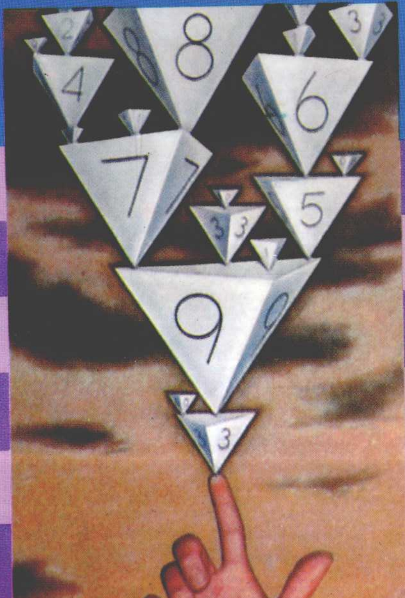
中学数学
解题典型方法例说

沈文选/编著　　李求来/审定



湖南师范大学出版社

中学数学典型解题方法例说

沈文选　编著
李求来　审订

湖南师范大学出版社

中学数学解题典型方法例说

沈文选　编著
李求来　审订
责任编辑：肖家元

湖南师范大学出版社出版发行
（长沙市岳麓山）
湖南省新华书店经销　　长沙市华中印刷厂印刷
787×1092　32开　9.75印张　228千字
1996年6月第1版　1998年6月第4次印刷
印数：16201—21250册
ISBN7—81031—507—2/O·024
定价：8.00元

前　言

数学解题在建立和发展学习者的数学认知结构,形成和提高数学思维能力,培养和造就创造性精神等方面起着不可取代的作用.数学解题是中学数学教学活动的一个重要组成部分和主要形式,是学习数学课程的一个“实践性”环节.通过解题,可以使学习者独立地、积极地进行认知活动,深入地理解数学概念,全面系统地掌握数学基础知识,实际地学习数学的本质、精神和思想.从而有效地培养诸种能力,以便于今后形成运用数学知识、思想来分析和解决社会生活、经济建设和科学研究中的实际问题的能力,从而适应现代社会生产的多样性和变化性,从事创造性劳动.

数学解题之所以有如此巨大威力,最根本的就是数学解题所采用的方法及其内蕴的思想,是数学学习的生命线和灵魂,是数学知识转化为认识客体、变革客体的能力的中介.数学解题方法是人类在解题实践中积累起来的宝贵精神财富,借助于它,使人们发现一个又一个新的结果,解决一个又一个面临的新问题.因此,学习者在加强数学基础知识学习和基本技能训练的同时,读一点解题方法之类的参考读物,学一点方法论,是十分必要的.

本书比较系统地介绍了中学数学解题中的十种典型方法,其中也熔进了作者在初等数学解题研究中的一些研究成果.作者希望能通过这些典型方法,举一反三,触类旁通,产生启发和引导效果,极大地提高读者的解题能力,从而提高数学素养.本书的例题,都在中学数学范围之内,初中学生也能读懂其中的一

部分. 许多例题，是比较典型的初等数学问题，作者也希望读者通过这些例题及求解，在提高解题能力的同时，也扩大一点知识视野.

限于作者的学识水平，书中的错漏之处在所难免，祈盼读者不吝指正.

作者

1996 年 3 月

目　　录

第一章 化归法

我们在求解数学问题时，先对题设信息进行搜集，再加工处理，并不断地变换输出，一步步推演转化，最后使条件和目标建立起和谐的联系而获得问题的解决. 这种加工的方法或变换的手段，化归法占据着极为重要的地位. 因为，我们在解决众多的数学问题时，总是把它们化归为已解决了的问题而求解的. 例如，我们在一元一次方程解法的基础上，学习解二元一次方程组就是用加减消元或代入消元减少一元，化归为一元一次方程来求解的.

我们在对问题作细致观察的基础上，展开丰富的联想(譬如接近联想、类似联想、对比联想、关系联想、特征联想等等)，以求唤起对有关旧知识的回忆，开启思维的大门，顺利地借助旧知识、旧经验来解决面临的新问题的解题方法，我们称之为“化归法”.

