

数学解难

SHUXUE JIENAN 102 LI

102 例

韩文法 编著



郑州大学出版社

数学解难

SHUXUE JIENAN 102 LI

102 例

韩文法 编著



郑州大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学解难 102 例/韩文法编著. —郑州:郑州大学出版社, 2010. 1

ISBN 978 - 7 - 5645 - 0179 - 2

I. 数… II. 韩… III. 数学 - 普及读物 IV. 01 - 49

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2009) 第 235078 号

郑州大学出版社出版发行

郑州市大学路 40 号

出版人:王 锋

全国新华书店经销

黄委会设计院印刷厂印制

开本:710 mm × 1 010 mm

印张:22.75

字数:461 千字

版次:2010 年 1 月第 1 版

邮政编码:450052

发行部电话:0371 - 66966070

1/16

印次:2010 年 1 月第 1 次印刷

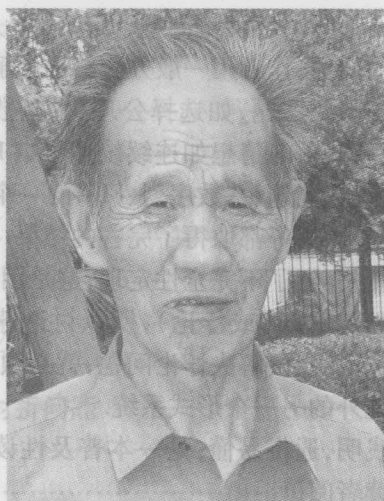
书号:ISBN 978 - 7 - 5645 - 0179 - 2

定价:46.00 元

本书如有印装质量问题, 请向本社调换

个人简历

目 录



韩文法,男,1922年11月出生,中共党员,河南唐河人,1949年毕业于河南大学数学系.曾任河南化学研究所副所长、河南数学研究所所长、河南数学会副理事长等职.

1990年以后,在数论猜想研究方面取得了较好的结果,并有所突破.如《 $(1+1)$ 问题》、《孪生素数问题讨论》、《麦生素数问题》、《角谷猜想的证明》、《欧拉猜想的证明》、《 $n=N^2+P$ 的破解》、《FLT的一个证明》、《整数因子和问题》、《由黎曼猜想谈起》、《 n^4+1 中的素数个数问题》、《黑洞数》、《 $\pi(x)+\pi(y)\geq\pi(x+y)$ 的证明》、《 $N_\alpha^{N_p}$ 的计算》等.这些疑难问题都是貌似简单,长期得不到解决,经作者艰辛探索用一般数学方法解决的.

1. 零的起源	1
2. 无限小数	2
3. e 的无理性	5
4. 求最大公约数	8
5. 卡布列斯基	10
6. 哈普柯	13
7. Selfridge	15
8. 循环小数的循环节	20
9. 黑洞数	28
10. 曲面的定义	41
11. 同余	43
12. 一次同余	47
13. 同余	52
14. 完全	54
15. 三角和	57
16. 对称	61
17. RSA	68
18. $\pi(x)$	71
19. x^2+1	74
20. $\sigma(n)$	78
21. 莫德	81
22. 什么是	85
23. 正规子群	89
24. 循环群	91
25. 置换群	93
26. 群的同构与同态	99
27. 群的中心和换位子群	104
28. 数环和数域	107

前 言

本书汇集了部分数学疑难问题,其中有些是数学历史上长期未曾解决的问题,作者用一般方法给出了解答.书中还介绍了集合论中的一些课题,如选择公理、大基数公理、ZFC 公理系统等.其中一些著名猜想如连续统假设、 $(1+1)$ 问题、素数对问题、麦生素数问题、基数序列、FLT 的一个证明、梁定样猜想、由黎曼猜想谈起等都取得了完善的结果.

另外,书中还介绍了不完全性定理,这是因为每个形式系统都存在不可判定命题(或悖论),所以讨论悖论时,要考虑悖论所在的形式系统,要解决悖论问题,就必须找出不同于悖论所在形式系统外的另一个形式系统.

本书叙理浅明,通俗易懂,是一本普及性读物,适合中等以上数学程度读者阅读.

