湖北省高职高专
规划教材
——应用数学系列

总主编
朱永银

◎ 魏 莹 主编
◎ 刘昌喜 主审

计算机应用数学

Jisuanji Yingyong Shuxue

华中科技大学出版社
http://www.hustp.com

计算机应用数学

Jisuanji Yingyong Shuxue

湖北省高职高专规划教材——应用数学系列

总主编　朱永银

计算机应用数学

主　编　魏　莹
副主编　山　军　张汉萍
　　　　严中芝　万　武
主　审　刘昌喜

华中科技大学出版社
中国·武汉

内容简介

本书内容包括导数及其应用，不定积分及其应用，定积分及其应用，多元函数微积分简介，级数，行列式、矩阵与线性方程组，计算方法初步及计算实验等内容. 每节后配有练习题，每章后归纳本章知识要点，并在书后附有习题答案. 附录还介绍了初等函数的图形及其特性、积分表、计算方法中的参考程序等.

本书是根据高职高专院校的培养目标，针对高职高专计算机类专业的需要及学生的实际编写的. 本书力求从实际案例引入概念，略去烦琐的理论论述，注重数学思想与方法的培养，强调数学知识的应用，顺应了高职高专教育的改革与发展，适合作为高等职业技术学院及相当层次的计算机类专业的数学教材.

图书在版编目(CIP)数据

计算机应用数学/魏 莹 主编. —武汉：华中科技大学出版社，2010 年 6 月
ISBN 978-7-5609-5647-3

Ⅰ. 计… Ⅱ. 魏… Ⅲ. 电子计算机-应用数学-高等学校：技术学校-教材 Ⅳ. TP301.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 152410 号

计算机应用数学 魏 莹 主编

策划编辑：徐正达
责任编辑：王汉江 封面设计：刘 卉
责任校对：张 琳 责任监印：熊庆玉
出版发行：华中科技大学出版社(中国·武汉)
武昌喻家山 邮编：430074 电话：(027)87557437
录 排：武汉佳年华科技有限公司
印 刷：华中科技大学印刷厂
开本：710mm×1000mm 1/16 印张：17.75 字数：360 000
版次：2010 年 6 月第 1 版 印次：2010 年 6 月第 1 次印刷 定价：29.50 元
ISBN 978-7-5609-5647-3/TP·698

前　言

为了推动我省高职高专数学课程教学改革，加强教材建设，湖北省数学学会高职高专数学研究会和华中科技大学出版社组织全省有较高学术水平和丰富教学经验的部分高职高专数学骨干教师，经过近两年的努力，编写了这套《高职高专规划教材——应用数学系列》.本系列教材包括《工程应用数学》(上、下册)、《经济应用数学》、《计算机应用数学》等.在编写过程中，力求做到以应用为目的，以“必需、够用”为度，要求每章节尽量实行“案例(引例)驱动”，就是从实际问题出发，引出概念，并讲清概念，还注意到将数学建模思想渗透到教材中.本系列教材适合于在高中阶段学过极限理论、导数与导数应用知识的大学生使用.

本系列教材由朱永银教授担任总主编，负责总策划，拟订编写大纲，并对全书进行审稿、定稿.湖北职业技术学院的夏俊炜副教授，咸宁职业技术学院的吴高岭副院长，武汉职业技术学院的刘昌喜副教授担任主审，他们对本系列教材提出了宝贵的修改意见，编者不胜感激.

本教材《计算机应用数学》由魏莹担任主编，刘昌喜担任主审，山军、张汉萍、严中芝、万武担任副主编，参加编写的还有林敏、夏婧、李泽芳、周志颖、王启学、彭庭高、彭光萌、韩非、陈晓红、彭春华等，全书由魏莹统稿.

本教材第1章中有“*”号的部分可以略讲，以学生自学为主；其他有“*”号的部分为选学内容.本教材的授课学时各学校可根据教学要求安排.如果讲授全部内容，约需112学时，建议分两个学期开课，每周4学时；如果有“*”号的内容不讲，约需78学时，建议一个学期开课，每周6学时.