化归法也是数学家处理问题的一种独特的思维方法. 匈牙利数学家罗莎·彼得(Rosza Peter)曾对此作过十分生动形象的描述：“假设在你面前有煤气灶、水龙头、水壶和火柴，现在的任务是要烧水，你应当怎样去做?”问题很简单，谁都知道“先在水壶中放上水，点燃煤气，再把水壶放到煤气灶上”. 接着，罗莎又提出第二个问题：“假设所有的条件都和原来一样，只是水壶中已有了足够的水，这时，你又应该怎样去做?”对于这一问题，人们往往会回答说：“点燃煤气，再把水壶放到煤气灶上. ”但是，罗莎认为这并不是最好的回答，因为“只有物理学家才会这样

做，而数学家则会倒去壶中的水”，并且声称：“我已把后一问题化归成先前的问题了．”

罗莎的比喻固然有点夸张，但却道出了化归法的基本特征：在解决一个问题时，人们的眼光并不落在问题的结论上，而是去寻觅、追溯一些已知的结果．尽管向前走几步也许能达到目的，但我们也情愿退一步回到原来已知的问题上去．化归法解决问题的基本过程如下：

$$\begin{tikzcd}
\boxed{\text{新问题}} \arrow[r, "\text{化归}"] \arrow[d, dotted, "\text{困难}"] & \boxed{\text{已知问题}} \arrow[d, dotted, "\text{容易}"] \\
\boxed{\text{解　答}} & \boxed{\text{解　答}} \arrow[l, "\text{还原}"]
\end{tikzcd}$$

寻觅、追溯一些已知的结果，常从逐步变形转化、问题拆分、联想类比等等中获得．

例 1　在$\triangle ABC$中，CD是$\angle C$的平分线，$\angle A=60^\circ$，$BC=a$，$CA=b$，$AB=c$．$b<x<c$是关于x的不等式$x^2-(m+1)x+3m+4<0$的解集．$\triangle ABC$的面积为$10\sqrt{3}$，求(1)m的值；(2)a、b、c的值．

分析：本题条件比较多，涉及的知识点较多，综合性强，但通过一系列变形转化、化归，亦不难寻得入门之道．

解：利用二次不等式与二次方程之间的内在联系变形转化、化归，可令$x^2-(m+1)x+3m+4=0$，则知

$$b+c=m+1,\ bc=3m+4.$$

又由$\frac{1}{2}bc\cdot\sin60^\circ=10\sqrt{3}$得$bc=40$，则可得

$$m=12,\ 且\ b+c=13.$$

再由$bc=40$，$b+c=13$，化归为解一元二次方程

$$t^2-13t+40=0,$$

求得　$b=8, c=5$　或 $b=5, c=8$.

最后，由余弦定理 $a^2=b^2+c^2-2bc\cdot\cos A$，可求得 $a=7$.

例 2　设函数 $y=ax^5+bx^3+x+5, x\in R$，当 $x=-3$ 时，$y=7$. 试求当 $x=3$ 时，y 的值.

分析：显然，由已知条件无法确定字母 a,b 的值，直接求出 y 的值不易. 但注意到函数 $f(x)=ax^5+bx^3+x$ 是奇函数，它有性质 $f(-x)=-f(x)$，这是我们熟悉的或已知的，于是我们得化归解法：

解：令 $f(x)=y-5=ax^5+bx^3+x, x\in R$，则 $f(x)$ 为奇函数，从而有 $f(-x)=-f(x)$. 即有

$$f(-3)=7-5=2, f(3)=-f(-3)=-2,$$

即　$$y-5=a\cdot 3^5+b\cdot 3^3+3=-2，亦即\quad y=3.$$

$\therefore$　当 $x=3$ 时，$y=3$.

例 3　求证：若对常数 m 和任意的 x，等式 $f(x+m)=\dfrac{1+f(x)}{1-f(x)}$ 成立，则 $f(x)$ 是周期函数.

