 2 个黑球(记为 4,5 号)的袋中任取两个球.

(1) 如果观察取出的两个球的颜色,则有样本点:

x_{00}表示“取出 2 个白球”,

x_{01}表示“取出 1 个白球与 1 个黑球”

x_{11}表示“取出 2 个黑球”,

于是样本空间是由 3 个样本点构成的集合:

$$S_1=\{x_{00},x_{01},x_{11}\}$$

(2) 如果观察取出的 2 个球的号码,则有样本点:

x_{ij}表示“取出第 i 号与第 j 号球”$(1\leqslant i<j\leqslant 5)$

于是样本空间是由 $C_5^2=10$ 个样本点构成的集合:

$$S_2=\{x_{12},x_{13},x_{14},x_{15},x_{23},x_{24},x_{25},x_{34},x_{35},x_{45}\}$$

这些例子表明,试验的样本点与样本空间是根据试验的内容而确定的.

例 1.4 设试验 E_4 为记录在时间$[0,t]$内进入某一商店的顾客人数,其样本点为非负整数,且无一固定的上界,故样本空间为

$$S=\{0,1,2,\cdots\}$$

例 1.5 设试验 E_5 为观察所得放射性物质在一段时间内放射的粒子数,则有样本点 x_i 表示“放射 i 个粒子”$(i=0,1,2,\cdots)$.于是样本空间是由可数无穷多个样本点构成的集合

$$S=\{x_0,x_1,x_2,\cdots\}$$

例 1.6 设 E_6 为检验某个灯泡的寿命,以 t(小时)记其寿命,则 E_6 的样本空间为

$$S=\{t\mid 0\leqslant t<+\infty\}$$

例 1.7 设 E_7 为记录本地区一昼夜间的最低气温 x 和最高气温 y，分别以 T_0 和 T_1 表示本地区的最低和最高气温，则 E_7 的样本空间为

$$S=\{(x,y)\mid T_0\leqslant x<y\leqslant T_1\}$$

可以看到，样本空间 S 中包含样本点的数目，可以是有限个（如 E_1,E_2,E_3），也可以是无限多个（如 E_4,E_5,E_6,E_7）. 在 E_4 和 E_5 中，样本点的个数和自然数可以一一对应，故样本点是“可数”的，这时我们称样本点的个数是可数无限多个，或可列无限多个. 在 E_6 和 E_7 中，样本点的个数分别可以和半直线上的点一一对应或和三角形区域 D:$\{T_0\leqslant x<y\leqslant T_1\}$（图 1-1）中的点一一对应，这时称样本点的个数为不可数（不可列）无限多个.

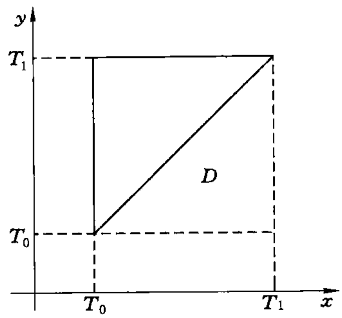


图 1-1 E_7 的样本空间示意图

1.1.3 事件的关系及运算

在 1.1.2 中，已经介绍了随机试验及样本空间的概念，本节中我们将讨论随机事件与样本空间的关系及事件的运算.

在 1.1.2 部分的例 3 中，设随机事件 A 表示“取出的两个球都是白球”，则对于 E_3 的样本空间 S_1 来说，我们有

$$A=\{x_{00}\}$$

而对于 E_3 的样本空间 S_2 来说，我们有

$$A=\{x_{12},x_{13},x_{23}\}$$

这表明随机事件 A 是样本空间 S_1 或 S_2 的一个子集.

在例 5 中，设随机事件 B 表示“放射性物质在一段时间内放射的粒子数不超过 10 个”，则我们有

$$B=\{x_0,x_1,\cdots,x_{10}\}$$

这表明随机事件 B 是 E_5 样本空间 S 的一个子集.

