

機率與統計學

王義鴻編著

三民書局總經銷

機率與統計學

王義瀉編著

三民書局總經銷

中華民國七十四年十月初版

版權所有
翻印必究

大學用書：機率與統計學

定價：新臺幣 450 元

編著兼發行人：王義濡

地址：板橋市溪崑 2 街 56 巷 36 號
郵政劃撥：第 01006350 號

印刷者：中寶印刷公司
地址：三重市成功路 41 巷 11 弄 6 號
電話：9831061-2

總經銷：三民書局
地址：臺北市重慶南路 1 段 61 號
電話：3315969 • 3613322

序

十七世紀中，經過費美 (Fermat, 法國人)、巴斯卡 (Pascal, 法國人) 和其他數學家等努力解答對局 (game) 之機會性問題，機率論於焉誕生。隨後，歷經數學家們基於公理、定義和定理之研究發展，到了廿世紀初葉已奠定了嚴密的數學理論。時至今日，其應用相當廣泛，從工程學、物理、化學、生物、數學到保險學、電子計算學、農業、經濟學、企業、社會學、醫學、心理學等。

統計學的起源比機率更早，開始主要範圍為資料的搜集、整理、製表繪圖以顯示資料特性等。隨著機率理論之創造與應用，使得統計學可基於資料之分析，利用機率而下有效之推論與決策：例如，抽樣、估計、假設檢定和預測等。

本書主要以微積分為基礎以引導到現代之機率和統計學。為方便計，分成兩部分。前半部包含四章，研討機率；後半部包含五章，研討統計學。雖然給予若干基礎上之理論探討，但最主要的是我們用習題解答式舉了包羅萬象的實例相配合，以期理論與實際不致脫節，更將有助於各種問題之研究發展。

編者才疏學淺，疏漏難免，尚祈海內方家，不吝賜正。

編者 王 義 濡

識 於 輔 仁 大 學
民 國 七 十 四 年 十 月 十 日

目 錄

第1章 集合與機率	1
集合觀念。凡氏圖。集合運算、定理。隨機試驗。樣本空間。事件。機率觀念、公理、定理。條件機率。見氏定理。組合分析。樹形圖。排列。組合。 $n!$ 史氏漸近式。	
第2章 隨機變數和機率分配	67
隨機變數。間斷機率分配、分配函數。連續機率分配、分配函數。雷比尼茲規則。聯合分配。變換變數。重合。	
第3章 數學期望值	127
數學期望值定義、定理。變異數和標準差。變異數定理。標準化隨機變數。動差。動差母函數。特性函數。聯合分配之變異數。共變異數。相關係數。條件期望值、變異數和動差。柴米雪夫不等式。大數法則。中央趨勢之其他測度。百分位數。偏態和峯態。	

第4章 特殊機率分配 177

二項分配、性質。常態分配、性質。二項和常態分配之關係。波氏分配、性質。二項和波氏分配之關係。波氏和常態分配之關係。中央極限定理。多項分配。超幾何分配。一致分配。歌西分配。珈瑪分配。貝他分配。卡方分配。 t 分配。 F 分配。卡方、 t 和 F 分配之關係。兩元常態分配。其他有關分配。

第5章 抽樣理論 251

母全體和樣本。統計推論。放回和不放回抽樣。隨機樣本。隨機號碼。母全體母數。樣本統計量。抽樣分配，平均數。平均數、比率、差數及和數之抽樣分配。樣本變異數。變異數比例之抽樣分配。次數分配。分組資料之平均數、變異數和動差計算。

第6章 估計理論 321

不偏、有效估計。點和區間估計。可靠性。平均數、比率、差數及和數之信賴區間。變異數、變異數比率之信賴區間。最大概似估計。

第7章 假設和顯著性檢定 351

統計決策。統計假設。虛無假設。假設和顯著性

檢定。型 I 和型 II 機誤。顯著水準。單尾、雙尾
 檢定。常態分配之檢定。大樣本、小樣本有關分
 配之顯著性檢定。OC 曲線。功效曲線。品質管
 制圖。配合樣本次數分配為理論分配。配合適度
 之檢定。列聯表。列聯係數。

