数学解难102例

SHUXUE JIENAN 102 LI

韩文法 编著

郑州大学出版社

数学解难

SHUXUE JIENAN 102 LI

102例

韩文法 编著

郑州大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学解难102例/韩文法编著.—郑州:郑州大学出版社,2010.1
ISBN 978-7-5645-0179-2

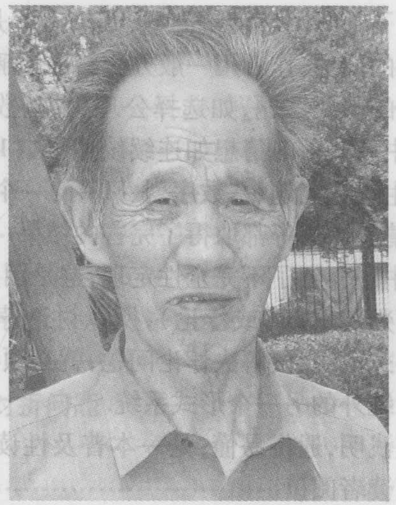
Ⅰ.数…　Ⅱ.韩…　Ⅲ.数学-普及读物　Ⅳ.01-49

中国版本图书馆CIP数据核字(2009)第235078号

郑州大学出版社出版发行
郑州市大学路40号　　　　邮政编码:450052
出版人:王　锋　　　　发行部电话:0371-66966070
全国新华书店经销
黄委会设计院印刷厂印制
开本:710 mm×1 010 mm　　1/16
印张:22.75
字数:461千字
版次:2010年1月第1版　　　　印次:2010年1月第1次印刷

书号:ISBN 978-7-5645-0179-2　　　　定价:46.00元
本书如有印装质量问题,请向本社调换

个人简历



韩文法,男,1922 年 11 月出生,中共党员,河南唐河人,1949 年毕业于河南大学数学系.曾任河南化学研究所副所长、河南数学研究所所长、河南数学会副理事长等职.

1990 年以后,在数论猜想研究方面取得了较好的结果,并有所突破.如《(1+1)问题》、《孪生素数问题讨论》、《麦生素数问题》、《角谷猜想的证明》、《欧拉猜想的证明》、《$n=N^2+P$ 的破解》、《FLT 的一个证明》、《整数因子和问题》、《由黎曼猜想谈起》、《n^4+1 中的素数个数问题》、《黑洞数》、《$\pi(x)+\pi(y)\geqslant\pi(x+y)$ 的证明》、《$\aleph_{\alpha}^{\aleph_{\beta}}$ 的计算》等.这些疑难问题都是貌似简单,长期得不到解决,经作者艰辛探索用一般数学方法解决的.

前　言

本书汇集了部分数学疑难问题，其中有些是数学历史上长期未曾解决的问题，作者用一般方法给出了解答．书中还介绍了集合论中的一些课题，如选择公理、大基数公理、ZFC 公理系统等．其中一些著名猜想如连续统假设、(1 + 1)问题、素数对问题、麦生素数问题、基数序列、FLT 的一个证明、梁定祥猜想、由黎曼猜想谈起等都取得了完善的结果．

另外，书中还介绍了不完全性定理，这是因为每个形式系统都存在不可判定命题(或悖论)，所以讨论悖论时，要考虑悖论所在的形式系统，要解决悖论问题，就必须找出不同于悖论所在形式系统外的另一个形式系统．

本书叙理浅明，通俗易懂，是一本普及性读物，适合中等以上数学程度读者阅读．

由于多数问题含有作者见解，错误在所难免，恳请读者批评指正．

编　者

2009 年 10 月

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

目　　录

1. 零的知识

零是一个特殊的数. 它不是正数,也不是负数,而是正数和负数的分界数. 一般我们不把零算作自然数. 从整数的排列位置上看,零是整数,而且是偶数,不是奇数.

在初等数学里,零不能当除数. 不少学生只知其然,不知其所以然. 其实,这是由除法定义所决定的. 现论述如下:

若 a,b,c 均表示整数,则除法定义为:$\frac{a}{b}=c$,即 $a=bc$. ① 当 $a\neq 0$ 时,若 $b=0$,则 $bc=0$,因而出现 $a\neq bc$. 这意思是说:被除数不是0,除数是0,商是不存在的. ② 当 $a=0$ 时,若 $b=0$,则$\frac{0}{0}=c$,即 $0=0\times c$,显然,c 为任意数均成立. 这意思是说:除数为0,被除数也为0时,商为不定值. 它违背了四则运算结果唯一性原则. 由 ①、② 可知,不论$\frac{a}{0}$ 或$\frac{0}{0}$,即0为除数都是无意义的.

零在运算中,为了使运算有意义,有一些规定. 如:

(1) $\sum\limits_{1}^{n}0=0$,但 $\sum\limits_{1}^{\infty}0\neq 0$($\sum$ 表示和);

(2) $\prod\limits_{1}^{n}0=0$,但 $\prod\limits_{1}^{\infty}0\neq 0$($\Pi$ 表示积);

(3) a^0,当 $a\neq 0$ 时取值为1,当 $a=0$ 时,无意义;

(4) $0!=1$,可以作除数;

(5) -0,$+0$ 意义不同,所以 $-0\neq +0$.

