

Geometric Transformations and Their Applications



数学·统计学系列

几何变换与几何证题

萧振纲 著



哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS



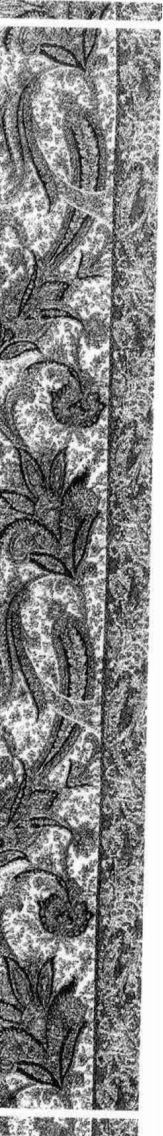
数学·统计学系列

Geometric Transformations and Their Applications

几何变换与几何证题



哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS



内 容 简 介

本书所研究的几何变换仅限于平面上的合同变换、相似变换和反演变换这三类初等几何变换;本书系统地阐述了这三类几何变换的理论和它们在几何证题方面的应用.阅读本书只需要具有中学数学知识即可;对于阅读几何变换理论有困难的读者,也可以只阅读与几何证题有关的章节.

本书适合大中师生及数学爱好者使用.

图书在版编目(CIP)数据

几何变换与几何证题/萧振纲著. —哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2010.2

ISBN 978 - 7 - 5603 - 2995 - 6

I . ①几… II . ①萧… III . ①平面几何 IV . ①O123.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 023874 号

策划编辑 刘培杰
责任编辑 张永芹
封面设计 孙茵艾
出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006
传 真 0451 - 86414749
网 址 <http://hitpress.hit.edu.cn>
印 刷 哈尔滨市石桥印务有限公司
开 本 787mm × 1092mm 1/16 印张 48.25 字数 860 千字
版 次 2010 年 5 月第 1 版 2010 年 5 月第 1 次印刷
书 号 ISBN 978 - 7 - 5603 - 2995 - 6
印 数 1 ~ 3 000 册
定 价 88.00 元

(如因印装质量问题影响阅读,我社负责调换)

◎ 第一版前言

自公元前3世纪古希腊数学家欧几里得(Euclid, 公元前330?—275?)的《几何原本》问世以来,平面几何即作为数学的一个分支而存在于世。由于平面几何有其鲜明的直觉与严谨、精确、简明的语言,并且经常出现一些极具挑战性的问题,因而这一古老的数学分支一直保持着青春的活力,以极具魅力的姿态展现在人们面前,备受人们的青睐。世界各国无不将平面几何作为培养本国公民的逻辑思维能力、空间想象能力和推理论证能力的首选题材。由匈牙利于1894年首开先河的国内外各级数学竞赛(数学奥林匹克)活动更是将平面几何作为常规的竞赛内容,并且从1959年开始举办的每年一届(1980年因特殊原因中断了一次)的国际中学生数学竞赛(通称国际数学奥林匹克)中,在同一届出现两道平面几何题的情形已屡见不鲜。

但是,传统的平面几何都是采用公理化方法处理的,这种方法将平面图形视作静止的图形,其优点是便于掌握几何图形本身的内在规律。但用这种静止的观点研究平面几何的一个最大缺陷是:难以发现不同几何事实之间的联系。在这种观点下,面对一个平面几何问题,人们就难以找到解决问题的关键——辅助线。于是就难以沟通从条件到结论的逻辑关系;于是便有“几何几何,想破脑壳”之说,导致许多学生视数学为畏途,一生望“数学”兴叹;于是便有许多参加数学竞赛的优秀选手在平面几何题面前败北,留下一声叹息与几多遗憾……

唯物辩证法告诉我们,事物都是运动的,绝对静止的事物是不存在的。欲深刻揭示客观事物之间的联系,掌握运动的事物的空间形式最本质的东西——在运动中始终保持不变的性质,仅用静止的观点是远远不够的,必须动静结合,用运动、变化的观点来研究客观事物的运动形式和变化规律。就平面几何而言,按照德国数学家克莱因(F. Klein, 1849—1925)于1872年提出的观点,平面几何是研究平面图形在运动、变化过程中的不变性质和不变量的科学。

几何变换作为一种现代数学思想方法,正是采用运动、变化的观点来研究平面几何的。面对一个平面几何问题,几何变换往往能有效地帮助我们找准辅助线,从而顺利地实现由条件到结论的逻辑沟通。

