全国教育科学“十一五”规划课题研究成果

线性代数

◎ 主　编 王希云
◎ 副主编 张杰明　李秀兰

高等教育出版社

线性代数

全国教育科学“十一五”规划课题研究成果

线性代数

Xianxing Daishu

主　编　王希云
副主编　张杰明　李秀兰

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS　BEIJING

内容简介

本书系统地介绍了线性代数的基本概念和理论。全书共7章，包括行列式、矩阵、向量、线性方程组、方阵的特征值与特征向量、二次型、线性空间与线性变换等内容。书末附录中简要介绍了MATLAB，并汇编了2003年以来全国硕士研究生入学统一考试中线性代数的部分试题。

本书内容丰富，阐述深入浅出，简明扼要，可作为高等学校非数学类专业线性代数的教材、教学参考书及考研复习用书。

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/王希云主编．—北京：高等教育出版社，2010．1

ISBN 978－7－04－028565－9

Ⅰ．①线…　Ⅱ．①王…　Ⅲ．①线性代数－高等学校－教材　Ⅳ．①O151．2

中国版本图书馆CIP数据核字(2010)第001436号

策划编辑　于丽娜　　责任编辑　于丽娜　　封面设计　张申申
责任绘图　尹文军　　版式设计　余　杨　　责任校对　王效珍
责任印制　尤　静

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010－58581118
社　　址	北京市西城区德外大街4号	咨询电话	400－810－0598
邮政编码	100120	网　　址	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010－58581000		http://www.hep.com.cn
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司	网上订购	http://www.landraco.com
			http://www.landraco.com.cn
印　　刷	北京铭成印刷有限公司	畅想教育	http://www.widedu.com
开　　本	787×960　1/16	版　　次	2010年1月第1版
印　　张	15.75	印　　次	2010年1月第1次印刷
字　　数	290 000	定　　价	17.40元

物料号　28565－00

前　言

线性代数是大学数学教学中的一门重要基础课程，是学习和掌握其他数学学科及科学技术的基础，其主要内容是讲述线性空间理论和矩阵理论，主要处理线性关系问题。随着数学学科的发展，线性代数的含义也在不断扩大，它的理论不仅渗透到了数学的许多分支中，而且在理论物理、理论化学、工程技术、国民经济、生物技术、航天、航海等领域中都有着广泛的应用。

本书以教育部高等学校数学与统计学教学指导委员会关于工科类与经济管理类本科数学基础课程教学基本要求为依据，结合编者多年的教学经验编写而成。在编写过程中，借鉴了国内外许多优秀教材的思想和处理方法，内容上突出精选够用，表达上力求通俗易懂。根据非数学类专业学生的需要，以线性变换作为贯穿全书的主线，使线性方法得以充分体现，同时有利于学生理解线性代数课程的基本概念和基本原理。在概念的引入、理论分析和例题演算等环节上尽可能多地反映代数与实际结合的思想，这样可以使学生从实际背景中理解代数概念的来龙去脉，并获得解决问题的启示。本书重视例题和习题的设计与选配，除了在每一节后选配巩固课程内容的基本习题外，每章结束后还选配了总练习题。

全书共分7章，各章内容紧密联系又相对独立。全书系统地介绍了行列式、矩阵、向量空间、线性方程组的基础知识，论述了方阵的特征值与特征向量、方阵的对角化和实二次型的化简等问题，讨论了线性空间与线性变换的相关内容。

本书的各章内容编排与现行的全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲相一致，其中前6章内容覆盖了数学一、数学二、数学三关于线性代数的考试要求。

鉴于信息技术的飞速发展及软件的广泛应用，本书在附录1中对MATLAB作了简要介绍，为了提高学生数值计算和应用计算机的能力，通过实际计算加深对所学内容的理解，各章(除第7章外)都给出了用MATLAB进行数学实验的习题；为了使有志于攻读硕士研究生的读者能在学习过程中作适当准备，且使读者了解线性代数课程的基本要求和重点，本书在每章末给出了该章的基本要求，并与考研大纲的基本要求相一致，同时在附录2中汇编了2003年以来硕士研究生入学考试中线性代数的部分试题。