由于多数问题含有作者见解,错误在所难免,恳请读者批评指正.

编 者

2009 年 10 月

目 录

1. 零的知识	1
2. 无限小和无穷大	2
3. e 的无理性	5
4. 求最大公约数	8
5. 卡布列克运算	10
6. 喀普利卡数	13
7. Selfridge 问题	15
8. 循环小数的循环节对折问题	20
9. 黑洞数问题	28
10. 曲线的定义	41
11. 同余的概念	43
12. 一次同余式	47
13. 同余性质的一些应用	52
14. 完全剩余系	54
15. 三角和方法	57
16. 对称多项式的应用	61
17. RSA 加密算法	68
18. $\pi(x) + \pi(y) \geq \pi(x+y)$ 的证明	71
19. $x^3 + y^3 + z^3 = 3$ 解的讨论	74
20. $\sigma(n) = \sigma(n+1)$ 解的讨论	78
21. 莫德尔方程的一个解法	81
22. 什么是群	85
23. 正规子群	89
24. 循环群	91
25. 置换群	93
26. 群的同构与同态	99
27. 群的中心和换位子群	104
28. 数环和数域	107

29. 三大几何“难题”	110
30. 伽罗华群的概念	114
31. 伽罗华理论简介	117
32. 大于或等于 5 次方程求解问题	119
33. 集合的概念	121
34. 集合能不能比较大小	124
35. 可数集	129
36. 无穷集有差别	132
37. 基数	135
38. 什么是大基数	140
39. 基数序列	142
40. 序集	144
41. 序数	149
42. 序型	151
43. 公理化系统	155
44. 选择公理	159
45. 连续统假设	161
46. 力迫法简介	163
47. 分球怪论	165
48. 决定性公理	167
49. 模糊集合	168
50. 如何计算 $\aleph_{\alpha}^{\aleph_{\beta}}$	172
51. 回文数猜想	174
52. 欧拉公式简介	178
53. $2^n \equiv 3 \pmod{n}$ 是否有解	185
54. 欧德斯猜想	187
55. 完全数介绍	193
56. 拉格朗日定理	198
57. 商高数猜想	201
58. Catalan 猜想	204
59. Lehmer 猜想	206
60. Bowen 猜想	214
61. 素数表达式问题	219
62. $n^2 + 1$ 型素数有无穷多个	223

63. $n^4 + 1$ 中的素数个数问题	224
64. $(\quad)^3 + 2$ 中的素数个数问题	224
65. $\{N\}$ 中的素数问题	227
66. 一类素数公式	229
67. 麦生素数问题	237
68. $2^n - 1$ 型素数问题	240
69. 猜想 $n = N^2 + P$	242
70. 费尔马数的讨论	245
71. Bertrand 假设	247
72. 克拉莫猜想	248
73. 杰波夫猜想	249
74. 伯特兰猜想	251
75. 素数的分类	253
76. 素数对问题	261
77. $(1+1)$ 问题的讨论	266
78. 费尔马定理	270
79. 希尔伯特猜想	271
80. 介绍欧拉定理	273
81. Wilson 定理的证明	276
82. 直角三角形的一个猜想	278
83. 欧拉猜想的证明	281
84. 梁定样猜想	284
85. 角谷猜想的讨论	291
86. FLT 的一个证明	296
87. 由黎曼猜想谈起	302
88. 厄尔多斯—莫德尔不等式的一种证明	310
89. 悖论	315
90. 不能成立的悖论	317
91. 悖论求解问题	322
92. 真类	327
93. 命题逻辑	329
94. 永真蕴涵公式	333
95. 谓词	334
96. 谓词和量词	336

97. 谓词公式	339
98. 一阶算术	342
99. 递归函数	345
100. 哥德尔数	348
101. 不完全性定理的证明	350
102. D. Hilbert 的“23 个数学问题”	352
主要参考书目	356

1. 零的知识

零是一个特殊的数. 它不是正数, 也不是负数, 而是正数和负数的分界数. 一般我们不把零算作自然数. 从整数的排列位置上看, 零是整数, 而且是偶数, 不是奇数.