作者是于1986年开始接触几何变换这一课题的。几何变换到底有哪些方面的应用?怎样理解几何变换在几何证题方面的应用?怎样用几何变换处理传统的平面几何问题?面对一个平面几何问题,该用哪一个几何变换处理?这一系列的问题在以往的一些平面几何著作(包括一些经典名著)中都少有论及,从而形成了理论上的一个空白。从那时起,作者即开始思考、研究这些问题。十几年过去,将勤补拙,终有所得,于是就形成了本书。可以说,本书是作者十几年来在几何变换方面研究成果的一次集中展示。

事实证明,几何变换是处理平面几何问题的一个相当得力的工具。较之传统方法所不同的是,它不是从结论入手,而是反过来从条件入手,先抓住图形的某一几何特征(如平行四边形、正三角形、等腰三角形、正方形、圆、中点等等)实施某个几何变换。有的看似较难的平面几何问题,通过一个几何变换,其结论便一目了然。因为实施某个几何变换后,只要找出已知图形上的某些元素(点、线段、直线等等)的对应元素,则原来的几何图形即重新改组,原来分散的条件即相对集中,从而达到化繁为简、化难为易的效果。在几何变换下,传统的作辅助线已被“作已知图形上的某些元素的对应元素”取而代之,而这已是易如反掌之事。也就是说,传统的那种苦思冥想,“想破脑壳”的辅助线,在几何变换的帮助下,已是“得来全不费工夫”。这就大大地缩短了我们处理平面几何问题的思维过程。当然,如果将几何变换与传统的思想方法有机地结合在一起,则效果更佳。这在本书中已经体现出来。

本书所研究的几何变换仅限于平面上的合同变换、相似变换和反演变换这三类初等几何变换。书中系统地阐述了这三类几何变换的理论和它们在几何证题方面的应用。在第1章还介绍了群和变换群的概念与有向角的基本知识。书中用到了向量与方向线段的基本知识。由于向量和方向线段现都已列入中学数学必修内容,因此,阅读本书只需要具有中学数学知识即可。对于阅读几何变换的理论有困难的读者,也可以只阅读与几何证题有关的章节。

考虑到用几何变换处理轨迹和作图问题在其他一些平面几何著作中已有

论及,所以,本书侧重于几何变换在几何证题(包括解题)方面的应用。所选例题大多数是国内外各级数学竞赛中所出现的竞赛题和平面几何中的一些历史名题。有的例题还在不同的章节针对不同的几何特征、用不同的几何变换给出了多种证(解)法。为便于读者掌握几何变换的理论和方法,每节都有针对性地配备了练习题,每章末都配有一定数量的习题。从整体上来说,习题比练习题要难一些。有不少例题、练习题和习题属于首次面世的作者自编题。书末安排了习题提示。

在本书的写作过程中,挚友沈文选教授、冷岗松教授、陈冬贵教授以及张志华、谈秀山、刘华富、张国新、胡国华等诸君提出了不少有价值的建议。这些建议都已融于本书之中,使本书增色不少。王安斌教授为作者提供了难觅的参考文献[5]。值本书出版之际,作者谨向他们表示衷心的感谢;作者还感谢妻子卢晓宁、胞妹萧必红和同事钟兴永教授,她(他)们给予了作者莫大的鼓励和各方面的大力支持与帮助;作者还感谢老师李求来教授在百忙中阅读本书样稿,并乐于为序,使本书又增一色。除书末已列出的参考文献外,本书还选用了一些在《数学通报》、《数学通讯》、《数学教学》、《上海中学数学》、《中等数学》等杂志开办的问题征解栏目中发表的平面几何问题。在此对这些题目的作者一并表示感谢。

疏漏之处在所难免,敬请读者不吝指正。

萧振纲
2003年4月

注:修订版取消了每小节的练习题.

◎ 第一版序言

《几何变换与几何证题》这本书的书名真是一目了然。顾名思义,本书的内容自然是讲几何变换的理论,以及如何运用几何变换的思想方法来证几何题了。

用变换的观点来看待几何,乃是德国数学家克莱因(F. Klein)的首创。1872年,克莱因在题为《近代几何研究的比较评述》的演说中,第一次阐述了这种观点。他认为,每种几何都由变换群所刻画,并且每种几何所要做的实际就是在这个变换群下考虑其不变量。在此定义下相应于给定变换群的几何的所有定理仍然是子群几何中的定理。克莱因的这一观点后来以 Erlangen 纲领之称闻名于世(美 M. 克莱因著《古今数学思想》第3册 P.341)。