本书由王希云任主编，负责审阅全文。第1章由张杰明编写，第2章由李秀兰编写，第3章由燕建梁编写，第4章由王希云编写，第5章由刘瑞芳编

写，第 6 章、附录及数学实验由王欣洁编写，第 7 章由董安强编写。

本书可作为高等学校工科、理科（非数学类专业）与经济管理学科线性代数课程的教材，也可供报考硕士研究生的人员及工程技术人员参考。考虑到各类专业与各类人员的不同要求，对书中某些章节，不同专业可根据不同情况予以取舍（标注 * 的部分可舍去）。

本书在编写过程中得到了高等教育出版社、太原科技大学有关领导及太原科技大学印刷厂同志们的大力支持，太原科技大学数学系的老师们对本书提出了许多建设性的意见。编者在此向他们表示衷心的感谢！

由于时间仓促，加之编者水平有限，书中内容、体系、结构不当之处在所难免，恳请读者和使用本教材的老师不吝赐教。

编　者

2009 年 6 月

郑重声明

目　录

第1章　行　列　式

行列式理论是线性代数的重要组成部分，是研究线性方程组的重要工具. 它不仅在数学中有广泛的应用，而且在物理学、力学等其他学科的研究中也经常用到. 特别是在本门课程中，它是研究线性方程组、矩阵及向量组的线性相关性的一种重要工具.

本章首先以二元和三元线性方程组的求解为背景引进行列式的概念，然后介绍行列式的一些基本性质和计算方法，最后给出利用行列式求解线性方程组的方法——克拉默(Cramer)法则.

1.1　n 阶行列式的定义

行列式的概念起源于求解线性方程组. 所谓线性方程组是指未知数的最高次数是一次的方程组. 为此我们回顾初等代数中二、三元线性方程组的求解过程，从中引出二、三阶行列式的概念，然后把这些概念推广，得到 n 阶行列式的定义.

1.1.1　二元线性方程组与二阶行列式

设二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \tag{1.1}$$

当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时，用消元法求解，得其解为

$$x_1 = \frac{b_1 a_{22} - a_{12} b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}},\ x_2 = \frac{a_{11}b_2 - b_1 a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \tag{1.2}$$

在式(1.2)中，其各自的分母由方程组(1.1)中未知数的系数构成，把这4个系数按它们在方程组(1.1)中的位置，排成两行两列(横排称行,竖排称列)的数表:

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix}$$

引入记号 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ 表示 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$，称为二阶行列式，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \tag{1.3}$$

其中 $a_{ij}(i,j=1,2)$ 称为二阶行列式的**元素**. 元素 a_{ij} 的第一个下标 i 称为**行标**，表明该元素位于第 i 行；第二个下标 j 称为**列标**，表明该元素位于第 j 列.

上述二阶行列式的定义，可用**对角线法则**来记忆．如图 1.1，把 a_{11} 到 a_{22} 的实连线称为**主对角线**，a_{12} 到 a_{21} 的虚连线称为**副对角线**. 于是二阶行列式便是主对角线上两元素之积减去副对角线上两元素之积所得的差.

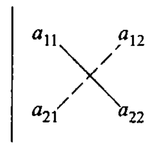

图 1.1

利用二阶行列式的概念，式(1.2)的分子也可以写成二阶行列式，即

$$b_1a_{22} - a_{12}b_2 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix},\quad a_{11}b_2 - b_1a_{21} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

若记

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},\quad D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix},\quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

则式(1.2)可以表示为

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}},\quad x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

上式为二元线性方程组(1.1)的求解公式，其中 D 是由方程组(1.1)的系数所确定的二阶行列式，称 D 为方程组的**系数行列式**. x_1 的分子 D_1 是用方程组(1.1)的右端 b_1，b_2 替换 D 中的第一列 a_{11}，a_{21} 所得的二阶行列式．x_2 的分子 D_2 是用方程组(1.1)的右端 b_1，b_2 替换 D 中的第二列 a_{12}，a_{22} 所得的二阶行列式．

例 1 求解二元线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 3 \\ 2x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$$

解 由于 $D = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1-(-4) = 5 \neq 0$，所以方程组有解，而

$$D_1 = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3-(-2) = 5,\quad D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1-6 = -5$$