在初等数学里, 零不能当除数. 不少学生只知其然, 不知其所以然. 其实, 这是由除法定义所决定的. 现论述如下:

若 a, b, c 均表示整数, 则除法定义为: $\frac{a}{b} = c$, 即 $a = bc$. ① 当 $a \neq 0$ 时, 若 $b = 0$, 则 $bc = 0$, 因而出现在 $a \neq bc$. 这意思是说: 被除数不是 0, 除数是 0, 商是不存在的. ② 当 $a = 0$ 时, 若 $b = 0$, 则 $\frac{0}{0} = c$, 即 $0 = 0 \times c$, 显然, c 为任意数均成立. 这意思是说: 除数为 0, 被除数也为 0 时, 商为不定值. 它违背了四则运算结果唯一性原则. 由 ①、② 可知, 不论 $\frac{a}{0}$ 或 $\frac{0}{0}$, 即 0 为除数都是无意义的.

零在运算中, 为了使运算有意义, 有一些规定. 如:

- (1) $\sum_1^n 0 = 0$, 但 $\sum_1^\infty 0 \neq 0$ ($\sum$ 表示和);
- (2) $\prod_1^n 0 = 0$, 但 $\prod_1^\infty 0 \neq 0$ ($\prod$ 表示积);
- (3) a^0 , 当 $a \neq 0$ 时取值为 1, 当 $a = 0$ 时, 无意义;
- (4) $0! = 1$, 可以作除数;
- (5) -0 , $+0$ 意义不同, 所以 $-0 \neq +0$.

2. 无限小和无穷大

无限小和无穷大是数学分析中的两个重要概念,无限小记为 0^* ,无穷大记为 ∞ ,二者统称非标准数.把 0^* 和 ∞ 作为实数运算时,就成为非标准分析的部分内容了.

2.1 无限小 0^*

无限小 0^* 有三种,即

(1) 正型无限小,记为 $0^*(> 0)$,即 $0^*(> 0)$ 是大于0,而小于所有正数的“数”.

(2) 负型无限小,记为 $0^*(< 0)$,即 $0^*(< 0)$ 是小于0,并大于所有负数的“数”.

(3) 无限小 0^* 是这样的数,其绝对值 $|0^*|$ 大于0,并小于所有正数.

2.2 无穷大 ∞

无穷大 ∞ 也有三种,即

(1) 正无穷大,记为 $+\infty$,即 $+\infty$ 是大于所有正数的“数”.

(2) 负无穷大,记为 $-\infty$,即 $-\infty$ 是小于所有负数的“数”.

(3) 无穷大 ∞ 是这样的“数”,其绝对值 $|\infty|$ 大于所有正数.

2.3 无限小的运算

在运算过程中,无限小有:

$$0^* + 0^* = 0^* \text{ (或 } 0\text{)}$$

$$0^* - 0^* = 0^* \text{ (或 } 0\text{)}$$

$$0^* \times 0^* = 0^* \text{ (或 } 0\text{)}$$

$$0 \times 0^* = 0^* \times 0 = 0$$

$$c \times 0^* = 0^* \times c = 0^* \text{ (} c \neq 0\text{)}$$

$$0^* \div \text{某正数} = 0^*$$

$0^* \div 0^*$ 未定.

2.4 无穷大的运算

在运算过程中,无穷大有:

$$c \times \infty = \infty (c \neq 0)$$

$$(+\infty) + (+\infty) = +\infty$$

$$(-\infty) + (-\infty) = -\infty$$

$$(+\infty) - (+\infty) \text{ 未定}$$

$$\infty \times \infty = \infty$$

$$\infty + c = \infty$$

$$\infty + 0^* = \infty$$

$$\infty \times 0^* \text{ 未定}$$

$$\infty \div \infty \text{ 未定}$$

$$1 \div \infty = 0^*$$

$$1 \div 0^* = \infty.$$

2.5 无限小的比较

α, β 是均为趋向 0 的变量,若 $\frac{\alpha}{\beta}$ 的极限值为常数,则 α, β 为同级无限小;若 $\frac{\alpha}{\beta}$ 的极限值为 0,则说 α 是比 β 较高级无限小.

