'91国优教材

泛函分析讲义

下册

张恭庆 郭懋正 编著

北京大学出版社

获全国高等学校第二届优秀教材奖国家优秀奖

泛函分析讲义

（下　册）

张恭庆　郭懋正　编著

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

书　　名：泛函分析讲义（下册）
著作责任者：张恭庆　郭懋正　编著
责 任 编 辑：刘　勇
标 准 书 号：ISBN 7-301-01261-6/O·216
出 版 发 行：北京大学出版社
地　　址：北京市海淀区中关村北京大学校内　100871
网　　址：http://cbs.pku.edu.cn
电　　话：邮购部 62752015　发行部 62750672　编辑部 62752021
电 子 信 箱：zpup@pup.pku.edu.cn
排 印 者：北京市银祥福利印刷厂
经 销 者：新华书店
850×1168　32 开本　10.375 印张　250 千字
1990 年 10 月第 1 版　2004 年 6 月第 8 次印刷
印　　数：27001—30000 册
定　　价：12.50 元

内 容 简 介

这是一本泛函分析教材，它系统地介绍线性算子理论的基础知识，算子半群以及连续函数空间上的 Wiener 测度和 Hilbert 空间上的 Gauss 测度。全书共分四章：Banach 代数；无界算子；算子半群以及无穷维空间上的测度论。本书注意介绍泛函分析理论与数学其它分支的密切联系，给出丰富的例子和应用，以培养读者运用泛函分析方法解决问题的能力。

本书适用于理工科大学数学系、应用数学系高年级本科生、研究生阅读，并且可供一般的数学工作者、物理工作者和科学技术人员参考。

序

这本书是由北京大学出版社出版的“泛函分析讲义”的下册（上册由张恭庆、林源渠合编）。它是为数学系有关专业研究生公共基础课编写的教材。和上册一样，我们坚持向读者介绍泛函分析理论的来源与背景，十分注意泛函分析作为近代分析的一个重要组成部分，是如何与数学的其它分支，特别是数学物理、偏微分方程以及随机过程理论紧密联系的。

基于这个指导思想，我们选择了交换 Banach 代数的 Gelfand 表示、（无界）自伴算子谱分解、自伴算子的扩张和扰动，以及算子半群的 Hille Yosida 定理和 Stone 定理作为基本内容，并以它们为中心展开有关重要概念和方法的讨论。书中第五章§6奇异积分算子，第七章§4 Markov过程和§5散射理论等都是有关理论在某些方面的应用。对于初学读者这部分内容可以略去；但对有关方向的读者它们则是极富启发性的参考资料。此外，第六章§3无界正常算子的谱分解定理，是为了完整起见，便于读者查阅而撰写的，在应用中并没有特别的重要性，讲授时亦可略去。最后一章介绍 Wiener 测度与 Hilbert 空间的 Gauss 测度。之所以挑选这一专题单独成章，是因为我们注意到函数空间的测度论和积分论在量子物理、统计力学以及随机过程论中日益增涨的重要性。它理所当然地应当是泛函分析研究的主要对象之一，但在一般教材中却并不多见。

我们认为要真正理解泛函分析中一些重要的概念和理论，灵活运用这一强有力的工具，其唯一的捷径就是深入了解它们的来源和背景，注意研究一些重要的、一般性定理的深刻的、具体的含义。不然的话，如果只是从概念到概念，纯形式地理解抽象定理证明的推演，那么学习泛函分析的结果只能“如入宝山而空

返”，一无所获。使用本书的读者，务请认真阅读围绕有关抽象概念所给出的具体例子以及若干重要的一般性定理在各个不同问题中的应用。否则选用此书则必事与愿违，徒劳无功。

本讲义自1983年起曾在北京大学数学系为有关专业研究生与高年级大学生讲授过多遍，根据我们的经验，每周3学时，在一学期内可把书中前三章的主要内容讲授完毕。大部分学生能够掌握本书的基本要求。