因此方程组的解为

$$x_1=\frac{D_1}{D}=1,\ x_2=\frac{D_2}{D}=-1$$

1.1.2 三元线性方程组与三阶行列式

为求解三元线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2\\a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3\end{cases}\tag{1.4}$$

记

$$D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}$$

$$D_1=\begin{vmatrix}b_1&a_{12}&a_{13}\\b_2&a_{22}&a_{23}\\b_3&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix},\ D_2=\begin{vmatrix}a_{11}&b_1&a_{13}\\a_{21}&b_2&a_{23}\\a_{31}&b_3&a_{33}\end{vmatrix},\ D_3=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&b_1\\a_{21}&a_{22}&b_2\\a_{31}&a_{32}&b_3\end{vmatrix}$$

类似于二元线性方程组，当 $D\neq 0$ 时，方程组(1.4)的解可表示为

$$x_1=\frac{D_1}{D},\ x_2=\frac{D_2}{D},\ x_3=\frac{D_3}{D}\tag{1.5}$$

其中

$$D=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}$$

D 称为**三阶行列式**，等式右端称为三阶行列式的展开式.

上述三阶行列式的定义可按图 1.2 的**对角线法则**来记忆. 其遵循的规律为：三条实线看作是平行于主对角线的连线，实线上连结的三个元素的乘积取正号；三条虚线看作是平行于副对角线的连线，虚线上连结的三个元素的乘积取负号；然后取这六项之和即为三阶行列式 D 的值. 类似可用对角线法则求 D_1，D_2，D_3 的值. 由方程组(1.4)的系数构成的行列式 D 称为方程组(1.4)的**系数行列式**.

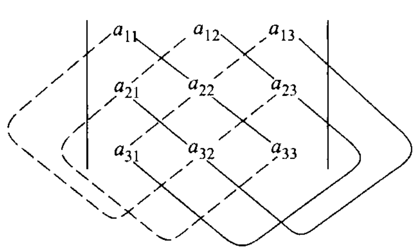

图 1.2

例 2 求解三元线性方程组

$$\begin{cases}2x_1+x_3=1\\x_1-4x_2-x_3=0\\-x_1+8x_2+3x_3=0\end{cases}$$

解　系数行列式

$$D=\begin{vmatrix}2&0&1\\1&-4&-1\\-1&8&3\end{vmatrix}$$

按照对角线法则，得

$$D=-24+8-4+16=-4$$

同理 $D_1=\begin{vmatrix}1&0&1\\0&-4&-1\\0&8&3\end{vmatrix}=-4$，$D_2=\begin{vmatrix}2&1&1\\1&0&-1\\-1&0&3\end{vmatrix}=-2$，$D_3=\begin{vmatrix}2&0&1\\1&-4&0\\-1&8&0\end{vmatrix}=4$

因此方程组的解为 $x_1=\dfrac{D_1}{D}=1$，$x_2=\dfrac{D_2}{D}=\dfrac{1}{2}$，$x_3=\dfrac{D_3}{D}=-1$.

在实际问题中，往往会遇到未知数多于三个的线性方程组．那么对于四元及四元以上的线性方程组是否有类似的结果？其相应的行列式如何定义？

四元及四元以上的线性方程组的解仍有类似(1.5)的形式，但四阶及四阶以上的行列式不能利用对角线法则求．对角线法则仅适用于二阶与三阶行列式，为了研究四阶及四阶以上行列式的定义与计算，下面先介绍排列的有关知识，然后引入 n 阶行列式的概念．

1.1.3　全排列及其逆序数

n 个不同的元素排成一列，称为这 n 个元素的**全排列**(简称排列)．n 个不同元素的所有排列的个数，通常用 P_n 表示．

例 3　写出元素 1，2，3 的所有全排列．

解　三个元素 1，2，3 的全排列的种数 $P_3=3!=6$，其全排列依次为 123，132，213，231，312，321．

在上面的全排列中，除了 123 是按自然顺序排列以外，其他排列中都可找到一个大数排在一个小数前面的情况，这样的排列顺序与自然顺序相反．例如，在排列 132 中，3 排在 2 的前面；在排列 321 中，2 排在 1 的前面，3 排在 1 和 2 的前面．一般地，在一个排列中，若一个大数排在一个小数之前，就称这两个数构成一个**逆序**．在一个排列里出现的逆序总数称为该排列的**逆序数**．逆序数为偶数的排列称为**偶排列**，逆序数为奇数的排列称为**奇排列**．排列的奇偶性是定义 n 阶行列式的基础，为了方便，引进一个符号：如果 $j_1 j_2\cdots j_n$ 是一个 n 元排列，把它的逆序数记作 $\sigma(j_1 j_2\cdots j_n)$．