2.6 无穷大的比较

若 u, v 为无穷大:

当 $\frac{u}{v} \rightarrow k (k \neq 0)$, u, v 为同级无穷大;

当 $\frac{u}{v} \rightarrow 0$ 时,说 u 是比 v 低级无穷大.

2.7 0^* 和 ∞ 的无限性是矛盾的

这个问题可以用以下方法来表述,即

0^* :设想一个动点从 1 向 0 移动,当动点到达 0 时,它通过无穷点集 $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\}$ 中的一切点,因为 $\frac{1}{n}$ 和自然数 n 一一对应,所以动点移动到 0 的过程中,它走过 $\frac{1}{n} (n = 1, 2, 3, \dots)$,最后必然会到 0 点,到达 0 点是动点的阶段性飞跃,这就是说自然数集的形成过程包含两个阶段,一个是延伸,一个是穷竭,无穷性是飞跃形成的,表现形式为

$$\{1, 2, 3, (\dots)_0, n, (\dots)_1\}.$$

n 代表任意自然数;

$(\dots)_0$ 表示自然数的不断延伸,即量变阶段;

$(\dots)_1$ 表示扬弃了有限性重复发生的飞跃阶段.

∞ : 可以看到自然数 n 通过自然数集得到无穷大,表现形式也为

$$\{1, 2, 3, (\dots)_0, n, (\dots)_1\}.$$

$(\dots)_0$ 是量变阶段;

$(\dots)_1$ 为飞跃阶段.

所以 0^* 和 ∞ 都可以通过自然数序列的无限过程的飞跃阶段 $(\dots)_1$ 来完成的. 但 $(\dots)_1$ 虽蕴含了无限性, $(\dots)_1$ 中成员为有限的序号. 有限序号增长到无限又否定了序号自身的有限性. 因此说无限性概念是矛盾的,它需要用有限来构成.

3. e 的无理数性

3.1 定义

令 $x_n = (1 + \frac{1}{n})^n$, 则

$$\begin{aligned}x_n &= (1 + \frac{1}{n})^n \\&= 1 + n \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!} (\frac{1}{n})^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} (\frac{1}{n})^3 + \cdots + \\&\quad \frac{n(n-1)\cdots(n-n+1)}{n!} (\frac{1}{n})^n \\&= 1 + 1 + \frac{1}{2!} (1 - \frac{1}{n}) + \frac{1}{3!} (1 - \frac{1}{n})(1 - \frac{2}{n}) + \cdots + \\&\quad \frac{1}{n!} (1 - \frac{1}{n}) \cdots (1 - \frac{n-1}{n})\end{aligned}$$

若以 $n+1$ 代替 n , 则

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= 1 + 1 + \frac{1}{2!} (1 - \frac{1}{n+1}) + \frac{1}{3!} (1 - \frac{1}{n+1})(1 - \frac{2}{n+1}) + \cdots + \\&\quad \frac{1}{(n+1)!} (1 - \frac{1}{n+1}) \cdots (1 - \frac{n}{n+1}).\end{aligned}$$

因为 $1 - \frac{s}{n} \leq 1 - \frac{s}{n+1}$

所以 $x_{n+1} > x_n$.

$$\begin{aligned}\text{因为 } x_n &\leq 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} \\&< 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} \\&< 3.\end{aligned}$$

所以 x_n 有上界, 它的极限小于 3, 用 e 表示, 即

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n.$$

容易看出, e 的值介于 2 与 3 之间, 即

$$e = 2.718281828459045 \dots$$

3.2 e 是无理数

把 $e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$ 分为两部分, 即

$$e = s_n + r_n, \text{ 其中 } s_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}, r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!}.$$

$$\begin{aligned} \text{因为 } r_n &= \frac{1}{(n+1)!} \left(1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \dots \right) \\ &< \frac{e-1}{(n+1)!}. \end{aligned}$$

$$\text{所以 } e = s_1 + r_1 < 2 + \frac{e-1}{2}, e < 3.$$

$$\text{因此 } 0 < r_n < \frac{2}{(n+1)!},$$

$$\text{令 } n!s_n = a_n, n!r_n = b_n.$$

而 a_n 是整数,

$$0 < b_n < \frac{2}{n+1} \leq 1 \quad (n = 1, 2, \dots).$$

这就证明了 $n!e = a_n + b_n$ 不是一个整数.