第 8 章 配合曲線，迴歸和相關 455

配合曲線。迴歸。最小平方法。最小平方直線、
 抛物線。複迴歸。線形相關係數。廣義相關係
 數。等級相關。迴歸、相關之機率解釋和抽樣理
 論。

第 9 章 變異數分析 537

目的。一因子變異數分析含相等和不等觀察值。
 二因子變異數分析。二因子重複試驗。試驗設
 計：完全隨機，隨機部落，拉丁平方，希臘一拉
 丁平方。

附 錄

附錄 A 數學問題.....	607
附錄 B 標準常態曲線在 z 值上之縱坐標 (y)	610
附錄 C 標準常態曲線下從 o 至 z 之面積.....	611
附錄 D 自由度 v 之 t 分配的百分位數坐標.....	612
附錄 E 自由度 v 之卡方分配的百分位數坐標.....	613
附錄 F 分子 v_1 ，分母 v_2 之 F 分配的第95百分位數坐標 (0.05	

顯著水準)	614
附錄 F (續) 分子 v_1 , 分母 v_2 之 F 分配的第99百分位數坐標 (0.01顯著水準)	615
附錄 G 四位數常用對數.....	616
附錄 G (續) 四位數常用對數.....	617
附錄 H e^{-x} 之值.....	618
附錄 I 隨機號碼表.....	618

附錄二 機率與統計學 (續) 第四章 統計推論

一、統計推論中用到的統計量.....	619
二、統計推論中用到的統計量.....	620
三、統計推論中用到的統計量.....	621
四、統計推論中用到的統計量.....	622
五、統計推論中用到的統計量.....	623

100 附錄二 機率與統計學 (續) 第四章 統計推論	624
101 附錄二 機率與統計學 (續) 第四章 統計推論	625
102 附錄二 機率與統計學 (續) 第四章 統計推論	626
103 附錄二 機率與統計學 (續) 第四章 統計推論	627
104 附錄二 機率與統計學 (續) 第四章 統計推論	628
105 附錄二 機率與統計學 (續) 第四章 統計推論	629
106 附錄二 機率與統計學 (續) 第四章 統計推論	630

第 1 章

集合與機率

集合觀念

作為機率和統計且同時也是一般數學之基礎者，乃集合 (Set) 之觀念。一集合可視為任何精確定義 (Well-defined) 之事物的聚集，這些事物稱為此集合之份子或元素。除非特別指明，一般我們將以大寫字母如 A, B, C 以表示集合，而以小寫字母如 a, b 以表示元素。

如果元素 a 屬於集合 C ，則寫為 $a \in C$ 。如果 a 不屬於 C ，則寫為 $a \notin C$ 。如果 a 和 b 兩者屬於 C ，則寫為 $a, b \in C$ 。為判別一集合是否為精確定義，我們必須能斷定某一特定事物是否屬於或不屬於此集合。

一集合可列出其所有元素來表示，或如果不可能的話，可敘述出此集合之元素特性。前者稱列表法 (roster method)，後者稱為構式法 (property method)。

例 1.1. 英文字母之所有母音集合可依列表法 $\{a, e, i, o, u\}$ 表示，或依構式法為 $\{x | x \text{ 為母音}\}$ ，讀為「所有元素 x 之集合，已知 x 為母音」，其中垂直線 $|$ 讀為「使得」 (such that) 或「已知」 (given that)。

例 1.2. 集合 $\{x | x \text{ 為平面上之三角形}\}$ 為平面上之所有三角形集合。

注意，此時不能用列表法。

例 1.3. 投擲一對均勻之骰子，則各粒骰子出現之可能「數目」或「點數」集合為 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 。

子 集

如果集合 A 之各元素也屬於集合 B ，則稱 A 為 B 之子集 (subset) 或稱部分集合，寫為 $A \subset B$ 或 $B \supset A$ ，各讀為「 A 包含於 B 」或「 B 包含 A 」。

如果 $A \subset B$ 且 $B \subset A$ ，則稱 A 和 B 相等，寫為 $A = B$ ，此時 A 和 B 之元素相同。

如果 A 不等於 B ，即如果 A 和 B 之元素不相同，則寫為 $A \neq B$ 。

如果 $A \subset B$ 但 $A \neq B$ ，則稱 A 為 B 之真子集 (proper subset)。

例 1.4. $\{a, i, u\}$ 為 $\{a, e, i, o, u\}$ 之真子集。

例 1.5. $\{i, o, a, u, e\}$ 為 $\{a, e, i, o, u\}$ 之子集，但非真子集，乃由於此兩集合相等也。注意，只作元素間位置之調換，並不改變集合。

