機率與統計學

王義濡編著

三民書局總經銷

機率與統計學

王 羲 濡 編 著

三民書局總經銷

中華民國七十四年十月初版

大學用書：機率與統計學

定價：新臺幣450元

編著兼發行人：王　義　濡
地　址：板橋市溪崑2街56巷36號
郵政劃撥：第01006350號

印刷者：中寶印刷公司
地　址：三重市成功路41巷11弄6號
電　話：9831061-2

總經銷：三民書局
地　址：臺北市重慶南路1段61號
電　話：3315969・3613322

序

十七世紀中，經過**費美**（Fermat，法國人）、**巴斯卡**（Pascal，法國人）和其他數學家等努力解答**對局**（game）之機會性問題，機率論於焉誕生。隨後，歷經數學家們基於公理、定義和定理之研究發展，到了廿世紀初葉已奠定了嚴密的數學理論。時至今日，其應用相當廣泛，從工程學、物理、化學、生物、數學到保險學、電子計算學、農業、經濟學、企業、社會學、醫學、心理學等。

統計學的起源比機率更早，開始主要範圍爲資料的搜集、整理、製表繪圖以顯示資料特性等。隨着機率理論之創造與應用，使得統計學可基於資料之分析，利用機率而下有效之推論與決策：例如，抽樣、估計、假設檢定和預測等。

本書主要以微積分爲基礎以引導到現代之機率和統計學。爲方便計，分成兩部分。前半部包含四章，研討機率；後半部包含五章，研討統計學。雖然給予若干基礎上之理論探討，但最主要的是我們用習題解答式舉了包羅萬象的實例相配合，以期理論與實際不致脫節，更將有助於各種問題之研究發展。

編者才疏學淺，疏漏難免，尚祈海內方家，不吝賜正。

編者 **王義濡**

識於輔仁大學

民國七十四年十月十日

目　錄

附　　錄

第 1 章

集合與機率

集合觀念

作爲機率和統計且同時也是一般數學之基礎者，乃**集合** (Set) 之觀念. 一集合可視爲任何**精確定義** (Well-defined) 之**事物**的聚集，這些事物稱爲此集合之**份子**或**元素**。除非特列指明，一般我們將以大寫字母如 A,B,C 以表示集合，而以小寫字母如 a,b 以表示元素。

如果元素 a 屬於集合 C，則寫爲 $a\in C$。如果 a 不屬於 C，則寫爲 $a\notin C$。如果 a 和 b 兩者屬於 C，則寫爲 $a,b\in C$。爲判別一集合是否爲精確定義，我們必須能斷定某一特定事物是否屬於或不屬於此集合。

一集合可列出其所有元素來表示，或如果不可能的話，可敍述出此集合之元素特性。前者稱**列表法** (roster method)，後者稱爲**構式法** (property method).

例 1.1. 英文字母之所有母音集合可依列表法 $\{a,e,i,o,u\}$ 表示，或依構式法爲 $\{x|x$ 爲母音$\}$，讀爲「所有元素 x 之集合，已知 x 爲母音」，其中垂直線 | 讀爲「**使得**」(such that) 或「**已知**」(given that)。

例 1.2. 集合 $\{x|x$爲平面上之三角形$\}$ 爲平面上之所有三角形集合。

注意，此時不能用列表法。

例 1.3. 投擲一對均勻之骰子，則各粒骰子出現之可能「數目」或「點數」集合爲 $\{1,2,3,4,5,6\}$。

子　集

如果集合 A 之各元素也屬於集合 B，則稱 A 爲 B 之**子集**(subset) 或稱**部分集合**，寫爲 $A\subset B$ 或 $B\supset A$，各讀爲「A 包含於 B」或「B 包含 A」。

如果 $A\subset B$ 且 $B\subset A$，則稱 A 和 B 相等，寫爲 $A=B$，此時 A 和 B 之元素相同。

如果 A 不等於 B，即如果 A 和 B 之元素不相同，則寫爲 $A\neq B$。

如果 $A\subset B$ 但 $A\neq B$，則稱 A 爲 B 之**眞子集** (proper subset).