2. 无限小和无穷大

无限小和无穷大是数学分析中的两个重要概念，无限小记为 0^*，无穷大记为 ∞，二者统称非标准数. 把 0^* 和 ∞ 作为实数运算时，就成为非标准分析的部分内容了.

2.1 无限小 0^*

无限小 0^* 有三种，即

（1）正型无限小，记为 $0^*(>0)$，即 $0^*(>0)$ 是大于0，而小于所有正数的“数”.

（2）负型无限小，记为 $0^*(<0)$，即 $0^*(<0)$ 是小于0，并大于所有负数的“数”.

（3）无限小 0^* 是这样的数，其绝对值 $|0^*|$ 大于0，并小于所有正数.

2.2 无穷大 ∞

无穷大 ∞ 也有三种，即

（1）正无穷大，记为 $+\infty$，即 $+\infty$ 是大于所有正数的“数”.

（2）负无穷大，记为 $-\infty$，即 $-\infty$ 是小于所有负数的“数”.

（3）无穷大 ∞ 是这样的“数”，其绝对值 $|\infty|$ 大于所有正数.

2.3 无限小的运算

在运算过程中，无限小有：

$0^*+0^*=0^*$（或0）

$0^*-0^*=0^*$（或0）

$0^*\times 0^*=0^*$（或0）

$0\times 0^*=0^*\times 0=0$

$c\times 0^*=0^*\times c=0^*(c\neq 0)$

$0^*\div$某正数 $=0^*$

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

$0^* \div 0^*$ 未定.

2.4 无穷大的运算

在运算过程中,无穷大有:

$c \times \infty = \infty \ (c \neq 0)$

$(+\infty) + (+\infty) = +\infty$

$(-\infty) + (-\infty) = -\infty$

$(+\infty) - (+\infty)$ 未定

$\infty \times \infty = \infty$

$\infty + c = \infty$

$\infty + 0^* = \infty$

$\infty \times 0^*$ 未定

$\infty \div \infty$ 未定

$1 \div \infty = 0^*$

$1 \div 0^* = \infty$.

2.5 无限小的比较

α,β是均为趋向0的变量,若$\dfrac{\alpha}{\beta}$的极限值为常数,则α,β为同级无限小;若$\dfrac{\alpha}{\beta}$的极限值为0,则说α是比β较高级无限小.

2.6 无穷大的比较

若u,v为无穷大:

当$\dfrac{u}{v} \to k(k \neq 0)$,$u,v$为同级无穷大;

当$\dfrac{u}{v} \to 0$时,说u是比v低级无穷大.

2.7 0^* 和 ∞ 的无限性是矛盾的

这个问题可以用以下方法来表述,即

0^*：设想一个动点从 1 向 0 移动，当动点到达 0 时，它通过无穷点集$\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots,\frac{1}{n},\cdots\}$中的一切点，因为$\frac{1}{n}$和自然数 n 一一对应，所以动点移动到 0 的过程中，它走过$\frac{1}{n}(n=1,2,3,\cdots)$，最后必然会到 0 点，到达 0 点是动点的阶段性飞跃，这就是说自然数集的形成过程包含两个阶段，一个是延伸，一个是穷竭，无穷性是飞跃形成的，表现形式为

$$\{1,2,3,(\cdots)_0,n,(\cdots)_1\}.$$

n 代表任意自然数；

$(\cdots)_0$ 表示自然数的不断延伸，即量变阶段；

$(\cdots)_1$ 表示扬弃了有限性重复发生的飞跃阶段.

∞：可以看到自然数 n 通过自然数集得到无穷大，表现形式也为

$$\{1,2,3,(\cdots)_0,n,(\cdots)_1\}.$$

$(\cdots)_0$ 是量变阶段；

$(\cdots)_1$ 为飞跃阶段.

所以 0^* 和 ∞ 都可以通过自然数序列的无限过程的飞跃阶段$(\cdots)_1$来完成的. 但$(\cdots)_1$虽蕴含了无限性，$(\cdots)_1$中成员为有限的序号. 有限序号增长到无限又否定了序号自身的有限性. 因此说无限性概念是矛盾的，它需要用有限来构成.

3. e 的无理性

3.1 定义

令 $x_n = (1+\frac{1}{n})^n$，则

$$
\begin{aligned}
x_n &= (1+\frac{1}{n})^n \\
&= 1 + n\cdot\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}(\frac{1}{n})^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}(\frac{1}{n})^3 + \cdots + \\
&\quad \frac{n(n-1)\cdots(n-n+1)}{n!}(\frac{1}{n})^n \\
&= 1 + 1 + \frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n}) + \frac{1}{3!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n}) + \cdots + \\
&\quad \frac{1}{n!}(1-\frac{1}{n})\cdots(1-\frac{n-1}{n})
\end{aligned}
$$

若以 $n+1$ 代替 n，则

$$
\begin{aligned}
x_{n+1} = 1 + 1 &+ \frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n+1}) + \frac{1}{3!}(1-\frac{1}{n+1})(1-\frac{2}{n+1}) + \cdots + \\
&\frac{1}{(n+1)!}(1-\frac{1}{n+1})\cdots(1-\frac{n}{n+1}).
\end{aligned}
$$

因为 $1-\frac{s}{n} \leqslant 1-\frac{s}{n+1}$

所以 $x_{n+1} > x_n$.