本讲义主要内容取材于下列各书：

1. F. Riesz, Sz-Nagy, B.; Leçon d' analyse fonctionnelle, Akadémiai Kiadó Budapest, 1952（中译本，第二卷，庄万等译：泛函分析讲义，科学出版社1981）。

2. N. Dunfold, J. T. Schwartz; Linear Operators, 1958, 1964, John's Wiley Interscience Publishers

3. K. Yosida; Functional Analysis, Fifth edition, 1978, Springer-Verlag

4. T. Kato; Peturbation Theory for Linear Operators, 1966, Springer-Verlag

5. M. Reed, B. Simon; Methods of Modern Mathematical Physics. Vol Ⅰ—Ⅲ, 1972-1979. Academic Press

第八章则参考Kuo Hui Hsiung(郭辉熊)；Gaussian Measures in Banach Spaces 1975, Springer-Verlag。

本书在取材上虽力求照顾数学系内不同专业方向大多数研究生的需要，但限于作者的学识与能力，偏颇之处在所难免。出版此书，愿起抛砖引玉的作用。我们深信必将有更有特色，更现代化，更加适用的教材大量涌现。

张恭庆
郭懋正 谨识

一九九〇年八月于中关园

目　　录

第五章　Banach 代数 ……………………………………………… (1)
§1　代数准备知识 ……………………………………………… (1)
§2　Banach 代数 ……………………………………………… (5)
2.1　Banach 代数的定义 ………………………………………… (5)
2.2　Banach代数的极大理想与 Gelfand 表示 ………………… (7)
§3　例与应用 ……………………………………………… (19)
§4　C^* 代数 ……………………………………………… (24)
§5　Hilbert 空间上的正常算子 ……………………………… (32)
5.1　Hilbert 空间上正常算子的连续算符演算 ……………… (32)
5.2　正常算子的谱族与谱分解定理 ………………………… (38)
5.3　正常算子的谱集 ………………………………………… (49)
§6　在奇异积分算子中的应用 ……………………………… (55)

第六章　无界算子 ……………………………………………… (60)
§1　闭算子 ……………………………………………… (60)
§2　Cayley 变换与自伴算子的谱分解 ……………………… (69)
2.1　Cayley 变换 ……………………………………………… (69)
2.2　自伴算子的谱分解 ……………………………………… (73)
§3　无界正常算子的谱分解 ………………………………… (82)
3.1　Borel 可测函数的算子表示 ……………………………… (82)
3.2　无界正常算子的谱分解 ………………………………… (89)
§4　自伴扩张 ……………………………………………… (98)
4.1　闭对称算子的亏指数与自伴扩张 ……………………… (98)
4.2　自伴扩张的判定准则 …………………………………… (108)
§5　自伴算子的扰动 ……………………………………… (120)

5.1 稠定算子的扰动 …………………………………………………… (121)
5.2 自伴算子的扰动 …………………………………………………… (125)
5.3 自伴算子的谱集在扰动下的变化 ………………………………… (132)
§6 无界算子序列的收敛性 ………………………………………… (141)
6.1 预解算子意义下的收敛性 ……………………………………… (141)
6.2 图意义下的收敛性 ……………………………………………… (152)

第七章 算子半群 ……………………………………………………… (155)

§1 无穷小生成元 …………………………………………………… (156)
1.1 无穷小生成元的定义和性质 …………………………………… (156)
1.2 Hille-Yosida 定理 ……………………………………………… (159)
§2 无穷小生成元的例子 …………………………………………… (171)
§3 单参数酉群和 Stone 定理 ……………………………………… (188)
3.1 单参数酉群的表示——Stone 定理 …………………………… (188)
3.2 Stone 定理的应用 ……………………………………………… (193)
Bochner定理 ……………………………………………………… (193)
Schrodinger方程的解 …………………………………………… (195)
遍历(Ergodic)定理 ……………………………………………… (196)
3.3 Trotter乘积公式 ………………………………………………… (204)
§4 Markov 过程 ……………………………………………………… (209)
4.1 Markov 转移函数 ………………………………………………… (211)
4.2 扩散过程转移函数 ……………………………………………… (218)
§5 散射理论 ………………………………………………………… (224)
5.1 波算子 …………………………………………………………… (224)
5.2 广义波算子 ……………………………………………………… (229)
§6 发展方程 ………………………………………………………… (240)

第八章 无穷维空间上的测度论 ……………………………………… (249)

§1 $C[0,T]$空间上的Wiener测度 ………………………………… (250)
1.1 $C[0,T]$空间上Wiener 测度和Wiener 积分 ………………… (250)
1.2 Donsker 泛函和Donsker-Lions 定理 ………………………… (260)