由此可见，任一随机事件 A 都是样本空间 S 的一个子集，该子集中任一样本点 x 发生时，事件 A 即发生.

因为样本空间 S 中任一样本点 x 发生时，必然事件 U 都发生，所以 U 是所有样本点构成的集合；这就是说，必然事件 U 就是样本空间 S. 今后我们就把必然事件记作 S.

由于样本空间 S 中任一样本点 x 发生时，不可能事件 V 都不发生，所以 V

不是任何样本点的集合;这就是说,不可能事件 V 是空集 $\varnothing$. 今后我们就把不可能事件记作 $\varnothing$.

应该指出,试验的任一样本点 x,也是随机事件,今后我们把试验的样本点称为**试验的基本事件**,显然,基本事件就是样本空间 S 的仅由单个样本点构成的子集.

综上所述,当一定的综合条件实现时,也就是在试验的结果中,所发生的现象叫做**事件**. 如果在每次试验的结果中,某事件一定发生,则这一事件叫做**必然事件**;相反地,如果某事件一定不发生,则叫做**不可能事件**. 在试验的结果中,可能发生、也可能不发生的事件叫做**随机事件**(偶然事件).

为了研究随机事件及其概率,我们还要说明事件之间的各种关系及运算.

正如 1.2 节中所指出的,任一随机事件都是样本空间的一个子集,所以事件之间的关系及运算与集合之间的关系及运算是完全类似的. 在下面的讨论中,我们叙述事件的关系及运算时所用的符号也是与集合的关系及运算的符号基本上一致的.

(1) 事件的包含关系

如果事件 A 的发生必然导致事件 B 的发生,则称**事件 B 包含事件 A**,或称事件 A 包含于事件 B,记作

$$B\supset A \text{ 或 } A\subset B$$

例如,在图 1-2 中,设事件 A 表示点随机地落在小圆内,事件 B 表示点随机地落在大圆内,则我们有 $A\subset B$.

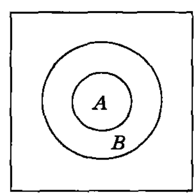


图 1-2　事件 $A\subset B$ 的关系图

事件的包含关系具有传递性:若 $A\subset B$,$B\subset C$,则 $A\subset C$.

(2) 事件的相等关系

如果事件 B 包含事件 A,且事件 A 包含事件 B,即

$$B\supset A \text{ 且 } A\subset B$$

也就是说,事件 A 与 B 中任一事件的发生必然导致另一事件的发生,则称事件 A 与事件 B 相等,记作

$$A=B$$

(3) 事件的交

$A\cap B$(也记作 AB)叫做事件 A 与事件 B 的交. 事件 $A\cap B$ 发生当且仅当事件 A 与 B 都发生(图 1-3).

显然,$AB\subset A$,$AB\subset B$,$A\cap A=A$

(4) 事件的并

$A\cup B$ 叫做事件 A 与事件 B 的并. 事件 $A\cup B$ 发生当且仅当事件 A 与 B 中至少有一事件发生(图 1-4). 特别当 $A\cap B=\varnothing$ 时, $A\cup B$ 也称为事件 A 与事件 B 的和, 并记作 $A+B$.

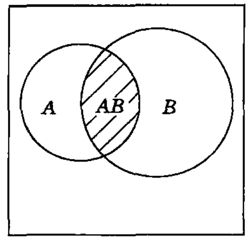


图 1-3 事件 $A\cap B$ 的关系图

事件的交和并的概念推广到有限多个或可列无限多个事件的情形, 分别记作

$$A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n=\bigcap_{k=1}^{n}A_k$$

$$A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n\cap\cdots=\bigcap_{k=1}^{\infty}A_k$$

$$A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n=\bigcup_{k=1}^{n}A_k$$

$$A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n\cup\cdots=\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k$$

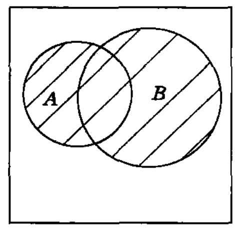


图 1-4 事件 $A\cup B$ 的关系图

(5) 互斥事件

如果二事件 A 与 B 中不能同时发生, 即

$$AB=\varnothing$$

则称二事件 A 与 B 是互不相容的(或互斥的).