分析：周期函数令我们联想起熟悉的三角函数（虽然此处的周期函数 $f(x)$ 并不一定就是三角函数，但是作为周期函数的典型代表，回忆有关三角函数的性质，总会对我们处理周期函数的问题有所启发），而式子 $f(x+m)=\dfrac{1+f(x)}{1-f(x)}$，又令我们联想起三角函数式中熟悉的 $\mathrm{tg}(x+\dfrac{\pi}{4})=\dfrac{1+\mathrm{tg}x}{1-\mathrm{tg}x}$，周期函数 $\mathrm{tg}x$ 的周期 π 恰是 $\dfrac{\pi}{4}$ 的 4 倍. 这就提醒我们，只要能够证明 $f(x+4m)=f(x)$，则 $f(x)$ 就是以 $4m$ 为周期的函数（等式 $f(x+m)=\dfrac{1+f(x)}{1-f(x)}$ 的左边含常数 m，而右边与 m 无关，也会使人想到

$f(x)$的周期取决于 m，最简单的情形当然是周期为 m 的若干倍的情形，倍数可通过试验得出）. 于是，我们得到如下化归解法：

解：由 $f(x+4m)=f[(x+3m)+m]=\dfrac{1+f(x+3m)}{1-f(x+3m)}$，

$$f(x+3m)=f[(x+2m)+m]=\frac{1+f(x+2m)}{1-f(x+2m)},$$

$$f(x+2m)=f[(x+m)+m]=\frac{1+f(x+m)}{1-f(x+m)}$$

$$=\frac{1+\dfrac{1+f(x)}{1-f(x)}}{1-\dfrac{1+f(x)}{1-f(x)}}=\frac{2}{-2f(x)}=-\frac{1}{f(x)},$$

从而 $f(x+4m)=\dfrac{1+f(x+3m)}{1-f(x+3m)}$

$$=\frac{1+\dfrac{1+f(x+2m)}{1-f(x+2m)}}{1-\dfrac{1+f(x+2m)}{1-f(x+2m)}}$$

$$=\frac{1+\dfrac{f(x)-1}{f(x)+1}}{1-\dfrac{f(x)-1}{f(x)+1}}=f(x).$$

即 $f(x)$确是以 $4m$ 为周期的周期函数.

化归法的应用非常广泛，采用的方式也各种各样，如设想化归、映射化归、构造化归、数形互化，等等. 常用的手法还有同化、同理、同解、同构、同效等. 在这里，我们从思维方面，重点介绍化归法的四种形式，即纵向化归、横向化归、同向化归、逆向化归.

一、纵向化归

纵向化归是把面临的新问题，通过减元（消元）、降格（或降

次、降维、降阶)等加工的方法或手段化归为已经解决了的问题，或是化归为熟悉的、简单的、特殊的、具体的问题等来处理，最后通过对新问题的解决而将原问题解决的解题方法.

1. 减元

例 4　求下列方程组的所有实数解：

$$\begin{cases} x+y+z=3, & (1) \\ x^2+y^2+z^2=3, & (2) \\ x^5+y^5+z^5=3, & (3) \end{cases}$$

分析：由题设，满足(3)的 x,y,z 必须满足(1)，(2). 因而解此方程组首先化归为解由(1)，(2)组成的方程组，此时又可化归为解二元方程组. 不妨设 x,y 为未知元，于是得到解法：

解：由(1)、(2)可得

$$x+y=3-z, \tag{4}$$

$$x^2+y^2=3-z^2. \tag{5}$$

由(4)、(5)有

$$xy=\frac{1}{2}[(x+y)^2-(x^2+y^2)]=z^2-3z+3. \tag{6}$$

由(4)、(6)知，x,y 是一元二次方程

$$t^2-(3-z)t+z^2-3z+3=0$$

的两根，而 $x,y\in R$ 当且仅当

$$\Delta=(3-z)^2-4(Z^2-3z+3)\geqslant 0.$$

$\therefore\quad (z-1)^2\leqslant 0$，即 $z=1$，

$\therefore\quad x=y=1.$

可见(1)、(2)只有实数解(1,1,1)，它也适合(3)，故原方程组的唯一实数解为(1,1,1).

2. 降次

例 5　已知 $a+b>2$，求证 $a^4+b^4>2$.

分析：本题条件中的 $a+b$ 是一次式，结论中的 a^4+b^4 是四次式，从一次式的性质直接推断四次式的性质，跨步似乎太大了些，能否把步子放小一些，四次式又是双二次式，于是通过降次化归得如下解法：

证明：由 $a+b>2$，有 $(a+b)^2>4$.

又　　$(a-b)^2\geqslant 0$ 与上式相加，得

$2(a^2+b^2)>4$，即 $a^2+b^2>2$.

于是　　$(a^2)^2+(b^2)^2>2$，即 $a^4+b^4>2$.

3. 降维

例 6　如图 1-1(1)，正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 a，求异面直线 BD 与 B_1C 的距离.