武汉职业技术学院、咸宁职业技术学院、湖北职业技术学院、仙桃职业学院、湖北轻工职业技术学院、恩施职业技术学院、武汉电力职业技术学院、湖北财税职业学院、武汉工业职业技术学院、武汉工程职业技术学院、十堰职业技术学院、荆州职业技术学院、鄂东职业技术学院、襄樊职业技术学院、湖北开放职业学院、沙市职业大学等对本系列教材顺利出版发行给予了大力支持，本系列教材还参考吸收了有关教材及著作的成果，在此一并致谢.

由于编者水平有限，本书难免存在疏漏之处，敬请广大读者不吝赐教，提出批评意见，以便再版时修改，使本系列教材日臻完善.

编　者

2009年7月

目　录

第1章　导数与导数的应用

在自然科学的许多领域中，都需要从数量上研究函数相对于自变量变化的快慢程度，如物体运动的速度、电流强度、化学反应速度及生物繁殖率等，所有这些在数量上都归结为函数的变化率，即导数.

本章将简要介绍函数极限、连续的有关知识，并利用极限引入导数的概念，推导求导公式，再利用导数来研究函数图形的性态，最后介绍微分的有关知识.

1.1　函数的极限

极限的思想是由求某些实际问题的精确解而产生的.

引例1(一个数字游戏所带来的问题)　用计算器对数2连续开平方时，经过一定次数(通常的计算器上为19次)的开方后会得1.为什么？是否对于任何正数经过一定次数的开方运算后都会得1？为什么？

究其数学表达式，对数2开平方一次有$\sqrt{2}=2^{1/2}$，对数2开平方两次得$\sqrt{\sqrt{2}}=2^{1/2^2}$，开平方三次得$\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}=2^{1/2^3}$，…，开平方$n$次得$\sqrt{\sqrt{\cdots\sqrt{2}}}=2^{1/2^n}$.当开平方次数$n$越来越大时，幂指数$1/2^n$越来越接近于0，从而结果越来越接近于$2^0=1$.由此不难想到，任何正数$a$，开平方次数越来越多时，其结果越来越接近于$a^0=1$.

引例2(截丈问题)　我国春秋战国时期(公元4世纪)的哲学家庄子在《庄子·天下篇》一书中对“截丈问题”有一段名言：“一尺之棰，日取其半，万世不竭.”

它反映的数学思想是：假设有长度为1个单位的木棒，每天截去一半，经n次截取后，剩余木棒的长度依次为$\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\frac{1}{16},\cdots,\frac{1}{2^n},\cdots$.

一方面，不管截取多少次，木棒总有剩余，不可穷尽；但另一方面，剩余木棒的长度越来越小而趋于零.

上述两个问题都是一种特殊函数——数列的极限问题，下面我们介绍一般函数的极限.

1.1.1　极限的概念

1. $x\to x_0$时，函数$f(x)$的极限

首先介绍邻域的概念.

设x_0与δ是两个实数，且$\delta>0$，数集$\{x\mid |x-x_0|<\delta\}$称为点x_0的δ邻域，记为

$U(x_0,\delta)$，即

$$U(x_0,\delta)=\{x \mid |x-x_0|<\delta\}.$$

点 x_0 称为这邻域的中心，δ 称为这邻域的半径.

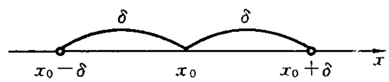

图 1-1

解不等式，知邻域 $U(x_0,\delta)$ 即为开区间 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$（图 1-1）.

点 x_0 的 δ 邻域去掉中心 x_0 后，称为点 x_0 的去心的 δ 邻域，记作 $\mathring{U}(x_0,\delta)$，即 $\mathring{U}(x_0,\delta)=\{x \mid 0<|x-x_0|<\delta\}$，这里，$0<|x-x_0|$ 就表示 $x\neq x_0$.

定义 1 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某一去心邻域内有定义，如果当自变量 x 趋于 x_0 时，相应的函数值 $f(x)$ 无限接近于某一个确定的常数 A，则称 A 为函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的极限，记为 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，或当 $x\to x_0$ 时，$f(x)\to A$.

注 极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 的存在与否与函数 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处是否有定义无关.

例如，$\lim\limits_{x\to 1}(x+1)=2$，$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=2$（见图 1-2）.