克莱因的观点不仅对几何学的分类研究有巨大的贡献,而且对数学教育产生了重大影响。1908年,他出版了名著《高观点下的初等数学》。强调用近代数学观点来改造传统的中学数学内容,主张加强函数和微积分的教学,改革和充实代数内容,用几何变换观点改造传统几何内容。就在这一年,国际数学教育委员会成立,克莱因任主席,他的上述观点成为改革传统中学数学内容的主导思想之一。自此以后,一些国家的中学几何课程采纳了几何变换这一指导思想。遗憾的是,我国的中学几何课本,直至2000年前,依然是传统的欧氏几何体系,丝毫不见几何变换踪影。可喜的是,在最近颁布的《全日制义务教育数学课

程标准》(实验稿)中,改变了陈旧的传统几何体系,认可并贯彻了克莱因的几何变换思想。我认为,这种变更尽管来得晚了一点,毕竟还是值得庆贺和赞赏。

与长期以来基础教育的几何内容观念陈旧形成鲜明对照的是:我国中学生数学竞赛的培训内容却紧紧地跟上了国际潮流。多年来,我国中学生参加国际数学奥林匹克均取得了十分优异的成绩,令世人瞩目。为什么我国参赛选手的成绩这么突出,而且能久盛不衰?原因当然是多方面的。其中,培训内容摆脱传统数学课程体系,用近代、现代数学思想方法重新处理中学数学,应该是有效措施之一。拿平面几何来说,竞赛培训历来就重视几何变换的思想方法,学生掌握了这一思想方法,处理几何问题的能力自然会大有提高。

以上表明,几何变换无论在基础教育的数学课程中,还是在数学尖子学生的培训中,都是极为重要的思想方法。对这一数学思想方法本身及其教育作用作深入、系统的研究,其必要性和价值是显然的。

《几何变换与几何证题》的著作者萧振纲同志 1982年毕业于湖南师范大学数学系。在校期间品学兼优,对初等数学尤有浓厚的兴趣。参加工作后,一直致力于初等数学及其教学的研究,其中,对初等几何的研究更是情有独钟。研究初等几何,自然离不开几何变换这一核心思想。十几年来,他在这方面的研究已经硕果累累,先后发表过大量文章,本书正是作者在这一领域所获成果的集成。

我粗略地通读了《几何变换与几何证题》的样稿,受益良多。我以为,本书至少有以下两大特色:

第一,理论系统,应用全面。介绍几何变换或运用几何变换方法证明几何题的书,我读过一些,也写过一点。相比之下,《几何变换与几何证题》一书对几何变换理论阐述最为细微、系统,对如何运用几何变换的思想方法证明平面几何问题,思考最周到、全面,涉及的问题也最广泛。

第二,举例典型,解法精妙。《几何变换与几何证题》一书中的例题大多选自国内外各级数学竞赛试题或平面几何历史名题,这些题历经锤炼,极具典型性。它们的解法一般不是唯一的,有多种方法,多条途径。本书专从几何变换的角度思考,给出的解法特别精妙。读者阅读这些题的解题过程,从中可以受到很好的启迪:面对一个几何题,应该怎样根据题中提供的显性或隐性信息,去思考能否从几何变换的角度来处理,进而考虑该用何种几何变换处理才能见效。

本书作为数学教育领域里的一本新著,我认为是很有意义的。首先,前面提到的我国新的义务教育数学课程标准已经公布,按课程标准编写出的新教材正在全国各地实验,估计不久即将由实验课程变为全面实施的课程。“几何变

换”是新标准中采用的近代和现代数学思想方法之一,对此,处在教学第一线的中学数学教师未必都十分熟悉。本书的出版正好为那些想系统学习这一数学思想方法的教师提供了合适的读本。其次,数学奥林匹克的培训工作也需要不断补充和更新资料,本书的出版相信在这方面也能作出其应有的贡献。本书面世后,期待着广大读者的关爱。

李求来

2003年3月28日于岳麓山下

◎ 修订版前言

当《几何变换与几何证题》的修订稿在键盘上用笨拙的手指借助《现代汉语词典》敲完最后一个字时，心中终于松了一口气，如释重负，感觉完成了人生中的一件大事。将修订稿清样校对了一遍寄给出版社后，又觉余意未尽，还想说上几句。

拙著《几何变换与几何证题》初版于2003年。当时捧着散发出油墨清香的自己写的书，那种兴奋是无法用语言形容的，正如母亲望着自己已经十月怀胎后呱呱坠地的孩子，喜悦之情溢于言表。拙著面世后得到了不少平面几何爱好者的肯定，也得到许多准备参加数学竞赛的中学生以及他们的教练的认可。因为《几何变换与几何证题》初版未通过新华书店发行，一些学生或家长便想方设法通过各种途径联系到本人，或发e-mail，或打电话向本人邮购。更多的中学生则通过互联网发帖或给本人发短信邮购。这些使我倍感欣慰。