例 1.4. $\{a,i,u\}$ 爲 $\{a,e,i,o,u\}$ 之眞子集。

例 1.5. $\{i,o,a,u,e\}$ 爲 $\{a,e,i,o,u\}$ 之子集，但非眞子集，乃由於此兩集合相等也。注意，只作元素間位置之調換，並不改變集合。

例 1.6. 投擲一骰子，出現偶數之可能結果爲集合 $\{2,4,6\}$，它爲所有可能結果集合 $\{1,2,3,4,5,6\}$ 之（眞）子集。

下面定理對於任何集合 A,B,C 爲眞。

定理 1-1: 如果 $A\subset B$ 且 $B\subset C$，則 $A\subset C$。

全集和空集合

在許多目的上，我們只討論某特殊子集，如所有元素集合之**全集** (universe) 或稱宇集，也稱爲**空間** (space)，表爲 u，一空間內之元素，通常稱爲空間之**點** (points).

如果一集合不含任何元素，則稱爲**空集合**(empty or null set)，表爲$\varnothing$，它爲任何集合之子集。

例 1.7. 一熟悉之重要集合爲實數集合R，如$3, -2, \sqrt{2}, \pi$，等可表爲實數線x軸上之點。如果a和b爲實數且$a<b$，則R之子集$\{x|a\leq x\leq b\}$和$\{x|a<x<b\}$（通常簡寫爲$a\leq x\leq b$和$a<x<b$）各稱爲**封閉**（closed）和**開放區間**(open interval)．又子集$\{x|a\leq x<b\}$或$\{x|a<x\leq b\}$稱爲**半開放**或**半封閉區間**。

例 1.8. 使得$x^2=-1$之所有實數x集合，寫爲$\{x|x^2=-1\}$，爲一空集合，因無實數的平方會等於-1。然而，如果是**複數**(complex number)，則此集合已不是空集合了。

例 1.9. 投擲一骰子，則所有結果集合爲全集$\{1,2,3,4,5,6\}$。在一骰子投擲中，含7或11點面之集合爲空集合。

凡 氏 圖

一全集$\mathcal{U}$可依於長方形內所有點集合之幾何圖形方式來表示。此時$\mathcal{U}$之子集（如**圖 1-1**中陰影部分A和B）乃爲兩圓內之點集合A和B。這種圖形，稱爲**凡氏圖**（Venn diagram)，常作爲各集合間可能關係的幾何解釋。

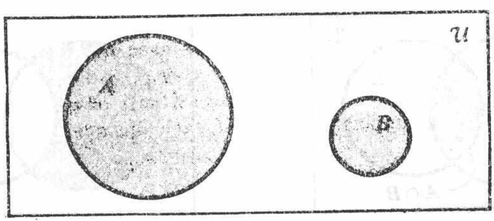

圖 1-1

集合運算

1．**聯集**．屬於A或B或同時屬於A和B之所有元素(或點)集合，稱爲A和B之**聯集**(union)，以$A \cup B$表示(如圖**1-2**之陰影部分)。

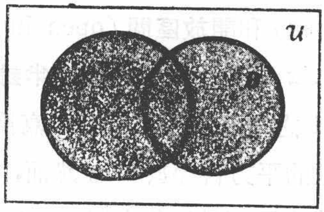

圖 1-2

2．**交集**．同時屬於A和B之所有元素集合，稱爲A和B之**交集**(intersection)，以$A \cap B$表示(如圖**1-3**之陰影部分)。如果兩集合A和B成立 $A \cap B = \varnothing$，卽無共同元素，則稱爲**不相交集合**(disjoint sets)。如圖**1-1**中之A和B爲不相交集合。

3．**差集**．屬於A但不屬於B之所有元素集合，稱爲A和B之**差集**(difference)，以$A - B$表示(如圖**1-4**之陰影部分)