通常把两个互不相容的事件 A 与 B 的并记作 $A+B$. 如果 n 个事件 A_1, A_2, $\cdots$, A_n 中任意两个事件不可能同时发生, 即

$$A_iA_j=\varnothing(1\leqslant i<j\leqslant n)$$

则称这 n 个事件是互不相容的(或互斥的).

通常把这样的 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的并记作

$$A_1+A_2+\cdots+A_n\text{(简记为 }\sum_{i=1}^{n}A_i\text{)}$$

(6) 对立事件

如果二事件 A 与 B 满足条件

$$A\cup B=S, AB=\varnothing$$

则称事件 A 与 B 互为对立事件, 记作 $B=\overline{A}$ 或 $A=\overline{B}$.

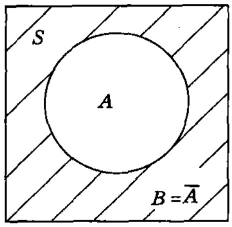
由此可知, 对于任意的事件 A, 我们有

$$\overline{\overline{A}}=A \tag{1.1}$$

$$A\overline{A}=\varnothing \tag{1.2}$$

$$A+\overline{A}=S \tag{1.3}$$

对立事件一定是互斥事件,但互斥事件不一定是对立事件(图 1-5).



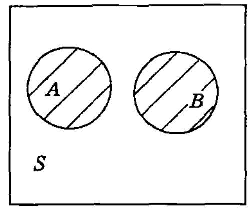


图 1-5

(1) A 与 B 互为对立事件,且 $B=\overline{A}$;(2) A 与 B 互斥,但非对立

(7) 事件的差

$A-B$ 称为 A 与 B 的差,$A-B$ 发生当且仅当 A 发生而 B 不发生(图 1-6).

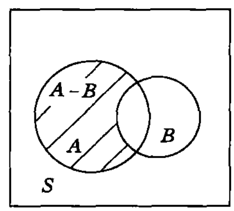


图 1-6　A 与 B 的差 $A-B$

对立事件可以用差来表示(图 1-5(1))

$$\overline{A}=S-A \tag{1.4}$$

A 与 B 的差又可表示为

$$A-B=A-AB=A\overline{B} \tag{1.5}$$

(8) 完备事件组

如果 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中至少有一个事件一定发生,即

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i=S$$

则称这 n 个事件构成完备事件组.

以后对我们特别重要的互不相容的完备事件组.设 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 满足下面的关系式:

$$\begin{cases} A_iA_j=\varnothing(1\leqslant i<j\leqslant n) \\ \sum\limits_{i=1}^{n}A_i=S \end{cases}$$

则称这 n 个事件构成互不相容的完备事件组.

与集合运算的性质类似,事件的运算具有下面的性质.对于任意的事件 A、B、C,有

(1) 交换律

$$A\cup B=B\cup A \tag{1.6}$$

$$AB=BA \tag{1.7}$$

(2) 结合律

$$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C) \tag{1.8}$$

$$(AB)C=A(BC) \tag{1.9}$$

(3) 分配律

$$A(B\cup C)=AB\cup AC \tag{1.10}$$

$$A\cup(BC)=(A\cup B)(A\cup C) \tag{1.11}$$

(4) 德·摩根(Augustus De Morgan)定律

$$\overline{A\cup B}=\overline{A}\,\overline{B} \tag{1.12}$$

$$\overline{AB}=\overline{A}\cup\overline{B} \tag{1.13}$$

这里,我们对德·摩根定律说明如下:

因为事件 $A\cup B$ 表示事件 A 与 B 中至少有一事件发生,它的对立事件显然就是 A 与 B 都不发生,即 $\overline{A}\,\overline{B}$,所以等式(1.12)成立.又因为事件 $\overline{A}\cup\overline{B}$ 表示事件 A 与 B 中至少有一个事件不发生,它的对立事件就是 A 与 B 不同时发生,即 $\overline{AB}$,所以等式(1.13)成立.