例 4　确定排列 4321 和 1324 以及 $n(n-1)\cdots 21$ 的奇偶性．

解　在排列 4321 中，2 在 1 之前构成一个逆序，3 在 1、2 之前构成两个逆序，4 在 1，2，3 之前构成三个逆序．此排列的逆序数 $\sigma(4321)=1+2+$

3 =6，所以排列 4321 是偶排列.

在排列 1324 中，3 在 2 之前构成一个逆序，此排列的逆序数 $\sigma(1324)=1$，所以排列 1324 是奇排列.

在排列 $n(n-1)\cdots21$ 中，2 在 1 之前构成一个逆序，3 在 1，2 之前构成两个逆序，…，n 在 $n-1,\cdots,2,1$ 之前构成 $n-1$ 个逆序，所以

$$\sigma(n(n-1)\cdots21)=1+2+\cdots+(n-1)=n(n-1)/2$$

当 $n=4k$ 或者 $n=4k+1$ 时，它是偶排列；而当 $n=4k+2$ 或者 $n=4k+3$ 时，它是奇排列，其中 k 为正整数.

在一个排列中，对调其中的两个数，而其他数字不动，就可得到另一个排列. 对排列所作的上述变换称为**对换**. **一个排列中的任意两个元素对换，排列改变奇偶性**. 在这里我们不证明这个性质，仅用例子说明它，如在例 4 中排列 4321 是偶排列，4 与 1 对换得排列 1324，它是奇排列. 另外，关于奇排列和偶排列还有另一个重要结论：

n 个不同元素($n>1$)共有 $n!$ 种全排列，其中奇偶排列各占一半.

1.1.4 n 阶行列式的定义

为了给出 n 阶行列式的定义，先来研究三阶行列式的结构.

根据三阶行列式的定义有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31} \tag{1.6}$$

容易看出：

(1) 三阶行列式的展开式共有 $3!=6$ 项；

(2) (1.6)式右边的每一项都是三个元素的乘积，且这三个元素位于不同的行不同的列. 因此，(1.6)式右端的任一项除正负号外可以写成 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$. 这里第一个下标(行标)排成自然顺序 123，而第二个下标(列标)排成 $j_1j_2j_3$，它们是 1，2，3 三个数的某个排列. 这样的排列共有 $3!=6$ 种，而对应(1.6)式右端恰含 6 项；

(3) 各项的正负号与列标的排列相对应：

带正号的三项列标排列是：123，231，312；带负号的三项列标排列是：132，213，321. 易知前三个排列都是偶排列，而后三个排列都是奇排列，因此各项 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$ 所带的正负号可以表示为 $(-1)^{\sigma(j_1j_2j_3)}$.

经以上分析可知，三阶行列式可以写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2j_3} (-1)^{\sigma(j_1j_2j_3)} a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$$

其中 $\sum\limits_{j_1j_2j_3}$ 表示对 1，2，3 三个数的所有排列 $j_1j_2j_3$ 求和.

仿此，可以把行列式推广到一般情形.