1.3 Feynman-Kac 公式 …………………………………………(268)
§2 Hilbert 空间上的测度 …………………………………………(277)
2.1 Hilbert-Schmidt 算子和迹算子……………………………(277)
2.2 Hilbert 空间上的测度…………………………………………(289)
2.3 Hilbert 空间的特征泛函………………………………………(293)
§3 Hilbert 空间上的Gauss测度 ………………………………(298)
3.1 Gauss 测度的特征泛函 ………………………………………(299)
3.2 Hilbert 空间上非退化Gauss 测度的等价性 ………………(304)

符号表……………………………………………………………(319)
索 引……………………………………………………………(321)

第五章　Banach 代数

本章讨论具有代数结构的Banach空间。这种空间叫做Banach代数。以前几章我们是把算子作为个体来讨论的，而Banach代数则把算子作为整体加以研究。我们将讨论 Banach 代 数 的基本性质，函数代数，C^*代数，算符演算以及谱理论。它们是近代数学物理如量子力学、统计物理的强有力工具，它们与数学其它分支如函数论、抽象调和分析、群表示论等有非常密切的联系。

§1　代数准备知识

Banach代数是带有一个范数的代数(定义见下节)。为了便于读者阅读，我们先复习一下有关的代数基本知识。

定义5.1.1　$\mathscr{A}$称为复数域$\mathbb{C}$上的一个代数，如果

(1) $\mathscr{A}$是$\mathbb{C}$上的一个线性空间；

(2) $\mathscr{A}$上规定了乘法：$\mathscr{A}\times\mathscr{A}\to\mathscr{A}$，满足：

$$(ab)c=a(bc);\qquad\text{(结合律)}$$

$$(a+b)(c+d)=ac+bc+ad+bd;\qquad\text{(分配律)}$$

$$(\lambda\mu)(ab)=(\lambda a)(\mu b),$$

$\forall\lambda,\mu\in\mathbb{C}$，$\forall a,b,c,d\in\mathscr{A}$.

若$\mathscr{A}$中有元素e，对于每一个$\mathscr{A}$中元a，满足$ea=ae=a$，则e叫做$\mathscr{A}$的幺元。若$\mathscr{A}$中存在幺元，则它是唯一的。设$\mathscr{A}$是有幺元的代数，$a\in\mathscr{A}$称为可逆的，如果存在$b\in\mathscr{A}$使得$ab=ba=e$。满足上述等式的b是唯一确定的，于是b称作为a的逆，记作a^{-1}。如果$\mathscr{A}$中每个非零元都可逆，$\mathscr{A}$叫作可除代数。

如果代数$\mathscr{A}$的乘法满足交换律，即$ab=ba$，$\forall a,b\in\mathscr{A}$，则$\mathscr{A}$称做为交换代数.

定义5.1.2 设$\mathscr{A}$,$\mathscr{B}$是两个代数，φ是$\mathscr{A}$到$\mathscr{B}$的映射，满足$\varphi(\lambda a+\mu b)=\lambda\varphi(a)+\mu\varphi(b)$以及$\varphi(ab)=\varphi(a)\varphi(b)$，$\forall a,b\in\mathscr{A}$，$\lambda,\mu\in\mathbb{C}$，称$\varphi$为$\mathscr{A}$到$\mathscr{B}$的同态映射.

如果同态映射φ既是单射的又是满射的，那么称φ是$\mathscr{A}$到$\mathscr{B}$的同构映射.

定义5.1.3 设$\mathscr{A}$是一个代数，$\mathscr{B}\subset\mathscr{A}$，并且依$\mathscr{A}$上的加法、乘法和数乘仍构成代数，则称$\mathscr{B}$为$\mathscr{A}$的一个子代数.

若φ是代数$\mathscr{A}$到代数$\mathscr{B}$内的同态映射，值域$\varphi(\mathscr{A})$显然是$\mathscr{B}$的一个子代数.