例 1.6. 投擲一骰子，出現偶數之可能結果為集合 $\{2, 4, 6\}$ ，它為所有可能結果集合 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 之（真）子集。

下面定理對於任何集合 A, B, C 為真。

定理 1-1: 如果 $A \subset B$ 且 $B \subset C$ ，則 $A \subset C$ 。

全集和空集合

在許多目的上，我們只討論某特殊子集，如所有元素集合之全集 (universe) 或稱宇宙，也稱為空間 (space)，表為 u ，一空間內之元素，通常稱為空間之點 (points)。

如果一集合不含任何元素，則稱爲空集合(empty or null set)，表爲 \emptyset ，它爲任何集合之子集。

例 1.7. 一熟悉之重要集合爲實數集合 R ，如 $3, -2, \sqrt{2}, \pi$ 等可表爲實數線 x 軸上之點。如果 a 和 b 為實數且 $a < b$ ，則 R 之子集 $\{x | a \leq x \leq b\}$ 和 $\{x | a < x < b\}$ (通常簡寫爲 $a \leq x \leq b$ 和 $a < x < b$) 各稱爲封閉 (closed) 和開放區間 (open interval)。又子集 $\{x | a \leq x < b\}$ 或 $\{x | a < x \leq b\}$ 稱爲半開放或半封閉區間。

例 1.8. 使得 $x^2 = -1$ 之所有實數 x 集合，寫爲 $\{x | x^2 = -1\}$ ，爲一空集合，因無實數的平方會等於 -1 。然而，如果是複數 (complex number)，則此集合已不是空集合了。

例 1.9. 投擲一骰子，則所有結果集合爲全集 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 。在一骰子投擲中，含 7 或 11 點面之集合爲空集合。

凡氏圖

一全集 u 可依於長方形內所有點集合之幾何圖形方式來表示。此時 u 之子集 (如圖 1-1 中陰影部分 A 和 B) 乃爲兩圓內之點集合 A 和 B 。這種圖形，稱爲凡氏圖 (Venn diagram)，常作爲各集合間可能關係的幾何解釋。

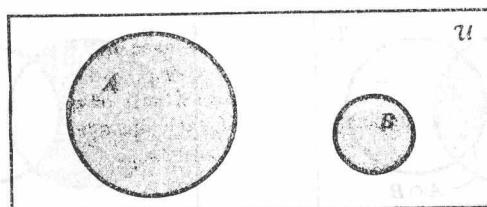


圖 1-1

集合運算

- 1. 聯集.** 屬於 A 或 B 或同時屬於 A 和 B 之所有元素(或點)集合，稱為 A 和 B 之聯集(union)，以 $A \cup B$ 表示(如圖1-2之陰影部分)。

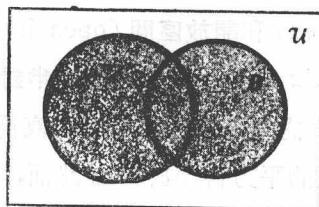


圖 1-2

- 2. 交集.** 同時屬於 A 和 B 之所有元素集合，稱為 A 和 B 之交集(intersection)，以 $A \cap B$ 表示(如圖 1-3 之陰影部分)。如果兩集合 A 和 B 成立 $A \cap B = \emptyset$ ，即無共同元素，則稱為不相交集合(disjoint sets)。如圖 1-1 中之 A 和 B 為不相交集合。
- 3. 差集.** 屬於 A 但不屬於 B 之所有元素集合，稱為 A 和 B 之差集(difference)，以 $A - B$ 表示(如圖 1-4 之陰影部分)
- 4. 補集.** 如果 $B \subset A$ ，則 $A - B$ 為 B 對 A 之補集(complement of