这一性质可以推广到更多个事件的情形.对于任意的 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$,有

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n}A_i}=\bigcap_{i=1}^{n}\overline{A_i} \tag{1.14}$$

$$\overline{\bigcap_{i=1}^{n}A_i}=\bigcup_{i=1}^{n}\overline{A_i} \tag{1.15}$$

由此可见,德·摩根定律表明:若干个事件的并的对立事件就是各个事件的对立事件的交,若干个事件的交的对立事件就是各个事件的对立事件的并.

在讨论实际问题时,往往需要考虑试验结果中各种可能的事件,而这些事件是相互关联的,研究事件之间的关系及运算,进而研究这些事件的概率之间的关系及运算,就能够利用简单的事件的概率去推算较复杂的事件的概率.为此,我们应当善于把某些复杂的事件表示为若干个简单的事件的并或交.要实现这一点,除了正确理解事件的关系及运算外,还必须对具体问题进行具体分析.下面我们来看几个例题.

例 1.8 在例 1 中,我们以 A 表示事件"第一次出现正面";B 表示事件"第二次出现正面";C 表示"至少出现一次正面",则 $C=A\cup B$. $AB=\{xx\}$则表示事件"两次都出现正面".以 D 表示事件"两次都出现反面",则 $D=\overline{C}=\overline{A}\,\overline{B}$,这里,$\overline{A}$ 表示"第一次出现反面",$\overline{A}=\{\overline{x}\,x,\overline{xx}\}$;$\overline{B}$ 表示"第二次出现反面",$\overline{B}=\{x\,\overline{x},\overline{xx}\}$.

例 1.9　检查产品质量时，从一批产品中任意抽取 5 件样品进行检查，则可能的结果是：未发现次品，发现 1 件次品，…，发现 5 件次品. 设事件 A_i 表示"发现 i 件次品"($i=0,1,2,3,4,5$)，显然事件 $A_0,A_1,\cdots,A_5$ 构成互不相容的完备组. 现在考虑一些较复杂的事件，并用 $A_0,A_1,\cdots,A_5$ 表示出来.

(1)"发现 2 件或 3 件次品"(设为事件 B)可以表示为

$$B=A_2+A_3$$

(2)"最多发现 2 件次品"(设为事件 C)可以表示为

$$C=A_0+A_1+A_2$$

(3)"至少发现 1 件次品"(设为事件 D)可以表示为

$$D=A_1+A_2+A_3+A_4+A_5$$

而事件 D 的对立事件就是"没有发现次品"，即

$$\overline{D}=A_0$$

例 1.10　如图 1-7 所示的电路中，设事件 A,B,C 分别表示继电器接点 a，b，c 闭合，事件 D 表示指示灯亮. 因为当且仅当接点 a 闭合，而接点 b 及 c 中至少有一个闭合时，指示灯亮，所以有

$$D=A(B\cup C)$$

反之，当且仅当"接点 a 不闭合"与"接点 b,c 都未闭合"二事件中至少有一事件发生时，指示灯不亮；所以有

$$\overline{D}=\overline{A}\cup(\overline{B}\,\overline{C})$$

显然，这个等式也可以由等式 $D=A(B\cup C)$，利用德·摩根定律得到. 事实上，有

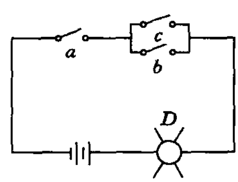


图 1-7　电路图

$$\begin{aligned}\overline{D}&=\overline{A(B\cup C)}=\overline{A}\cup(\overline{B\cup C})\\&=\overline{A}\cup(\overline{B}\,\overline{C})\end{aligned}$$

习题 1.1

1.1.1　袋中有 10 个球，分别写有号码 1～10，其中 1,2,3,4,5 号球为红球；6,7,8 号球为白球；9,10 号球为黑球. 设试验为：

(1) 从袋中任取一个球，观察其颜色；

(2) 从袋中任取一个球，观察其号码.