注1 若代数$\mathscr{A}$没有幺元，那么可以构造一个有幺元的代数$\hat{\mathscr{A}}$,使得$\mathscr{A}$同构于$\hat{\mathscr{A}}$的一个子代数. 在这个意义下，没有幺元的代数总可增添幺元. 事实上，令$\hat{\mathscr{A}}=\mathscr{A}\times\mathbb{C}$，并且规定如下$\hat{\mathscr{A}}$上的代数运算：

$$\alpha(a,\lambda)+\beta(b,\mu)=(\alpha a+\beta b,\alpha\lambda+\beta\mu),$$
$$(a,\lambda)(b,\mu)=(ab+\lambda b+\mu a,\lambda\mu),$$

$\forall(a,\lambda)$，$(b,\mu)\in\hat{\mathscr{A}}$，$\alpha,\beta\in\mathbb{C}$. 于是$e=(\theta,1)$是$\hat{\mathscr{A}}$中的幺元，而且映射$a\mapsto(a,0)$是$\mathscr{A}\to\hat{\mathscr{A}}$的一个单射同态，其中$\theta$是代数$\mathscr{A}$中的零向量.

定义5.1.4 设$\mathscr{A}$是一个代数，$J\subset\mathscr{A}$是它的一个子代数，满足：

(1) $\forall a\in\mathscr{A}$，$aJ\subset J$，$Ja\subset J$；

(2) $J\neq\mathscr{A}$，

则称J是$\mathscr{A}$的一个双边理想，简称为理想.

如果$\mathscr{A}$是交换代数，则可用条件：$\forall a\in\mathscr{A}$，$aJ\subset J$成立来代替上述定义中条件(1).

命题5.1.5 设$\mathscr{A}$,$\mathscr{B}$是代数，映射φ：$\mathscr{A}\to\mathscr{B}$是一个非平凡同态映射（即$\varphi^{-1}(\theta)\neq\mathscr{A}$），那么$\varphi$的核（$\ker\varphi\triangleq\varphi^{-1}(\theta)$）是$\mathscr{A}$的一个理想.

证明 $\varphi^{-1}(\theta)$ 显然是$\mathscr{A}$的子代数，由 φ 的非平凡性，条件(2)自然满足。此外，对于每一个$a\in\mathscr{A}$，因为

$$\varphi(ax)=\varphi(a)\varphi(x)=\theta,\quad \forall\, x\in\ker\varphi;$$

$$\varphi(xa)=\varphi(x)\varphi(a)=0,\quad \forall\, x\in\ker\varphi,$$

推得$a\ker\varphi\subset\ker\varphi$，$(\ker\varphi)a\subset\ker\varphi$。

命题5.1.6 设$\mathscr{A}$是有幺元代数，J是$\mathscr{A}$的一个理想，则

(1) $e\notin J$；

(2) 若$a\in\mathscr{A}$有逆元，则 $a\notin J$。

证明 (1) 如果 $e\in J$，由双边理想定义

$$a=ae\in J,\quad \forall\, a\in\mathscr{A}.$$

从而 $J=\mathscr{A}$。这与定义5.1.4的条件(2)矛盾。故 $e\notin J$。

(2) 如果 $a\in J$，则

$$e=a^{-1}a\in J,$$

这与(1)矛盾，故 $a\notin J$。

注 2 事实上"$J\neq\mathscr{A}$"，"$e\notin J$"，"具有逆元的 $a\notin J$"这三个命题是等价的。

设 J 是$\mathscr{A}$的一个理想，我们可以作出商空间 $\mathscr{B}=\mathscr{A}/J$。$\mathscr{B}$是由剩余类

$$[a]\triangleq\{b\in\mathscr{A}\,|\,b-a\in J\}$$

所组成的。因为 J 是理想，所以由 $a_1,a_2\in[a]$，$b_1,b_2\in[b]$推出

$$a_1b_1-a_2b_2=(a_1-a_2)b_1+a_2(b_1-b_2)\in J.$$

于是 a_1b_1 与 a_2b_2 属于同一类$[ab]$。因此$\mathscr{A}$上的乘法可以诱导出$\mathscr{B}$上的乘法，

$$[a][b]=[ab].$$

另外再规定$\mathscr{B}$上线性运算：

$$\lambda[a]+\mu[b]=[\lambda a+\mu b].$$

容易证明$\mathscr{B}$构成一个代数，称为$\mathscr{A}$关于理想 J 的商代数。

定义自然映射 $\varphi(a)=[a]$，则 φ 是$\mathscr{A}$到商代数$\mathscr{A}/J$上的一个同态映射。由于 $J\neq\mathscr{A}$，可见 φ 是非平凡的，而且 $J=\ker\varphi$。