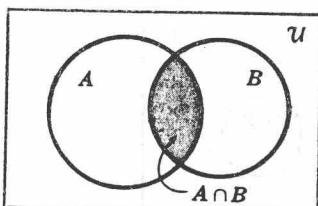


圖 1-3

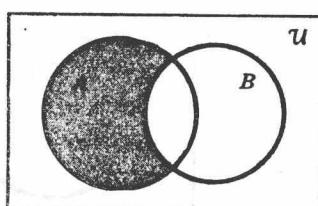


圖 1-4

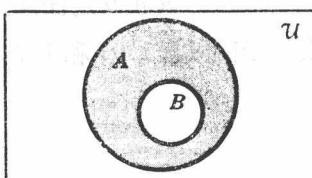


圖 1-5

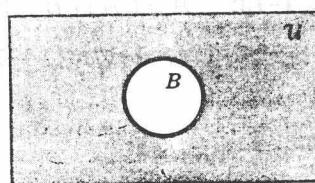


圖 1-6

B relative to A), 以 \overline{B}_A 表示 (如圖 1-5 之陰影部分)。如果 $A = u$, 則 $u - B$ 簡稱為 B 之補集, 以 \overline{B} 表示 (如圖 1-6 之陰影部分), 也可用 B' 或 B^c 表示, 又 $A \cup B$ 之補集以 $\overline{A \cup B}$ 表示。

集合之若干定理

定理 1-2: $A \cup B = B \cup A$

聯集之交(互)換律

定理 1-3: $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

聯集之結合律

$$= A \cup B \cup C$$

定理 1-4: $A \cap B = B \cap A$

交集之交(互)換律

定理 1-5: $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

交集之結合律

$$= A \cap B \cap C$$

定理 1-6: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ 第一個分配律

定理 1-7: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ 第二個分配律

定理 1-8: $A - B = A \cap \overline{B}$

定理 1-9: 如果 $A \subset B$, 則 $\overline{A} \supset \overline{B}$ 或 $\overline{B} \subset \overline{A}$

定理 1-10: $A \cup \emptyset = A$, $A \cap \emptyset = \emptyset$

定理 1-11: $A \cup u = u$, $A \cap u = A$

定理 1-12a: $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ 狄摩根第一律

定理 1-12b: $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ 狄摩根第二律

定理 1-13: $A = (A \cap B) \cup (A \cap \bar{B})$ A 和 B 為任意集合

定理 1-12a, 1-12b 和 1-13 可以推廣 (參閱問題 1.69 和 1.74).

對偶原理

於集合之運算中，如果以交集調換聯集，聯集調換交集，補集調換原集合，及調換包含符號 \cap 和 \cup 之集合，則結果仍為真，是為對偶原理 (Principal of Duality).

隨機試驗

我們都知道試驗（實驗）在科學和工程上之重要性，其所含之基本原理為如果在幾乎相同之條件下重複地作試驗，則所得之結果，實質上是相同的。

然而，有不少試驗，儘管條件幾乎相同，但所得之結果，實質上是不相同的。這種試驗，稱為隨機試驗 (random experiments)，下列舉若干例子。

例 1.10. 如果投擲一銅幣，則試驗之結果為出現「反面」，表為 T (或 0)，或出現「正面」，表為 H (或 1)，即出現集合 $\{H, T\}$ (或 $\{0, 1\}$) 中之一元素。

例 1.11. 如果投擲一骰子，則試驗之結果，為出現集合 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 中之一元素。

例 1.12. 如果投擲一銅幣兩次，則其結果可表為 $\{HH, HT, TH, TT\}$ ，即兩次都是正面，第一次正面和第二次反面，等等。

例 1.13. 如果我們有一部生產螺絲釘之機器，則試驗之結果可能其中部分為不良品。依此，當產出一粒螺絲釘時，它必為集合 $\{\text{不良品}, \text{良品}\}$ 中之一份子。

例 1.14. 生產電燈泡之工廠，如果作一測度燈泡之「壽命」試驗，則其結果為處於某時距之時間 t 小時，設為 $0 \leq t \leq 4000$ ，其中我們假定沒有一個燈泡壽命超過 4000 小時。

樣本空間

由隨機試驗之所有可能結果所組成的集合 S ，稱為樣本空間 (sample space)，而各結果稱為樣本點 (sample point)。一般上，描述一試驗結果之樣本空間不止一個，但通常僅有一個能描述得最適當。注意， S 同義於全集。

例 1.15. 投擲一骰子，則其一樣本空間或所有可能結果之集合為 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ，另一個為 {奇數，偶數}。顯然地，後者無法充分地確定，例如，那一個結果能被 3 整除？

通常，用圖形來描述樣本空間較為有用。此時，多用數字而盡可能不用字母。

例 1.16. 投擲一銅幣兩次，以 0 表示反面和以 1 表示正面，則樣本空間 (參閱例 1.12) 可用幾何之點表示，如圖 1-7 所示，其中，例如 $(0, 1)$ 表示第一次得反面和第二次得正面，即 TH.