分析：BD 与 B_1C 是两条异面直线，要求它们之间的距离，必须将其转化化归. 为此，考察平面 A_1BD 与 CB_1D_1. 由于 $BD\subset$平面 A_1BD，$B_1C\subset$平面 CB_1D_1，又平面 A_1BD 与平面 CB_1D_1 似乎平行，所以只要证明平面 $A_1BD\parallel$平面 CB_1D_1，就可将 BD 与 B_1C 间的距离转化为平面 A_1BD 与平面 CB_1D_1 间的距离. 于是，就需作出两平面的公垂线段. 但在原图中无法看出公垂线段的准确位置，故我们重点考察对角截面 A_1ACC_1. 由此平面图形可知道公垂线段的准确位置，并可求出其长度. 此时，我们由立体图形化归为平面图形得如下解法：

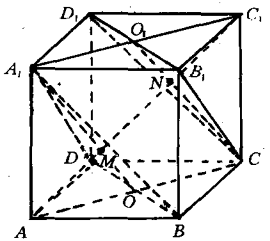
解：由正方体的性质，知 $BD\parallel B_1D_1$，$A_1B\parallel D_1C$.

∵　　$BD\cap A_1B=B$，$B_1D_1\cap D_1C=D_1$，

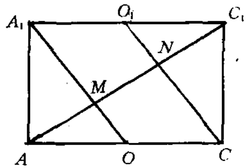
∴　　平面 $A_1BD\parallel$平面 CB_1D_1.

连结 AC_1，分别交平面 A_1BD 和平面 CB_1A_1 于 M，N.

∵　　C_1C，AC_1 分别是平面 $ABCD$ 的垂线与斜线，AC 是



(1)



(2)

图 1-1

AC_1 在平面 $ABCD$ 上的射影，$AC\perp BD$.

$\therefore\qquad AC_1\perp BD$.

同理 $AC_1\perp A_1D$. 故 $AC_1\perp$ 平面 A_1BD.

$\because\qquad$ 平面 $A_1BD\parallel$ 平面 CB_1D_1，$\therefore\quad AC_1\perp$ 平面 CB_1D_1，

$\therefore\qquad MN$ 就是平面 A_1BD 与平面 CB_1D_1 的公垂线段.

由图 1-1(2)，由于 $A_1O_1=O_1C_1$，$AO=OC$，

$$\therefore\qquad AM=MN=NC_1=\frac{1}{3}AC_1=\frac{\sqrt{3}}{3}a,$$

$\therefore$ 平面 A_1BD 与平面 CB_1D_1 间的距离为 $\frac{\sqrt{3}}{3}a$，从而异面直线 BD 与 B_1C 的距离为 $\frac{\sqrt{3}}{3}a$.

4. 降格

例 7　设复数 Z_1 和 Z_2 满足关系式 $Z_1\overline{Z_2}+\overline{A}Z_1+A\overline{Z_2}=0$，其中 A 为不等于 0 的复数. 证明：

$$\frac{Z_1+A}{Z_2+A}=\left|\frac{Z_1+A}{Z_2+A}\right|.$$

分析：在代数系统内，复数模是实数绝对值概念的发展. 因此，要证明本题结论，可从纵向联想到绝对值概念，于是，原问题

化归为只要证明$\frac{Z_1+A}{Z_2+A}$是大于或等于零的实数即可.

证明: $\because$

$$\frac{Z_1+A}{Z_2+A}=\frac{(Z_1+A)\overline{(Z_2+A)}}{(Z_2+A)\overline{(Z_2+A)}}$$

$$=\frac{(Z_1+A)(\overline{Z_2}+\overline{A})}{|Z_2+A|^2}$$

$$=\frac{Z_1\overline{Z_2}+\overline{A}Z_1+A\overline{Z_2}+|A|^2}{|Z_2+A|^2}$$

$$=\frac{|A|^2}{|Z_2+A|^2}>0.$$

$\therefore$ $$\left|\frac{Z_1+A}{Z_2+A}\right|=\frac{Z_1+A}{Z_2+A}.$$

上述四例,均有多种解法,但相比之下,均没有如上化归解法简捷明快.

二、横向化归

横向化归就是通过对命题的有关量进行转换,等价变换论题,运用同构变换等手法将生疏、复杂、困难的问题转化为熟悉、简单、容易的问题来达到简捷求解目的的化归方法.