另外，$x\to x_0$ 表示 x 趋于 x_0，对于函数 $f(x)$，指的是 x 既从 x_0 左侧趋于 x_0（$x\to x_0^-$），又从 x_0 右侧趋于 x_0（$x\to x_0^+$），于是

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0^+}f(x)=A \text{ 且 } \lim_{x\to x_0^-}f(x)=A,$$

即当 $x\to x_0$ 时，函数 $f(x)$ 的极限存在的充分必要条件是其左、右极限均存在且相等.

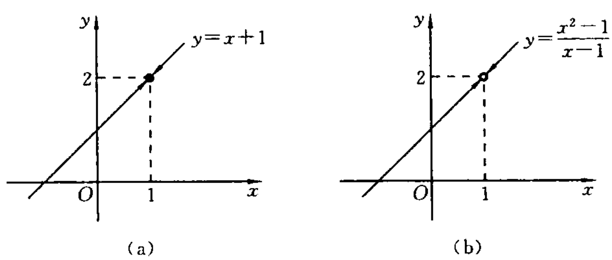

图 1-2

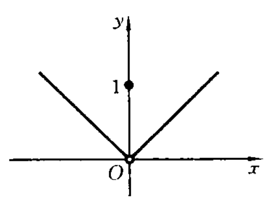

图 1-3

例 1 设 $f(x)=\begin{cases}-x, & x<0,\\ 1, & x=0,\\ x, & x>0,\end{cases}$ 画出该函数的图形并求 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)$，$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)$，$\lim\limits_{x\to 0}f(x)$.

解 因 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(-x)=0$，$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}x=0$，

所以

$$\lim_{x\to 0}f(x)=0.$$

函数图形如图 1-3 所示.

为方便起见，左极限 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$ 也记为 $f(x_0-0)$，右极限 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$ 也记为 $f(x_0+0)$.

2. $x\to\infty$时,函数 $f(x)$的极限

定义 2　设函数 $f(x)$在$|x|>a$ 时有定义(a 为某个正数),如果当自变量 x 的绝对值无限增大时,相应的函数值 $f(x)$无限接近于某确定的常数 A,则称 A 为函数 $f(x)$当 $x\to\infty$时的极限,记为$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$. 或当 $x\to\infty$时,$f(x)\to A$.

例如$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$(见图 1-4).

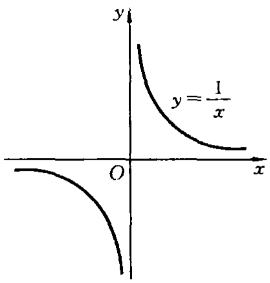

图 1-4

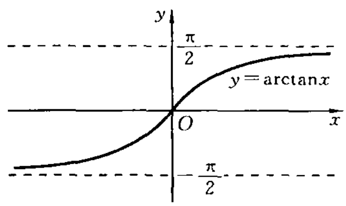

图 1-5

注　$x\to\infty$表示自变量 x 的绝对值无限增大,指的是 x 既取正值而无限增大($x\to+\infty$),同时也取负值而绝对值无限增大($x\to-\infty$),于是有如下结论:

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A \Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty}f(x)=A \text{ 且 } \lim_{x\to-\infty}f(x)=A.$$

例如
$$\lim_{x\to+\infty}\arctan x=\frac{\pi}{2},\quad \lim_{x\to-\infty}\arctan x=-\frac{\pi}{2}\text{(见图 1-5)}.$$

图 1-5 表明,当$|x|$无限增大时,$\arctan x$ 不是接近于一个确定的常数,故$\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x$不存在.

1.1.2　极限的运算法则

为了求出较复杂函数的极限,可以给出极限的如下运算法则.

设$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$,$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=B$,则:

(1) $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)]=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\pm\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=A\pm B$;

(2) $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)]=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\cdot\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=A\cdot B$;

(3) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to x_0}f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}g(x)}=\dfrac{A}{B}$ $(B\neq0)$.

以上运算法则说明:在参与运算的函数存在极限的前提下,函数的和、差、积的极限分别等于函数极限的和、差、积,并可推广到有限个函数的情形;而对于两个函数的商的极限,只要分母的极限不为零,函数商的极限等于它们极限的商.

在法则(2)中,如果 $g(x)=c$ (c 为常数),则$\lim\limits_{x\to x_0}[cf(x)]=c\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$,即常数因

子可以提到极限符号外面去.

如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在,则 $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)]^2=[\lim\limits_{x\to x_0} f(x)]^2$.