4．**補集**．如果$B \subset A$，則$A - B$稱爲**B對A之補集**(complement of

圖 1-3

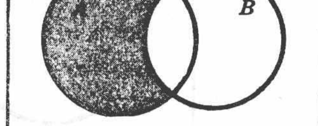

圖 1-4

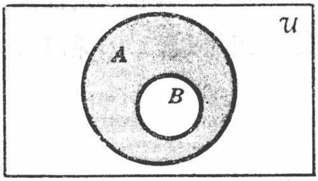

圖 1-5

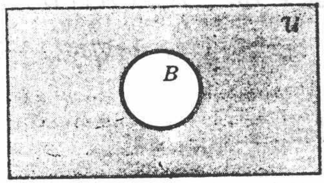

圖 1-6

B relative to A), 以$\overline{B}_A$表示 (如**圖 1-5** 之陰影部分)。如果 $A=u$, 則$u-B$簡稱爲B之**補集**, 以$\overline{B}$表示 (如圖 **1-6** 之陰影部分), 也可用B'或B^C表示, 又$A\cup B$之補集以$\overline{A\cup B}$表示。

集合之若干定理

定理 1-2: $A\cup B=B\cup A$ **聯集之交(互)換律**

定理 1-3: $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$ **聯集之結合律**

$$=A\cup B\cup C$$

定理 1-4: $A\cap B=B\cap A$ **交集之交(互)換律**

定理 1-5: $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$ **交集之結合律**

$$=A\cap B\cap C$$

定理 1-6: $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$ **第一個分配律**

定理 1-7: $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$ **第二個分配律**

定理 1-8: $A-B=A\cap\overline{B}$

定理 1-9: 如果$A\subset B$, 則$\overline{A}\supset\overline{B}$或$\overline{B}\subset\overline{A}$

定理 1-10: $A\cup\varnothing=A$, $A\cap\varnothing=\varnothing$

定理 1-11: $A\cup u=u$, $A\cap u=A$

定理 1-12a: $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$ **狄摩根第一律**

定理 1-12b: $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$ **狄摩根第二律**

定理 1-13:　$A=(A\cap B)\cup(A\cap\overline{B})$　　　**A和B為任意集合**

定理 1-12a，1-12b 和 **1-13** 可以推廣（參閱問題**1.69** 和 **1.74**）.

對偶原理

於集合之運算中，如果以交集調換聯集，聯集調換交集，補集調換原集合，及調換包含符號$\subset$和$\supset$之集合，則結果仍為眞，是爲**對偶原理**（Principal of Duality）.

隨機試驗

我們都知道試驗（實驗）在科學和工程上之重要性，其所含之基本原理爲如果在幾乎相同之條件下重複地作試驗，則所得之結果，實質上是相同的。

然而，有不少試驗，儘管條件幾乎相同，但所得之結果，實質上是不相同的。這種試驗，稱爲**隨機試驗**（random experiments），下列舉若干例子。

例 1.10. 如果投擲一銅幣，則試驗之結果爲出現「反面」，表爲T（或 0），或出現「正面」，表爲H（或 1），即出現集合$\{H,T\}$（或$\{0,1\}$）中之一元素。

例 1.11. 如果投擲一骰子，則試驗之結果，爲出現集合$\{1,2,3,4,5,6\}$中之一元素。

例 1.12. 如果投擲一銅幣兩次，則其結果可表爲$\{HH,HT,TH,TT\}$，即兩次都是正面，第一次正面和第二次反面，等等。

例 1.13. 如果我們有一部生產螺絲釘之機器，則試驗之結果可能其中部分爲不良品。依此，當產出一粒螺絲釘時，它必爲集合｛不良品，良品｝中之一份子。

例 1.14. 生產電燈泡之工廠，如果作一測度燈泡之「壽命」試驗，則其結果爲處於某時距之時間 t 小時，設爲$0\leq t\leq 4000$，其中我們假定沒有一個燈泡壽命超過4000小時。

樣本空間

由隨機試驗之所有可能結果所組成的集合 S，稱爲**樣本空間**（sample space)，而各結果稱爲**樣本點**（sample point)。一般上，描述一試驗結果之樣本空間不止一個，但通常僅有一個能描述得最適當。注意，S 同義於全集。

例 1.15. 投擲一骰子，則其一樣本空間或所有可能結果之集合爲{1,2,3,4,5,6}，另一個爲{奇數，偶數}。顯然地，後者無法充分地確定，例如，那一個結果能被 3 除盡?

通常，用圖形來描述樣本空間較爲有用。此時，多用數字而盡可能不用字母。

例 1.16. 投擲一銅幣兩次，以 0 表示反面和以 1 表示正面，則樣本空間（參閱**例1.12**）可用幾何之點表示，如**圖 1-7** 所示，其中，例如 (0,1) 表示第一次得反面和第二次得正面，即 TH.