因为

$$
\begin{aligned}
x_n &\leqslant 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} \\
&< 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} \\
&< 3.
\end{aligned}
$$

所以 x_n 有上界，它的极限小于 3，用 e 表示，即

$$e = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n.$$

容易看出,e 的值介于 2 与 3 之间,即

$$e = 2.718281828459045\cdots$$

3.2 e 是无理数

把 $e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$ 分为两部分,即

$e = s_n + r_n$,其中 $s_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$, $r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!}$.

因为 $$r_n = \frac{1}{(n+1)!}\left(1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \cdots\right) < \frac{e-1}{(n+1)!}.$$

所以 $e = s_1 + r_1 < 2 + \frac{e-1}{2}$,$e < 3$.

因此 $0 < r_n < \frac{2}{(n+1)!}$,

令 $n!s_n = a_n$, $n!r_n = b_n$.

而 a_n 是整数,

$$0 < b_n < \frac{2}{n+1} \leqslant 1 \quad (n = 1,2,\cdots).$$

这就证明了 $n!e = a_n + b_n$ 不是一个整数.

从而知道 e 不是一个整数,即 e 是无理数.

3.3 e 是超越数

我们知道,凡满足整系数代数方程的数,叫代数数. 例如 $x^2 - 4x - 3 = 0$ 的根 $2 \pm \sqrt{7}$ 就叫代数数. 反之,不满足整系数代数方程的数,称超越数. 下面我们将证明 e 是超越数:

显然,只需要证明 e 不是 $ax^2 + bx + c = 0$ 的根就可以了.

若 a,b,c 不是全为 0 的整数,考虑数

$E_n = n!(ae + ce^{-1})$,a,c 不同时为 0,右边展开,有

$$E_n = s_n + r_n,\ s_n = aa_n + c\alpha_n,$$

$$R_n = ab_n + c\beta_n.$$

其中 s_n 为整数,

$$|R_n| \leqslant |ab_n| + |c\beta_n| < \frac{2|a| + |c|}{n+1}$$

对于所有 $\geqslant 2|a| + |c|$ 的 n,都有

$$|R_n| < 1.$$

又 $nR_{n-1} - R_n = a(nb_{n-1} - b_n) + c(n\beta_{n-1} - \beta_n)$

$$= a + (-1)^n c.$$

可知 R_{n-1}, R_n, R_{n+1} 中至少有一个不等 0.

因为a,c不能同时为0,从而证明了存在一个正整数λ,使E_λ不是整数,故有

$b + \frac{E\lambda}{\lambda!} = ae + b + ce^{-1}$ 不等于 0.

所以 $ae^2 + be + c \neq 0$.

所以 e 是超越数.

3.4 结论

康托已证明,一切代数数的全体是可数的,一切实数是不可数的,所以必有一部分实数为超越数. 目前已知除了 e 为超越数外,α^β 也是超越数的条件为 $\alpha = e, \beta = \pi$.

4. 求最大公约数

4.1 定义

两个自然数a,b的公约数是指同时整除a,b的自然数d而言的，但是a,b的公约数可能有许多个，其中最大的一个叫最大公约数，记为$d = \gcd(a,b)$. 对任意一对自然数，必定有一个公约数1，如果$\gcd(a,b) = 1$，称a,b是互质的，两个自然数互质并不意味着每个自然数都是素数. 例如$\gcd(4,15) = 1$，但4,15均不是素数，因为每个非零数都是零的因子. 所以有：当$a \neq 0$时，$\gcd(a,0) = a$.

4.2 求最大公约数

我们知道，一个大数的因式分解比较困难，但是求最大公约数，只要利用除法定理，就比较容易了. 除法定理是说：a,b为任意两个自然数，必存在唯一的g和r，且$0 \leqslant r < b$，使$a = b \cdot g + r$. 其中g代表商，r代表余数.

因为$a = b \cdot g + r$，必有$\gcd(a,b) = \gcd(b,r)$，类推下去，在公约数集中找到最大公约数.

例 4.1 求 285,255 最大公约数.

解 用二数中最小的作除数，有

$$285 = 255 \cdot 1 + 30$$
$$255 = 30 \cdot 8 + 15$$
$$30 = 15 \cdot 2 + 0.$$

由倒数第二项知：

$$\gcd(285,255) = 15.$$

例 4.2 求 110,42 的最大公约数

解 $110 = 42 \cdot 2 + 26$

$42 = 26 \cdot 1 + 16$

$26 = 16 \cdot 1 + 10$

$16 = 10 \cdot 1 + 6$

$10 = 6 \cdot 1 + 4$

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com