推广到有限个函数的情形,即有 $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)]^k=[\lim\limits_{x\to x_0} f(x)]^k$($k$ 为自然数).

上述法则对于 $x\to\infty$ 时的情形同样也是成立的.

例 2 求:(1) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3x^2-x+4}{x^2+2}$; (2) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{x^2-9}$; (3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-4x+1}{2x^2+x-5}$.

解 (1) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3x^2-x+4}{x^2+2}=\dfrac{\lim\limits_{x\to -1}(3x^2-x+4)}{\lim\limits_{x\to -1}(x^2+2)}=\dfrac{8}{3}$.

(2) 当 $x\to 3$ 时,分子、分母的极限都为零,故不能直接用商的极限运算法则. 因为分子、分母有公因子 $x-3$,当 $x\to 3$ 时,$x\neq 3$,故 $x-3\neq 0$,所以

$$\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{x^2-9}=\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{(x+3)(x-3)}=\lim_{x\to 3}\frac{1}{x+3}=\frac{1}{6}.$$

(3) 当 $x\to\infty$ 时,分子、分母都不存在极限,所以不能直接使用商的极限的运算法则,把分子、分母同时除以 x^2,得

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-4x+1}{2x^2+x-5}=\lim_{x\to\infty}\frac{3-4/x+1/x^2}{2+1/x-5/x^2}=\frac{3}{2}.$$

1.1.3 两个重要极限

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$

列表(见表 1-1)观察函数 $\dfrac{\sin x}{x}$ 当 $x\to 0$ 时的变化趋势,可以看出,当 $x\to 0$ 时,$\dfrac{\sin x}{x}\to 1$.

表 1-1

x	± 0.5	± 0.10	± 0.05	± 0.01	$\cdots\to$	0
$\dfrac{\sin x}{x}$	0.958 85	0.998 33	0.999 58	0.999 98	$\cdots\to$	1

可以证明 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

注 这个重要极限是 $\dfrac{0}{0}$ 型极限,其形式可形象地写成 $\lim\limits_{\square\to 0}\dfrac{\sin\square}{\square}=1$("□"代表同一变量或同一表达式).

例 3 求:(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{x}$; (2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}$; (3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$; (4) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin 5x}{\tan 3x}$.

解 (1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{x}=2\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{2x}=2$.

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\cdot\dfrac{1}{\cos x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\cos x}=1$.

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2\dfrac{x}{2}}{x^2}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2\dfrac{x}{2}}{\left(\dfrac{x}{2}\right)^2}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin\dfrac{x}{2}}{\dfrac{x}{2}}\right)^2=\dfrac{1}{2}$.

(4) 令 $x=\pi+t$，当 $x\to\pi$ 时，$t\to 0$，有

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin 5x}{\tan 3x}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin 5(\pi+t)}{\tan 3(\pi+t)}=\lim_{t\to 0}\frac{-\sin 5t}{\tan 3t}=-\frac{5}{3}\lim_{t\to 0}\frac{\sin 5t}{5t}\cdot\frac{3t}{\tan 3t}=-\frac{5}{3}.$$

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$

数 e=2.718 281 828 459…是一个无理数.这个重要极限无论在数学理论或实际问题中都有重要应用，物体的冷却、放射元素的衰变、存款的连续复利等都要用到它.

列表(见表 1-2)观察当 $x\to\infty$ 时，函数 $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$ 的变化趋势.

表 1-2

x	…	10	10^2	10^3	10^4	10^5	10^6	…
$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$	…	2.593 78	2.704 81	2.716 92	2.718 15	2.718 27	2.718 28	…
x	…	-10	-10^2	-10^3	-10^4	-10^5	-10^6	…
$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$	…	2.867 97	2.732 00	2.719 64	2.718 41	2.718 30	2.718 28	…

可以看出，当 $|x|$ 无限增大时，$(1+1/x)^x$ 无限接近于常数 2.718 281 8…，即

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}.$$

这个重要极限是 1^∞ 型极限，它可形象地表示为

$$\lim_{\square\to\infty}\left(1+\frac{1}{\square}\right)^{\square}=\mathrm{e}\quad(\text{“}\square\text{”代表同一变量或同一表达式}).$$

例 4　求：(1) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$；(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{x}\right)^x$；(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{2}{x}\right)^x$；(4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2-x}{3-x}\right)^x$.