如果一樣本空間由有限個點所組成，如**例1.16**者，稱爲**有限樣本空間** (finite sample space)。如果它有許多點而可對應於自然數 1,2,3,……，則稱爲**可計數無限樣本空間**（countably infinite sample space)。如果它有許多點而對應於 x 軸之某區間，如在 $0\leq x\leq 1$ 之區間，則稱爲**不可計數無限樣本空間** (noncountabley infinite sample space)。**一有限或可計數無限樣本空間**，

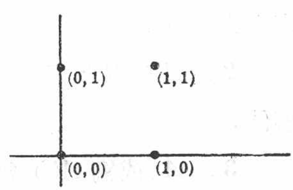

圖 1-7

稱爲**間斷（離散）樣本空間**(discrete sample space)，至於**不可計數無限樣本空間**，又稱爲**非間斷或連續樣本空間** (nondiscrete or continuous sample space).

事　件

樣本空間中之一子集A，稱爲**一事件** (event)，此樣本空間爲所有可能結果之集合。如果一試驗之一個結果爲A中之一元素，則稱發生了事件A。一僅由S內一個點所組成之事件，通常稱爲**簡單**或**基本事件** (simple or elementary event).

例 1.17. 投擲一銅幣兩次，則出現一個正面之事件爲樣本空間之子集，由點$(0,1)$和$(1,0)$所組成，如**圖 1-8** 所示。

兩個特殊事件，其一爲S本身，稱爲**必然事件** (sure or certain event)，乃因必然發生S內之任一元素，另一爲空集合$\varnothing$，稱爲不可能事件 (impossible event)，乃因不可能發生$\varnothing$之任一元素。

由於事件是集合，所以關於事件之敍述句可轉換爲集合理論之語句，並可互相爲用。依此，我們可依**第 5 頁**所述之集合代數轉換而得事件代數。

於S中之事件作集合運算，則可得此S中之其他事件。依此，如果A和B爲事件，則

1. $A\cup B$爲「發生A或B或同時兩者」之事件。

2. $A\cap B$爲「同時發生A和B」之事件。

3. $\overline{A}$(或寫A') 爲「不發生A」之事件。

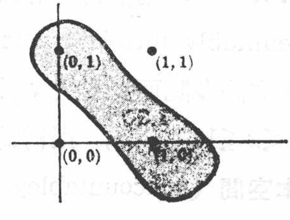

圖 1-8

4. $A-B$為「發生A但不發生B」之事件。

如果對應於事件 A和B 之集合為不相交，即$A \cap B = \varnothing$，則稱事件為**互斥**。此意為它們不會同時發生。

例 1.18. 投擲一銅幣兩次之試驗中，取 A 為「至少發生一個正面」之事件和B為「第二次發生反面」之事件。則得$A=\{HT,TH,HH\}$，$B=\{HT,TT\}$，因而

$$A \cup B = \{HT,TH,HH,TT,\} = S$$

$$A \cap B = \{HT\}$$

$$\overline{A} = \{TT\} \qquad A-B = \{TH,HH\}$$

機率觀念

於任何隨機試驗中，對於一事件是否發生，總是不確定。但作為我們期望事件發生之機會或機率測度值，通常指定它為 0 與 1 間的一個數。如果我們確定事件必定發生，則我們說其機率為 100% 或 1，但如果我們確定事件不會發生，則我們說其機率為 0。如果機率1/4，則說其發生之機會為25%，和不發生之機會為75%。依此，對事件發生之**賭比**（odds）為75%比25%或 3 比 1 。

我們可依兩個重要程序，以獲得一事件之機率的估計值。

1. 古典或事前漸近

如果一事件於 n 次所有可能發生不同方法中發生 h 次，各次發生之機會相等，則此事件之機率為 h/n。

例 1.19. 如果我們希望於投擲一枚銅幣一次試行中，求得出現正面之機率。由於銅幣出現兩種相等可能之方法，即「正面」和「反面」（投擲下後不跑掉或站立於牆角），又由於此兩種方法中，正面僅是其中一種，所以我們合理地獲得所須之機率為 1/2。當