定义 1.1 设有 n^2 个数，排成 n 行 n 列

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{matrix}$$

其中 $a_{ij}(i, j=1,2,\cdots,n)$ 表示第 i 行第 j 列的元素，仍然规定横排为行，竖排为列. 作出表中位于不同行与不同列的 n 个数的乘积，并冠以正负号. 这种乘积的一般项可以写成如下形式

$$(-1)^{\sigma(j_1\ j_2\cdots j_n)} a_{1j_1}\ a_{2j_2}\cdots\ a_{nj_n} \tag{1.7}$$

其中 $j_1\ j_2\cdots j_n$ 是 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列，由于这样的排列共有 $n!$ 个，因而形如(1.7)的项共有 $n!$ 项. 所有这 $n!$ 项的代数和

$$\sum_{j_1j_2\cdots j_n} (-1)^{\sigma(j_1\ j_2\cdots j_n)} a_{1j_1}\ a_{2j_2}\cdots\ a_{nj_n}$$

称为 n **阶行列式**，记作

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

简记作 $\det(a_{ij})$，即 $\det(a_{ij}) = \sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n} (-1)^{\sigma(j_1j_2\cdots j_n)} a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$，其中 $\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$ 表示对 $1,2,3,\cdots,n$ 的所有 n 元排列 $j_1\ j_2\cdots j_n$ 求和.

利用对换的性质还可证明 n 阶行列式也可表示为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{i_1i_2\cdots i_n} (-1)^{\sigma(i_1i_2\cdots i_n)} a_{i_11}\ a_{i_22}\cdots\ a_{i_nn}$$

简言之，行列式等于不同行不同列的 n 个元素乘积的代数和. 显然，n 阶行列式是二阶、三阶行列式的推广. 特别地，当 $n=1$ 时，一阶行列式 $|a|$ 就是数 a.

一般来说，直接用定义计算行列式，工作量是比较大的. 因为当 n 较大时，$n!$ 增加很快. 如 $4!=24$，$5!=120,\cdots$. 要写出这 $n!$ 项是很不容易的，况且还要逐个地用排列的奇偶性确定其正负号，只有对一些特殊的行列式用定义来计算是比较简单的.

例 5 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ 0 & e & f & 0 \\ g & 0 & 0 & h \end{vmatrix}$$

解 根据定义 1.1，D 是 $4!=24$ 项取自不同行不同列的 4 个元素乘积的代数和. 然而，在这个行列式里，除了 $acfh$，$adeh$，$bdeg$，$bcfg$ 这四项外，其余项均含有零因子，因而等于零. 与上面 4 项对应的列标的排列依次是 1234，1324，4321，4231. 其中第一个和第三个是偶排列，第二个和第四个是奇排列. 因此

$$D=acfh-adeh+bdeg-bcfg$$

例 6 计算行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

解 由于第一列除了 a_{11} 之外其他元素都为 0，于是要得非零项，第一列必须选 a_{11}. 而第二列不能选 a_{12}，因为一行中只能选一个元素，所以第二列只能选 a_{22}. 同理第三列只能选 $a_{33},\cdots$,第 n 列只能选 a_{nn}. 这样该行列式仅有唯一可能的非零项 $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$，由于该项的行标与列标都是按自然顺序排列的，因此 $D=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$.

这样的行列式称为**上三角形行列式**，它等于主对角线(行列式中从左上角到右下角的对角线称为主对角线)上元素的乘积. 同理可得**下三角形行列式**

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

特别有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

称此行列式为**对角行列式**，其值也等于主对角线上元素的乘积.

习题 1－1

1. 确定下列排列的逆序数，指出它们的奇偶性：

$$32415, 413265, 6427531, 12\cdots n.$$

2. 确定下列各项所冠的正负号：

(1) 在四阶行列式中 $a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}$；

(2) 在五阶行列式中 $a_{31}a_{12}a_{53}a_{24}a_{45}$；

(3) 在六阶行列式中 $a_{32}a_{54}a_{41}a_{65}a_{13}a_{26}$.

3. 写出四阶行列式 $\det(a_{ij})$ 中包含因子 $a_{42}a_{23}$ 的项，并指出正负号.

4. 写出四阶行列式 $\det(a_{ij})$ 中所有取负号且包含因子 a_{23} 的项.

5. 按行列式的定义计算下列行列式：

(1) $\begin{vmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$； (2) $\begin{vmatrix} 1 & \log_b a \\ \log_a b & 1 \end{vmatrix}$；

(3) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 \\ n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$； (4) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & 0 & 0 \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$；

(5) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n-1,2} & \cdots & 0 & 0 \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

1.2 n 阶行列式的性质

直接利用行列式的定义计算行列式，一般是较繁琐的. 本节从行列式的定