解　(1) 令 $t=\dfrac{1}{x}$，则当 $x\to 0$ 时，$t\to\infty$，所以

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t=\mathrm{e}.$$

(2) 所求极限类型为 1^∞ 型.令 $\dfrac{x}{3}=u$，则 $x=3u$，故

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^x=\lim_{u\to\infty}\left(1+\frac{1}{u}\right)^{3u}=\lim_{u\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{u}\right)^u\right]^3=\mathrm{e}^3.$$

(3) 所求极限类型为 1^∞ 型.

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{-x/2}\right)^{-\frac{x}{2}}\right]^{-2}=\mathrm{e}^{-2}.$$

(4) 所求极限类型为 1^∞ 型.令 $\dfrac{2-x}{3-x}=1+\dfrac{1}{u}$，则 $x=u+3$，当 $x\to\infty$ 时，$u\to\infty$，于

是 $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2-x}{3-x}\right)^x=\lim_{u\to\infty}\left(1+\frac{1}{u}\right)^{u+3}=\lim_{u\to\infty}\left(1+\frac{1}{u}\right)^u\cdot\lim_{u\to\infty}\left(1+\frac{1}{u}\right)^3=\mathrm{e}.$$

例 5(复利及连续复利公式) 设有一笔本金 P_0 万元存入银行，年利率为 r，以复利计息.(1) 每年计息一次，问到第 t 年末，该笔本金的本利和 P_t 为多少？(2) 若每年计息 n 次，且 $n\to\infty$，问到第 t 年末，该笔本金的本利和 P_t 为多少？

解 (1) 每年计息一次，则第一年末的本利之和为 $P_1=P_0+P_0r=P_0(1+r)$；第二年末的本利之和为 $P_2=P_1+P_1r=P_1(1+r)=P_0(1+r)^2$；…；以此类推，第 t 年末，该笔本金的本利和 P_t 为 $P_t=P_0(1+r)^t$

(2) 若每年计息 n 次，这时每期的利率可以认为是 r/n，t 年共计息次数为 nt 次，用上述同样方法可推得

$$P_t=P_0(1+r/n)^{nt}.$$

如果计息的“期数”$n\to\infty$(即计息周期无限缩短)，则第 t 年末，该笔本金的本利和 P_t 为

$$P_t=\lim_{n\to\infty}P_0(1+r/n)^{nt}=P_0\lim_{n\to\infty}(1+r/n)^{\frac{n}{r}\cdot rt}=P_0\mathrm{e}^{rt}.$$

练 习 1-1

1. 设函数 $f(x)=\begin{cases}3x+2, & x\leqslant 0,\\ x^2+1, & 0<x\leqslant 1,\\ \dfrac{2}{x}, & x>1,\end{cases}$ 分别讨论 $x\to 0$、$x\to 1$ 及 $x\to 2$ 时 $f(x)$ 的极限是否存在.

2. 计算下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to -1}(3x^2-2x+5)$； (2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-5x+1}{2x^2-1}$； (3) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-7x+12}{x^2-5x+4}$； (4) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(x+h)^3-x^3}{h}$.

3. 计算下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{x}$； (2) $\lim\limits_{x\to 0}x\cot 3x$； (3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}$； (4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\sin 2x}$.

4. 计算下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x}\right)^{2x}$； (2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{3x}\right)^{2x}$； (3) $\lim\limits_{x\to 0}(1-2x)^{\frac{1}{x}}$； (4) $\lim\limits_{t\to\frac{\pi}{2}}(1+\cos t)^{\sec t}$.

5. 下列求极限的过程对吗？为什么？

$$\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin\dfrac{1}{x}}{1/x}=1.$$

*1.2 无穷小与无穷大

1.2.1 无穷小

1. 无穷小的定义

在实际问题中，经常遇到极限为零的变量，我们给出下面的定义.

定义 1　如果当 $x \to x_0$（或 $x \to \infty$）时，函数 $f(x)$ 的极限为零，即

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0 \quad (\text{或} \lim_{x \to \infty} f(x) = 0),$$

则称函数 $f(x)$ 为 $x \to x_0$（或 $x \to \infty$）时的无穷小量，简称无穷小.