定义5.1.7 设J是代数$\mathscr{A}$的一个理想，而且不真含于$\mathscr{A}$的另一个理想之中，就称J是极大理想。

定理5.1.8 设$\mathscr{A}$是一个有幺元的代数，那么它的每一个理想J必含于某个极大理想之中。

证明 令$\mathscr{P}$是由$\mathscr{A}$中一切包含J的理想组成的集合。按照集合的包含关系规定$\mathscr{P}$中的序，即对于$\mathscr{P}$中元素J_1, J_2，若$J_1 \subset J_2$，则$J_1 < J_2$。于是$\mathscr{P}$是一个偏序集。

为了证明存在包含J的极大理想，只须证明$\mathscr{P}$含有一个极大元。我们将应用Zorn引理，为此只要验证$\mathscr{P}$的每个良序子集在$\mathscr{P}$上有界。

设$\{J_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$是$\mathscr{P}$的一个良序子集，其中$\Lambda$是一个指标集。令$J_0 = \bigcup\limits_{\lambda \in \Lambda} J_\lambda$，则$J_0$是这个良序集的一个上界，于是只须证明$J_0 \in \mathscr{P}$，或者说只要证明$J_0$是$\mathscr{A}$的一个理想就够了。

显然J_0是$\mathscr{A}$的一个子代数，并且

(1) $\forall a \in \mathscr{A}$

$$aJ_\lambda \subset J_\lambda \implies aJ_0 \subset J_0,$$
$$J_\lambda a \subset J_\lambda \implies J_0 a \subset J_0;$$

(2) $\forall \lambda \in \Lambda$

$$e \notin J_\lambda \implies e \notin J_0.$$

所以J_0确是$\mathscr{A}$的一个理想，证毕。

定理5.1.9 设$\mathscr{A}$是有幺元的交换代数，则

(1) 为了$a \in \mathscr{A}$在它的某一个理想之中必须且仅须a^{-1}不存在；

(2) $\mathscr{A}$的理想J是极大的，当且仅当商代数$\mathscr{A}/J$是可除代数。

证明 (1) 由命题5.1.6(2)知必要性成立。现证充分性，令$J_a = a\mathscr{A}$，由于a^{-1}不存在，可知$J_a \neq \mathscr{A}$，并且由于$\mathscr{A}$可交换，所以J_a还是一个理想，显然$a = ae \in J_a$。

(2) *必要性*． 设 J 是 $\mathscr{A}$ 的极大理想，但是 $\mathscr{A}/J=\mathscr{B}$ 不是可除代数．于是有 $[b]\in\mathscr{B}$，$[b]\neq\theta$（即 $b\notin J$），$[b]$ 不可逆．令 $J_b=[b]\mathscr{B}$，则 J_b 是 $\mathscr{B}$ 的一个理想，而且 $[b]\in J_b$．作商代数 $\mathscr{B}/J_b$．考虑自然映射 φ 与 ψ：

$$\mathscr{A}\xrightarrow{\varphi}\mathscr{A}/J\xrightarrow{\psi}\mathscr{B}/J_b.$$

φ,ψ 均为非平凡同态映射．根据命题5.1.5 $\ker(\psi\circ\varphi)$ 与 $\ker\varphi$ 都是 $\mathscr{A}$ 的理想．若 $a\in\ker\varphi$，由 $\varphi(a)=\theta$ 知 $\psi\circ\varphi(a)=\theta$，所以 $a\in\ker(\psi\circ\varphi)$，从而 $\ker(\psi\circ\varphi)\supset\ker\varphi$．另一方面 $\psi\circ\varphi(b)=\psi([b])=\theta$，即 $b\in\ker(\psi\circ\varphi)$，但是 $b\notin J=\ker\varphi$，这说明 $\ker(\psi\circ\varphi)\neq\ker\varphi$．这与 J 是极大理想矛盾．因此 $\mathscr{B}$ 是可除的．