如果一樣本空間由有限個點所組成，如例 1.16 者，稱為有限樣本空間 (finite sample space)。如果它有許多點而可對應於自然數 1, 2, 3, ……，則稱為可計數無限樣本空間 (countably infinite sample space)。如果它有許多點而對應於 x 軸之某區間，如在 $0 \leq x \leq 1$ 之區間，則稱為不可計數無限樣本空間 (noncountabley infinite sample space)。一有限或可計數無限樣本空間，

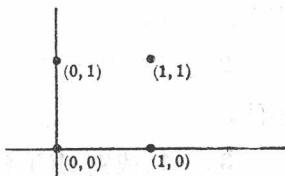


圖 1-7

稱為間斷（離散）樣本空間(discrete sample space)，至於不可計數無限樣本空間，又稱為非間斷或連續樣本空間(nondiscrete or continuous sample space)。

事 件

樣本空間中之一子集 A ，稱為一事件(event)，此樣本空間為所有可能結果之集合。如果一試驗之一個結果為 A 中之一元素，則稱發生了事件 A 。一僅由 S 內一個點所組成之事件，通常稱為簡單或基本事件(simple or elementary event)。

例 1.17. 投擲一銅幣兩次，則出現一個正面之事件為樣本空間之子集，由點 $(0,1)$ 和 $(1,0)$ 所組成，如圖 1-8 所示。

兩個特殊事件，其一為 S 本身，稱為必然事件(sure or certain event)，乃因必然發生 S 內之任一元素，另一為空集合 \emptyset ，稱為不可能事件(impossible event)，乃因不可能發生 \emptyset 之任一元素。

由於事件是集合，所以關於事件之敘述句可轉換為集合理論之語句，並可互相為用。依此，我們可依第 5 頁所述之集合代數轉換而得事件代數。

於 S 中之事件作集合運算，則可得此 S 中之其他事件。依此，如果 A 和 B 為事件，則

1. $A \cup B$ 為「發生 A 或 B 或同時兩者」之事件。

2. $A \cap B$ 為「同時發生 A 和 B 」之事件。

3. \bar{A} (或寫 A')為「不發生 A 」之事件。

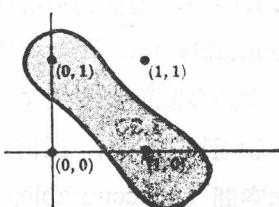


圖 1-8 標示事件 A 的樣本空間

4. $A - B$ 為「發生 A 但不發生 B 」之事件。

如果對應於事件 A 和 B 之集合為不相交，即 $A \cap B = \emptyset$ ，則稱事件為互斥。此意為它們不會同時發生。

例 1.18. 投擲一銅幣兩次之試驗中，取 A 為「至少發生一個正面」之事件和 B 為「第二次發生反面」之事件。則得 $A = \{HT, TH, HH\}$ ， $B = \{HT, TT\}$ ，因而

$$A \cup B = \{HT, TH, HH, TT\} = S$$

$$A \cap B = \{HT\}$$

$$\bar{A} = \{TT\} \quad A - B = \{TH, HH\}$$

機率觀念

於任何隨機試驗中，對於一事件是否發生，總是不確定。但作為我們期望事件發生之機會或機率測度值，通常指定它為 0 與 1 間的一個數。如果我們確定事件必定發生，則我們說其機率為 100% 或 1，但如果我們確定事件不會發生，則我們說其機率為 0。如果機率 $1/4$ ，則說其發生之機會為 25%，和不發生之機會為 75%。依此，對事件發生之賭比 (odds) 為 75% 比 25% 或 3 比 1。

我們可依兩個重要程序，以獲得一事件之機率的估計值。

1. 古典或事前漸近

如果一事件於 n 次所有可能發生不同方法中發生 h 次，各次發生之機會相等，則此事件之機率為 h/n 。

例 1.19. 如果我們希望於投擲一枚銅幣一次試行中，求得出現正面之機率。由於銅幣出現兩種相等可能之方法，即「正面」和「反面」（投擲下後不跑掉或站立於牆角），又由於此兩種方法中，正面僅是其中一種，所以我們合理地獲得所須之機率為 $1/2$ 。當