例如：因为 $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1}{x-2} = 0$，所以 $\dfrac{1}{x-2}$ 是 $x \to \infty$ 时的无穷小；

因为 $\lim\limits_{x \to 0} \sin x = 0$，所以 $\sin x$ 是 $x \to 0$ 时的无穷小；

因为 $\lim\limits_{x \to 1} (x^2 - 1) = 0$，所以 $x^2 - 1$ 是 $x \to 1$ 时的无穷小.

注　说一个函数 $f(x)$ 是无穷小，必须指明自变量 x 的变化趋势，如 $\dfrac{1}{x-2}$ 是 $x \to \infty$ 时的无穷小，当 x 趋于其他数值时，$\dfrac{1}{x-2}$ 不是无穷小.

常数 0 是无穷小，这是因为 $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} 0 = 0$.

不要把“无穷小”与“很小的数”混淆起来，因为很小的数，如 10^{-30}，10^{-40} 等，虽然很小，但它们是常数，不能以 0 为极限.

2. 无穷小的性质

根据无穷小的定义及极限的运算法则，不难推出，在自变量的同一变化过程中，有以下性质.

性质 1　有限个无穷小的代数和仍为无穷小.

性质 2　有限个无穷小的乘数仍为无穷小.

性质 3　有界函数与无穷小的乘积仍为无穷小.

例 1　求：(1) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\sin x}{x}$；　(2) 求 $\lim\limits_{x \to 0} x\cos\dfrac{1}{x}$.

解　(1) 因为当 $x \to \infty$ 时，$\sin x$ 的极限不存在，x 的极限也不存在，所以不能利用极限的运算法则求解，但 $\dfrac{\sin x}{x} = \dfrac{1}{x}\sin x$，当 $x \to \infty$ 时，$\dfrac{1}{x}$ 是无穷小，而 $|\sin x| \leqslant 1$，即 $\sin x$ 是有界函数，由性质 3 可知 $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{1}{x}\sin x\right) = 0$.

(2) 当 $x \to 0$ 时，$\cos\dfrac{1}{x}$ 的极限不存在，所以不能运用极限的运算法则求解，但当 $x \to 0$ 时，x 是无穷小，$\cos\dfrac{1}{x}$ 是有界函数，由性质 3 可知 $\lim\limits_{x \to 0} x\cos\dfrac{1}{x} = 0$.

3. 函数极限与无穷小的关系

定理 1　具有极限的函数等于它的极限与一个无穷小之和；反之，如果函数可表示为常数与无穷小之和，那么该常数就是这个函数的极限.

下面就 $x \to x_0$ 时的情形加以证明.

证　设 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$，令 $\alpha = f(x) - A$，则

$$\lim_{x \to x_0}\alpha = \lim_{x \to x_0}[f(x) - A] = \lim_{x \to x_0} f(x) - \lim_{x \to x_0} A = A - A = 0,$$

即 α 是 $x \to x_0$ 时的无穷小. 由于 $\alpha = f(x) - A$,所以 $f(x) = A + \alpha$.

反之,设 $f(x) = A + \alpha$,A 是常数,α 是 $x \to x_0$ 时的无穷小,则

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0}(A + \alpha) = \lim_{x \to x_0} A + \lim_{x \to x_0}\alpha = A.$$

类似地,可以证明 $x \to \infty$时的情形.

1.2.2 无穷大

1. 无穷大的定义

定义 2 如果 $x \to x_0$(或 $x \to \infty$)时,函数 $f(x)$的绝对值无限增大,则称 $f(x)$是当 $x \to x_0$(或 $x \to \infty$)时的无穷大量,简称无穷大,记为

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty \text{ (或} \lim_{x \to \infty} f(x) = \infty).$$

注 按照极限的定义,这时函数 $f(x)$的极限是不存在的,这里只是沿用了极限的记号来表达"$|f(x)|$无限增大"这一性态.

例如,当 $x \to 1$ 时,$\left|\frac{1}{x^2-1}\right|$无限增大,所以$\frac{1}{x^2-1}$是 $x \to 1$ 时的无穷大,$\lim\limits_{x \to 1}\frac{1}{x^2-1} = \infty$;当 $x \to \frac{\pi}{2}$时,$|\tan x|$无限增大,所以 $\tan x$ 是 $x \to \frac{\pi}{2}$时的无穷大,$\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}}\tan x = \infty$.