然而，随着时间的推移，自己读自己写的书却越读越不满意。——逻辑体系稍显紊乱，个别内容过于单薄，有些例子与内容不太匹配。有些例子本来有比较简单的传统解答，用几何变换方法处理反而显得复杂冗繁，这不仅不能充分地体现几何变换在处理平面几何问题时的优势，而且还有“为赋新词强说愁”之嫌，实在有损几何变换的“光辉”形象。当然，也还存在着大量文字或符号上的讹错。因此，“修订”二字早已在胸中涌动。

2005年11月在上海参加第二届全国数学奥林匹克研究学术会议期间，适遇哈尔滨工业大学出版社刘培杰先生。刘先生希望将拙著修订以后在他那里出版。这无疑说明拙著还存在不少问题，应尽早修订再版。这恰与本人的想法不谋而合，真是这边有人修渠，那边有人放水，水到渠成。自此，“修订”工作摆上本人的议事日程，并开始付诸行动。

修订工作历时四年，也是一波三折。逻辑体系的考虑，例题的充实和选择，总是反反复复，难以定夺。有时一个例题要花几周的时间才能最后敲定。

修订版基本上保持初版的风格，但在体系上做了较大的变动。相似变换的理论由初版的第四章变为修订版的第二章，初版的第二章变为修订版的第三章和第四章，初版的第五章变为修订版的第六章和第七章。初版第四章“两圆的相似”一节的内容在修订版中安插到第六章和第七章之中。除充实丰富了几何变换的理论部分，修订版还增添或替换了不少例题和习题，以便更能彰显几何变换的优势。在反演变换一章中，修订版增加了“平面几何命题的反演命题”一节，以帮助读者更好地理解不同平面几何命题之间的关系。修订版去掉了初版在每小节安排的练习，只在每章末安排一定数量的习题，并且在书末给出了所有习题的详细解答。另外，还增添了“点对圆的幂·根轴·根心”和“Menelaus 定理与 Ceva 定理的角元形式”两个附录。

怎样利用几何变换处理传统的平面几何问题？这在理论方面还不尽完善。尽管修订版在这方面作了进一步的努力，但遗憾的是，对于怎样利用位似轴反射变换处理传统平面几何问题，这方面的例子仍显得一题难求，只好委屈地将它与位似旋转变换混放在一起。按理说，位似轴反射变换与位似旋转变换在相似系数不等于1的相似变换中应各占半壁江山，但目前利用这两种变换处理传统平面几何问题方面的差别似乎太大。希望有更多的平面几何爱好者来一起加强这方面的研究，以缩小或消除这种差别。

本书初版出版后，湖北《中学数学》杂志在第一时间免费刊登了出版消息。中国不等式研究小组网站(<http://www.irgoc.org/>)，奥数之家网站(<http://www.aoshoo.com/bbs1/index.asp>)也相继刊登了出版消息。他们为广泛宣传本书起到了十分重要的作用。另外，在本书修订期间，得到了许多认识和不认识的朋友的关心。他们或通过电话，或通过短信，或通过网络等各种不同的通信方式询问修订工作的进展。特别是湖南沅江的平面几何爱好者万喜人先生慷慨地将自己未出版的手写书稿送给本人作为修订的参考，令人十分感动。未曾谋面的上海网友 frankvista (本书修订期间他还是一位初中学生)经常通过 e-mail 向本人提供一些用几何变换处理的例子，包括其精彩的解答以及他自己所编拟的例题，感动之余更觉后生可畏。值此修订版出版之际，特向这些杂志、

网站以及所有关心本书修订工作的朋友们表示衷心的感谢。同时还感谢数学竞赛国际社区网站(<http://www.mathlinks.ro/>), 本书的修订在这个网站遴选了许多不可多得的好范例。

文章千古事, 得失寸心知。尽管作者在修订过程中力求不再出现问题或疏漏, 但修订版中疏漏和不足肯定还会存在, 祈望读者不吝指正(e-mail: xiaozg@163.com)。

萧振纲

2009年8月4日于湖南理工学院

本书常用符号说明

- (1) $F \stackrel{G}{\sim} F'$ —— 图形 F 与 F' 关于变换群 G 等价
- (2) $F \cong F'$ —— 图形 F 与 F' 是合同的
- (3) \sphericalangle —— 有向角(始边为射线 OA , 终边为射线 OB 的有向角记为 $\sphericalangle AOB$)
- (4) $F \sim F'$ —— 图形 F 与 F' 相似
- (5) $F \overset{\circ}{\sim} F'$ —— 图形 F 与 F' 真正相似
- (6) $F \overset{\circ}{\sim} F'$ —— 图形 F 与 F' 镜像相似
- (7) \square —— 平行四边形
- (8) \perp —— 垂直且相等
- (9) \parallel —— 平行且相等