从而知道 e 不是一个整数, 即 e 是无理数.

3.3 e 是超越数

我们知道, 凡满足整系数代数方程的数, 叫代数数. 例如 $x^2 - 4x - 3 = 0$ 的根 $2 \pm \sqrt{7}$ 就叫代数数. 反之, 不满足整系数代数方程的数, 称超越数. 下面我们将证明 e 是超越数:

显然, 只需要证明 e 不是 $ax^2 + bx + c = 0$ 的根就可以了.

若 a, b, c 不是全为 0 的整数, 考虑数

$$E_n = n!(ae + ce^{-1}), a, c \text{ 不同时为 } 0, \text{ 右边展开, 有}$$

$$E_n = s_n + r_n, s_n = aa_n + c\alpha_n,$$

$$R_n = ab_n + c\beta_n.$$

其中 s_n 为整数,

$$|R_n| \leq |ab_n| + |c\beta_n| < \frac{2|a| + |c|}{n+1}$$

对于所有 $\geq 2|a| + |c|$ 的 n , 都有

$$|R_n| < 1.$$

$$\begin{aligned} nR_{n+1} - R_n &= a(nb_{n+1} - b_n) + c(n\beta_{n+1} - \beta_n) \\ &= a + (-1)^n c. \end{aligned}$$

可知 R_{n+1}, R_n, R_{n+1} 中至少有一个不等 0.

因为 a, c 不能同时为 0, 从而证明了存在一个正整数 λ , 使 E_λ 不是整数, 故有

$$b + \frac{E_\lambda}{\lambda!} = ae + b + ce^{-1} \neq 0.$$

所以 $ae^2 + be + c \neq 0$.

所以 e 是超越数.

3.4 结论

康托已证明, 一切代数数的全体是可数的, 一切实数是不可数的, 所以必有一部分实数为超越数. 目前已知除了 e 为超越数外, α^β 也是超越数的条件为 $\alpha = e, \beta = \pi$.

4. 求最大公约数

4.1 定义

两个自然数 a, b 的公约数是指同时整除 a, b 的自然数 d 而言的, 但是 a, b 的公约数可能有许多个, 其中最大的一个叫最大公约数, 记为 $d = \gcd(a, b)$. 对任意一对自然数, 必定有一个公约数 1, 如果 $\gcd(a, b) = 1$, 称 a, b 是互质的, 两个自然数互质并不意味着每个自然数都是素数. 例如 $\gcd(4, 15) = 1$, 但 4, 15 均不是素数, 因为每个非零数都是零的因子. 所以有: 当 $a \neq 0$ 时, $\gcd(a, 0) = a$.

4.2 求最大公约数

我们知道, 一个大数的因式分解比较困难, 但是求最大公约数, 只要利用除法定理, 就比较容易了. 除法定理是说: a, b 为任意两个自然数, 必存在唯一的 g 和 r , 且 $0 \leq r < b$, 使 $a = b \cdot g + r$. 其中 g 代表商, r 代表余数.

因为 $a = b \cdot g + r$, 必有 $\gcd(a, b) = \gcd(b, r)$, 类推下去, 在公约数集中找到最大公约数.

例 4.1 求 285, 255 最大公约数.

解 用二数中最小的作除数, 有

$$285 = 255 \cdot 1 + 30$$

$$255 = 30 \cdot 8 + 15$$

$$30 = 15 \cdot 2 + 0.$$

由倒数第二项知:

$$\gcd(285, 255) = 15.$$

例 4.2 求 110, 42 的最大公约数

解 $110 = 42 \cdot 2 + 26$

$$42 = 26 \cdot 1 + 16$$

$$26 = 16 \cdot 1 + 10$$

$$16 = 10 \cdot 1 + 6$$

$$10 = 6 \cdot 1 + 4$$