充分性． 设 $\mathscr{B}=\mathscr{A}/J$ 是可除商代数，但是 J 不是极大理想．于是存在 $\mathscr{A}$ 的理想 $J_1\supset J$，以及非零元 $a\in J_1\backslash J$．记 $[a]$ 为 a 在 $\mathscr{B}$ 中对应的剩余类．$[a]$ 有逆元 $[a]^{-1}\in\mathscr{B}$，即存在 $b\in\mathscr{A}$，使得 $ba=e(\mathrm{mod}J)$，$e-ba\in J$，故 $e-ba\in J_1$，另一方面 $ba\in J_1$，便推得 $e\in J_1$，这是不可能的．所得矛盾证明 J 必为极大理想．

习　题

5.1.1 设 φ 是复数域上代数 $\mathscr{A}$ 的一个非零线性泛函，满足 $\langle\varphi,ab\rangle=\langle\varphi,a\rangle\langle\varphi,b\rangle$．$\varphi$ 亦叫作 $\mathscr{A}$ 上的复同态．试证

(1) 若 $\mathscr{A}$ 有幺元 e，则 $\varphi(e)=1$；

(2) 对于任意 $\mathscr{A}$ 中可逆元 a，$\varphi(a)\neq0$．

5.1.2 设 J 是代数 $\mathscr{A}$ 的理想，则 J 是极大的当且仅当 $\mathscr{A}/J$ 没有非零理想．

§2 Banach 代数

2.1 Banach 代数的定义

定义5.2.1 $\mathscr{A}$ 称为一个 Banach 代数或简称为 B 代数，如果

(1) $\mathscr{A}$ 是复数域上代数；

(2) $\mathscr{A}$上有范数$\|\cdot\|$，$\mathscr{A}$在此范数下是一个 Banach 空间；

(3) $\|ab\|\leqslant\|a\|\|b\|$，$\forall a,b\in\mathscr{A}$.

注2.1 Banach 代数$\mathscr{A}$中的乘法关于范数是连续的，即当$a_n\to a$，$b_n\to b$ 时

$$\begin{aligned}&\|a_nb_n-ab\|\\&\quad\leqslant\|a_nb_n-ab_n\|+\|ab_n-ab\|\\&\quad\leqslant\|b_n\|\|a_n-a\|+\|a\|\|b_n-b\|\to 0.\end{aligned}$$

注2.2 若$\mathscr{A}$有幺元e，则$\|e\|\geqslant 1$. 事实上，因为$e=e\cdot e$，由定义5.2.1条件(3)知$\|e\|\leqslant\|e\|^2$，立得$\|e\|\geqslant 1$.

但是在$\mathscr{A}$上可以赋于另一个范数

$$|a|\triangleq\sup_{b\in\mathscr{A}}\frac{\|ab\|}{\|b\|}.$$

在此范数下，$|e|=1$. 因为

$$\|a\|/\|e\|\leqslant|a|\leqslant\|a\|,\qquad\forall a\in\mathscr{A},$$

所以范数$|a|$与$\|a\|$等价.

例5.2.2 设$\mathscr{X}$是一个 Banach 空间，则$\mathscr{A}=L(\mathscr{X})$是一个不可交换的，有幺元$e=\mathrm{id}$(恒同算子)的 Banach 代数.

例5.2.3 设M是一个紧致拓扑空间，$C(M)$是M上的连续函数空间. 在$C(M)$上按普通的函数加法、数乘以及乘法规定运算，并且赋以极大值范数，那么$C(M)$是一个交换的有幺元的 Banach 代数.

例5.2.4 设S^1是平面上单位圆周，函数集

$$\mathscr{A}=\left\{u\in C(S^1)\ \middle|\ u(e^{i\theta})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_ne^{in\theta},\ \sum|c_n|<\infty\right\}\tag{5.2.1}$$

按普通的级数加法、数乘以及乘法规定运算. 令

$$u=\sum c_ne^{in\theta},\qquad v=\sum d_ne^{in\theta}\in\mathscr{A},$$

注意到

$$uv = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k d_{n-k}\right)e^{in\theta}$$

以及

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k d_{n-k}\right| \leqslant \sum_{n=-\infty}^{\infty}|c_n| \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty}|d_n|, \quad (5.2.2)$$