第1章 合同变换 //1

- 1.1 映射·变换·变换群 //1
- 1.2 合同变换及其性质 //6
- 1.3 三种基本合同变换——平移、旋转、轴反射 //13
- 1.4 合同变换与基本合同变换的关系 //26
- 1.5 自对称图形 //36
- 习题1 //46

第2章 相似变换 //49

- 2.1 相似变换及其性质 //49
- 2.2 基本相似变换——位似变换 //56
- 2.3 位似旋转变换 //62
- 2.4 位似轴反射变换 //72
- 2.5 三相似图形 //78
- 习题2 //89

第3章 平移变换与几何证题 //96

- 3.1 平行四边形与平移变换 //97
- 3.2 共线相等线段与平移变换 //102
- 3.3 一般相等线段与平移变换 //107
- 3.4 平行与平移变换 //114
- 3.5 线段比及其他与平移变换 //123
- 习题3 //133

第4章 旋转变换与几何证题 //139

- 4.1 中点与中心反射变换 //139
- 4.2 平行四边形及其他与中心反射变换 //146
- 4.3 正三角形与旋转变换 //155
- 4.4 正方形、等腰直角三角形与旋转变换 //164
- 4.5 等腰三角形、相等线段与旋转变换 //173
- 4.6 三角形的连接与旋转变换之积 //181
- 习题4 //192

第5章 轴反射变换与几何证题 //202

- 5.1 轴对称图形与轴反射变换 //202
- 5.2 角平分线与轴反射变换 //209
- 5.3 垂直与轴反射变换 //216
- 5.4 圆与轴反射变换 //223
- 5.5 圆内接四边形的两个基本性质 //231
- 5.6 30° 的角与轴反射变换 //241
- 5.7 两类几何不等式与轴反射变换 //250
- 5.8 轴反射变换处理其他问题举例 //260
- 习题5 //270

第6章 位似变换与几何证题 //283

- 6.1 线段比与位似变换 //283
- 6.2 共点线、共线点与位似变换 //292

- 6.3 Menelaus 定理与 Ceva 定理 //300
- 6.4 两圆与位似变换 //309
- 6.5 平行及其他与位似变换 //320
- 习题 6 //328

第 7 章 位似旋转变换、位似轴反射变换与几何证题 //341

- 7.1 三角形与位似旋转变换 //341
- 7.2 同向相似三角形与位似旋转变换 //349
- 7.3 两圆与位似旋转变换 //357
- 7.4 等角线及其他与位似旋转变换 //365
- 7.5 三角形的连接与位似旋转变换之积 //372
- 7.6 位似轴反射变换与几何证题 //384
- 习题 7 //392

第 8 章 反演变换 //404

- 8.1 反演变换及其性质 //404
- 8.2 线段度量关系与反演变换 //413
- 8.3 圆与反演变换 //421
- 8.4 两圆的互反性 //430
- 8.5 几何命题的反演命题 //439
- 8.6 极点与极线 //450
- 习题 8 //457

附录 //468

- 附录 A 点对圆的幂·根轴·根心 //468
- 附录 B Menelaus 定理与 Ceva 定理的角元形式 //491

参考解答 //520

参考文献 //741

编辑手记 //745

合同变换

第 1 章

图形的“全等”是平面几何中的一个十分重要的概念. 我们通常是利用“完全重合”来定义全等图形的: 能够完全重合的两个图形叫做全等图形. 这实际上是承认了平面图形是可“搬动”的, 并且在“搬动”的前后, 图形的大小和形状都保持不变, 只改变了图形的位置. 其本质属性是图形在“搬动”的前后, 图形上任意两点的距离都保持不变. 这就是本章所要研究的几何变换——合同变换.

本章首先将简单地介绍与几何变换有关的一些基本概念, 然后系统地研究平面的一般合同变换和三种基本的合同变换——平移、旋转、轴反射, 并揭示一般合同变换与三种基本合同变换之间的关系.

1.1 映射·变换·变换群

先给出与几何变换有关的一些基本概念.

一、映射

定义 1.1.1 设 A, B 是两个非空集合. 如果按照某个对应法则 f , 使得对于 A 中的每一个元素 a , 在 B 中都有唯一的一个元素 b 与之对应, 则称 f 是 A 到 B 的一个映射. 记作 $f: A \rightarrow B$ 或