1. 量的形式转换

在解题时,恰当地将命题中有关量、变元及其结构式转换一下形式,这就是横向化归常运用的量的形式转换手法.

例 8　解关于实数 x 的方程

$$x^4-6x^3-2(a-3)x^2+2(3a+4)x+2a+a^2=0,$$

其中 $a\in R$.

分析:如果直接解关于 x 的四次方程,这是较困难的,但转换 x 与 a 的地位形式,把原方程看作关于 a 的二次方程,则可得如下简解:

解:把原方程整理成关于 a 的二次方程

$$a^2-2(x^2-3x-1)a+(x^4-6x^3+6x^2+8x)=0.$$

方程左边利用十字相乘法分解得

$$(a-x^2+2x+2)(a-x^2+4x)=0.$$

从而化归为两个关于 x 的二次方程:

$$x^2-2x-2-a=0,$$

$$x^2-4x-a=0.$$

解上述两个方程得

当 $a\geqslant-3$ 时,原方程有四个实根:

$x_{1,2}=2\pm\sqrt{a+4}$, $x_{3,4}=1\pm\sqrt{3+a}$;

当 $-4\leqslant a\leqslant-3$ 时,原方程有两个实根

$x_{1,2}=2\pm\sqrt{a+4}$;

当 $a<-4$ 时,原方程无实根.

例 9 若 $9\cos B+3\sin A+\operatorname{tg}C=0$,$\sin^2A-4\cos B\cdot\operatorname{tg}C=0$,求证:$\operatorname{tg}C=9\cos B$.

分析:本题如果用三角公式证明,不仅代换复杂,而且很难找出 A,B,C 三角之间的关系,不易达到目的.注意到题目中有关系数特征,令 $3=a$,即把常数转换看成变数,可得如下简捷证法:

解:设 $3=a$,则得到关于 a 的一元二次方程

$$a^2\cdot\cos B+a\cdot\sin A+\operatorname{tg}C=0.$$

$\because$ $\sin^2A-4\cos B\cdot\operatorname{tg}C=0$,即判别式 $\Delta=0$,

$\therefore$ 上述方程有两个相等实根.

$\because$ $a=-\dfrac{\sin A}{2\cos B}=3$,即 $\sin A=-6\cos B$.

$\therefore$ $9\cos B+3(-6\cos B)+\operatorname{tg}C=0$.

即 $\operatorname{tg}C=9\cos B$.

类似于上例，我们在解如下方程

$$\sqrt{x^2-10\sqrt{3}x+80}+\sqrt{x^2+10\sqrt{3}x+80}=20$$

时，将 5 看作 y^2，则有

$$\sqrt{(x-5\sqrt{3})^2+y^2}+\sqrt{(x+5\sqrt{3})^2+y^2}=20.$$

此式表示动点 $P(x,y)$ 到定点 $(-5\sqrt{3},0)$ 和 $(5\sqrt{3},0)$ 的距离之和等于 20，可见动点轨迹是椭圆，且标准方程为

$$\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{25}=1.$$

由 $y^2=5$，则得 $x=\pm4\sqrt{5}$，经检验知，它们都是原方程的根.

例 10　证明：顶点在单位圆上的锐角三角形的三个角的余弦之和小于该三角形的周长之半.

分析：如图 1-2，要证 $\cos A+\cos B+\cos C<\frac{1}{2}(AB+BC+CA)$，此式右边是关于线段的和式，是否可将左边的三角函数和式也转换为关于线段的和以便比较大小？

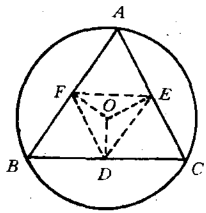


图 1-2

设 O 为单位圆的圆心，作 $OD\perp BC$ 于 D，$OE\perp AC$ 于 E，$OF\perp AB$ 于 F，则 $\angle BOD=\angle A$，即 $OD=\cos A$.

同理　$OE=\cos B$，　$OF=\cos C$.

于是，把欲证式化归为求证

$$OD+OE+OF<\frac{1}{2}(AB+BC+CA). \qquad (*)$$

由于 D,E,F 又分别是 $\triangle ABC$ 各边的中点，便有 $\frac{1}{2}AB=$