分别写出试验的样本空间，并指出样本空间中的基本事件是否是等可能的？

1.1.2　设一个工厂生产了 4 个零件，A_i 表示"生产的第 i($i=1,2,3,4$)个

零件是正品”. 试用 A_i 表示下列事件:

(1) 没有 1 个产品是次品;

(2) 至少有 1 个产品是次品;

(3) 只有 1 个产品是次品;

(4) 至少有 3 个产品是正品.

1.1.3 设 A_1,A_2,A_3 为 3 个事件,用 A_1,A_2,A_3 的运算关系表示下列各事件:

(1) A_1 发生,A_2 与 A_3 不发生;

(2) A_1 与 A_2 都发生,而 A_3 不发生;

(3) A_1,A_2,A_3 中至少 1 个发生;

(4) A_1,A_2,A_3 都发生;

(5) A_1,A_2,A_3 都不发生;

(6) A_1,A_2,A_3 中至少 2 个发生;

(7) A_1,A_2,A_3 中恰有 2 个发生.

1.1.4 设 $S=\{x|0\leqslant x\leqslant 2\}$,$A=\{x|1/2\leqslant x\leqslant 1\}$,$B=\{x|1/4\leqslant x\leqslant 3/2\}$,写出下列各事件:

(1) $\overline{A\cup B}$;(2) $\overline{A}\cup B$;(3) $\overline{AB}$;(4) $\overline{A}B$.

1.2 概率的定义

在生产实际中,我们经常需要了解一些随机事件发生的可能性大小. 例如,根据工厂中各部门的机器设备发生故障的可能性大小,可以合理地制订生产计划,适当地配备设备管理和维修人员. 又如,为了安排打字机或计算机键盘上每个字母键的位置,人们需要知道每个英文字母的使用率. 在概率论中,用来表示随机事件发生的可能性大小的数,称作**随机事件的概率**. 它是关于随机事件而定义的,常用 $P(A)$ 表示随机事件 A 的概率.

概率的背景是事件发生的频率,为了给出概率的定义,我们首先讨论随机事件的频率.

1.2.1 随机事件的频率

定义 1.1 设 A 是随机试验 E 的一个事件,将 E 重复进行 n 次,以 $N_n(A)$ 表示在这 n 次试验中事件 A 发生的次数,称比值

$$f_n(A)=\frac{N_n(A)}{n}$$

为这 n 次试验中事件 A 发生的频率(frequency).

可以看到，$f_n(A)$是 A 与 n 有关的一个数（由于事件 A 的随机性，它不是 n 的函数），它的值具有随机性，与已进行的试验有关.

对于大量的重复试验来说，随机试验的结果具有明显的统计规律性. 因此，一般来说，当 n 很大时，$f_n(A)$是趋于稳定的.

根据频率的定义，我们得出如下几个基本性质：

(1) 任意随机事件的频率是介于 0 与 1 之间的数，即

$$0 \leqslant f_n(A) \leqslant 1$$

(2) 必然事件的频率恒等于 1，即 $f_n(U)=1$.

(3) 不可能事件的频率恒等于 0，即 $f_n(V)=0$.

例 1.11 自某批产品中抽取 n 件产品，检验得正品数 $N_n(A)$及抽得正品的频率 $f_n(A)$如表 1-1 所示：

表 1-1 **某批产品中抽得正品频率表**

n	10	50	100	150	600	1 200	1 800	2 000
$N_n(A)$	7	46	81	131	516	1 026	1 531	1 701
$f_n(A)$	0.7	0.902	0.81	0.873	0.86	0.855	0.852	0.850 5

可以看到，$f_n(A)$总在数 0.85 上下摆动，并且逐渐靠近 0.85，普遍情况下也是这样. 由于受统计规律性的支配，$f_n(A)$总是在与 A 有关的某一个数上下摆动，并且随着 $n\to\infty$而趋近这个数.