如果当 $x \to x_0$(或 $x \to \infty$)时,$f(x)$取正值而无限增大,则称 $f(x)$是 $x \to x_0$(或 $x \to \infty$)时的正无穷大,记为$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$(或$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = +\infty$).

如果当 $x \to x_0$(或 $x \to \infty$)时,$f(x)$取负值而绝对值无限增大,则称 $f(x)$是$x \to x_0$(或 $x \to \infty$)时的负无穷大,记为$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$(或$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = -\infty$).

例如:$\lim\limits_{x \to \infty}(x^2 + 1) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to 0^+}\ln x = -\infty$.

与无穷小类似,说一个函数 $f(x)$是无穷大,必须指明 x 的变化过程,例如$\frac{1}{x}$是 $x \to 0$时的无穷大,而当 x 趋于其他数值时,$\frac{1}{x}$就不是无穷大了. 另外,不要把"无穷大"与"很大的数"混淆起来.

2. 无穷大与无穷小的关系

我们知道,当 $x \to 1$ 时,$x^2 - 1$ 是无穷小,而$\frac{1}{x^2-1}$是无穷大;当 $x \to \infty$时,x 是无穷大,而$\frac{1}{x}$是无穷小. 一般地,有如下定理:

定理 2 在自变量的同一变化过程中,如果 $f(x)$是无穷大,则$\frac{1}{f(x)}$是无穷小;反之,如果 $f(x)$是无穷小,且 $f(x) \neq 0$,则$\frac{1}{f(x)}$是无穷大.

利用无穷小与无穷大的关系，可求一些函数的极限.

例 2 求：(1) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x+1}{x-5}$； (2) $\lim\limits_{x\to\infty}(x^2-3x+1)$.

解 (1) 当 $x\to 5$ 时，分母的极限为零，故不能运用极限的运算法则，但因为 $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x-5}{x+1}=0$，所以根据无穷大与无穷小的关系，有 $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x+1}{x-5}=\infty$.

(2) 当 $x\to\infty$ 时，x^2，$3x$ 的极限都不存在，故不能运用极限的运算法则，但因为

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2-3x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1/x^2}{1-3/x+1/x^2}=0,$$

所以根据无穷小与无穷大的关系，有 $\lim\limits_{x\to\infty}(x^2-3x+1)=\infty$.

例 3 求：(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-x^2+2x-1}{x^2+16}$； (2) $\lim\limits_{x\to -2}\left(\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{12}{x^3+8}\right)$.

解 (1) 因为 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+16}{2x^3-x^2+2x-1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1/x+16/x^3}{2-1/x+2/x^2-1/x^3}=0$，

所以根据无穷小与无穷大的关系，有

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3-x^2+2x-1}{x^2+6}=\infty.$$

一般地，若 $a_0\neq 0, b_0\neq 0, m, n$ 为非负整数，则

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_{m-1}x+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_{n-1}x+b_n}=\begin{cases}a_0/b_0, & m=n,\\ 0, & m<n,\\ \infty, & m>n.\end{cases}$$

(2) 当 $x\to -2$ 时，$\dfrac{1}{x+2}$，$\dfrac{12}{x^3+8}$ 都是无穷大，所以不能直接运用极限的运算法则，需经过变形后再运算.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to -2}\left(\frac{1}{x+2}-\frac{12}{x^3+8}\right)&=\lim_{x\to -2}\frac{x^2-2x-8}{(x+2)(x^2-2x+4)}=\lim_{x\to -2}\frac{(x+2)(x-4)}{(x+2)(x^2-2x+4)}\\&=\lim_{x\to -2}\frac{x-4}{x^2-2x+4}=-\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

1.2.3 无穷小的比较

我们知道，两个无穷小的和、差、积仍是无穷小，但两个无穷小的商却不一定是无穷小.

例如，当 $x\to 0$ 时，$2x$，x^2，$\sin x$ 都是无穷小，但是

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{2x}=0,\quad \lim_{x\to 0}\frac{2x}{x^2}=\infty,\quad \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

两个无穷小之比的极限，反映了分子、分母趋于零的“快慢”程度. 上述无穷小趋于零的情况如表 1-3 所示.