可知$\mathscr{A}$关于乘法运算是封闭的，从而构成一个代数。再定义范数为

$$\|u\| = \sum_{n=-\infty}^{\infty}|c_n|. \quad (5.2.3)$$

于是$\mathscr{A}$成为一个交换的有幺元的 Banach 代数。

事实上，作为赋范线性空间$\mathscr{A}$同构于 l^1，从而是完备的，并且由不等式(5.2.2)得到乘法与范数的关系$\|uv\| \leq \|u\|\|v\|$。

例5.2.5 设 $A_0(\mathbb{D}) = \{u:\mathbb{D} \to \mathbb{C} \mid u$ 在D内解析，在$\overline{\mathbb{D}}$上连续$\}$，其中$\mathbb{D}$是复平面上的单位开圆盘。在 $A_0(\mathbb{D})$上按普通的函数加法、数乘和乘法规定运算，并且定义范数

$$\|u\| = \max_{|z| \leqslant 1} |u(z)|,$$

则 $A_0(\mathbb{D})$是一个有幺元的交换 Banach 代数。

例5.2.6 在 $L^1(\mathbb{R}^n)$上将卷积

$$f * g(x) = \int_{R^n} f(y)g(x-y)\mathrm{d}y$$

作为乘法，于是 $L^1(\mathbb{R}^n)$是一个可交换的无幺元的 Banach 代数。

2.2 Banach 代数的极大理想与 Gelfand 表示

首先我们考察一个特殊情形，如果 Banach 代数$\mathscr{A}$还是可除的，那么$\mathscr{A}$将具有什么特性？下列 Gelfand-Mazur 定理给出了一个令人惊异的答案。

定理5.2.7(Gelfand-Mazur) 设$\mathscr{A}$是一个可除的B代数，则$\mathscr{A}$等距同构于复数域$\mathbb{C}$。

证明 因为$\mathscr{B} \triangleq \{ze \mid z \in \mathbb{C}\} \subset \mathscr{A}$，其中 e 是$\mathscr{A}$中的幺元，

所以只要证明 $\mathscr{B}=\mathscr{A}$，即对于任意的 $a\in\mathscr{A}$，只要证明存在 $z\in\mathbb{C}$ 使得 $a=ze$ 就够了。假若不然，于是 $\exists a\in\mathscr{A}$，使得对于每一个 $z\in\mathbb{C}$，$ze-a\neq\theta$。因为 $\mathscr{A}$ 是可除代数，故存在 $(ze-a)^{-1}$。考虑函数

$$r(z)=(ze-a)^{-1}, \tag{5.2.4}$$

则

（1） r 是弱解析的，即对于 $\forall f\in\mathscr{A}^*$，函数

$$F(z)=\langle f, r(z)\rangle \tag{5.2.5}$$

在 $\mathbb{C}$ 上解析。

事实上，$\forall z_0, z\in\mathbb{C}$，

$$\begin{aligned}&(ze-a)^{-1}-(z_0e-a)^{-1}\\&\quad=(z_0-z)(ze-a)^{-1}(z_0e-a)^{-1}.\end{aligned} \tag{5.2.6}$$

记 $b=(z_0e-a)^{-1}$，

$$\begin{aligned}(ze-a)^{-1}&=[(z-z_0)e+(z_0e-a)]^{-1}\\&=b[e+(z-z_0)b]^{-1}.\end{aligned}$$

当 $|z-z_0|<1/\|b\|$ 时，

$$\begin{aligned}\|(ze-a)^{-1}\|&\leqslant\|b\|\sum_{n=0}^{\infty}|z-z_0|^n\|b\|^n\\&=\frac{\|b\|}{1-|z-z_0|\|b\|}.\end{aligned}$$

因此 $r(z)$ 在 $|z-z_0|<1/\|b\|$ 时是有界的。由关系式(5.2.6)知道 $r(z)$ 在圆 $B(z_0,\|b\|^{-1})$ 上连续，从而对于 $\forall f\in\mathscr{A}^*$，$F(z)$ 在 z_0 可微，并且

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}F(z)\Big|_{z=z_0}=-\langle f,(z_0e-a)^{-2}\rangle. \tag{5.2.7}$$

由 z_0 的任意性，即知 F 是全平面解析的。

（2） $\|r(z)\|$ 是有界的。

事实上，当 $|z|\to+\infty$ 时，