由随机事件的频率的稳定性可以看出，随机事件发生的可能性可以用一个数来表示。这个刻画随机事件 A 在试验中发生的可能性大小的，介于 0 与 1 之间的数叫做随机事件 A 的概率，记作 $P(A)$. 概率的这个定义通常称为概率的统计定义.

相对于随机事件而言，概率是客观存在的一个数，它和所进行试验的次数无关. 事件 A 的概率越大，它在试验中出现的次数越多，从而它的频率 $f_n(A)$也较大；反之，若事件 A 出现的频率 $f_n(A)$较大，说明在一次试验中 A 发生的可能性也较大，从而 A 的概率也就越大. 频率稳定于概率的事实说明了随机现象中偶然性和必然性的辩证统一.

随机事件的频率和具有有限可加性.

定理 1.1 设 $A_1,A_2,\cdots,A_k$ 为两两互不相容的 k 个事件，则

$$f_n\left(\sum_{i=1}^{k} A_i\right) = \sum_{i=1}^{k} f_n(A_i) \tag{1.16}$$

证明 设在 n 次试验中，事件 $A_1,A_2,\cdots,A_k$ 发生的次数分别是 $N_n(A_1)$，

$N_n(A_2),\cdots,N_n(A_k)$，由于 $A_1,A_2,\cdots,A_k$ 两两互不相容，故事件 $\sum_{i=1}^{k}A_i$ 发生的次数为 $\sum_{i=1}^{k}N_n(A_i)$. 从而 $f_n(\sum_{i=1}^{k}A_i)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}N_n(A_i)=\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{n}N_n(A_i)=\sum_{i=1}^{k}f_n(A_i)$.

1.2.2 随机事件的概率

为了明确概率的真正含义，我们将介绍概率的古典定义与公理化定义.

1. 概率的古典定义和等可能概型

在叙述概率的古典定义之前，我们先介绍"事件的等可能性"的概念. 如果试验时，由于某种对称性条件，使得若干个随机事件中每一事件发生的可能性在客观上是完全相同的，则称这些事件是等可能的. 在许多实际问题中，我们所讨论的随机试验其样本空间中每个基本事件发生的可能性相同，这样的随机试验叫做**等可能概型**. 等可能概型在概率论的研究中占有重要的地位，一方面，由于它简单直观，对它的讨论有助于我们直观地理解概率论中的许多基本概念；另一方面，等可能概型随机事件的概率的计算方法在许多实际问题中也具有重要的应用价值.

如果 E 是一个等可能概型，且它的样本空间 S 只有有限个样本点，则称 E 为**古典概型**.

例如，任意抛掷一枚钱币，"徽花向上"与"字向上"这两个事件发生的可能性在客观上是相同的，也就是等可能的；又如，抽样检查产品质量时，一批产品中每个产品被抽到的可能性在客观上是相同的，因而抽到任一产品是等可能的.

现在我们叙述概率的古典定义：

设试验的样本空间总共有 N 个等可能的基本事件，其中有且仅有 M 个基本事件是包含于随机事件 A 的，则随机事件 A 所包含的基本事件数 M 与基本事件的总数 N 的比值叫做随机事件 A 的概率，记作 $P(A)$

$$P(\mathrm{A})=\frac{M}{N}$$

例 1.12 从 0,1,2,…,9 十个数字中任取一个数字，求取得奇数数字的概率.

解 基本事件的总数 $N=10$，设事件 A 表示取得奇数数字，则它所包含的基本事件数 $M=5$. 因此，所求的概率

$$P(A)=\frac{5}{10}=0.5$$

例 1.13 袋内有 3 个白球与 2 个黑球，求从其中任取 2 个球是白球的概率.

解 设事件 A 表示取出的 2 个球都是白球，我们来计算事件 A 的概率. 由