



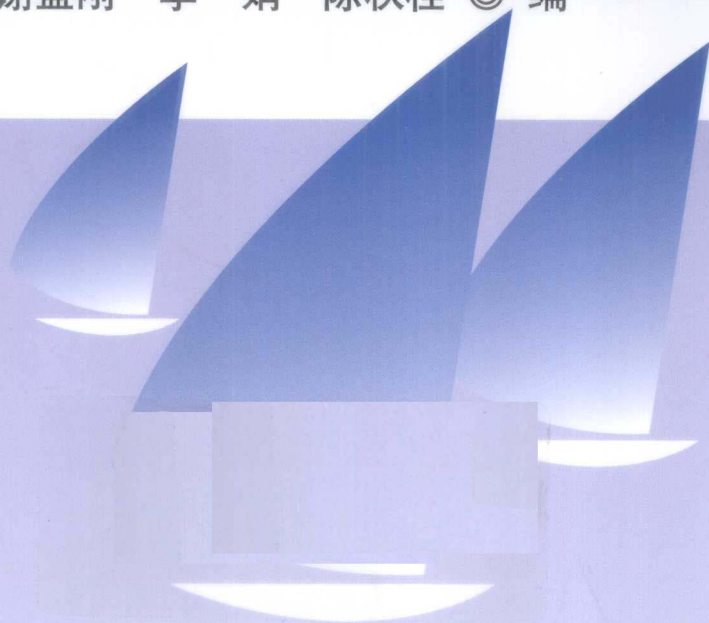
普通高等教育“十一五”国家级规划教材

中国科学技术大学数学教学丛书

微积分 (上)

第二版

谢盛刚 李娟 陈秋桂 © 编



科学出版社

www.sciencep.com

普通高等教育“十一五”国家级规划教材

中国科学技术大学数学教学丛书

微 积 分(上)

第二版

谢盛刚 李 娟 陈秋桂 编

科 学 出 版 社

北 京

内 容 简 介

本书第一版分上、下两册,分别于2004年、2005年出版,作为教材使用效果良好,并被选为普通高等教育“十一五”国家级规划教材.第二版书仍然分为上、下两册.上册主要内容包括极限与连续、一元函数的微分学、不定积分、定积分、常微分方程和实数集的连续性.下册包括多元微积分、级数、含参变量的积分和Fourier分析.本书基础理论完整严密,论述简明扼要,同时又避开了枝节问题的干扰,使重点突出、主线清晰.

本书适合于理工科大学一年级本科生使用.

图书在版编目(CIP)数据

微积分·上/谢盛刚,李娟,陈秋桂编.—2版.—北京:科学出版社,2010
ISBN 978-7-03-028389-4

普通高等教育“十一五”国家级规划教材·中国科学技术大学数学教学丛书

I. 微… II. ①谢… ②李… ③陈… III. 微积分-高等学校-教材 IV. O172

中国版本图书馆CIP数据核字(2010)第142487号

责任编辑:张中兴 王国华/责任校对:陈玉凤

责任印制:张克忠/封面设计:耕者设计工作室

科学出版社出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

丽源印刷厂印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2004年7月第 一 版 开本:B5(720×1000)

2010年7月第 二 版 印张:17

2010年7月第七次印刷 字数:340 000

印数:13 001—16 000

定价:28.00元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

《中国科学技术大学数学教学丛书》编委会

主 编 程 艺

顾 问 (按汉语拼音排序)

陈希孺 方兆本 冯克勤 龚 昇 李翊神
石钟慈 史济怀

编 委 (按汉语拼音排序)

陈发来 陈 卿 陈祖墀 侯定丕 胡 森
蒋继发 李尚志 林 鹏 刘儒勋 刘太顺
缪柏其 苏 淳 吴耀华 徐俊明 叶向东
章 璞 赵林城

第二版前言

本书第一版上、下册分别于 2004 年、2005 年出版, 作为中国科学技术大学多个专业的教学用书, 使用效果良好, 并被选为普通高等教育“十一五”国家级规划教材. 为了适应新的需要, 我们对本书进行了较多的修改和补充. 在改写的过程中, 我们采纳了众多使用过本书的教师的意见和建议, 在此对他们表示衷心的感谢. 我们更殷切期待广大使用者对再版后的《微积分》(上、下) 提出批评和建议.

作 者

2010 年 3 月

于合肥中国科学技术大学数学系

第一版前言

本书分为上、下两册,内容和大多数微积分教材差不多.它的前身是中国科学技术大学数学教研室编写的《高等数学导论》(以下简称《导论》).《导论》(包括出版前讲义形式的《导论》)作为非数学专业的微积分教科书,在中国科学技术大学的大部分专业使用已有 20 多年.长期的教学实践证明,《导论》是一套优秀的微积分教材.

本书继承了《导论》注重基础,论理严密,叙述简明的特点,对《导论》的内容进行了必要的增、删,经过重新编写,使所需授课(包括习题课)时间由原来的三学期共 230 学时,缩减为现在的两学期共 198 学时.

本书与《导论》相比,主要的改变有以下几点.

1. 将实数理论和可积性理论编在一起,作为上册的最后一章.我们这样处理的理由是:1) 实数理论和极限理论都是微积分的基础理论,对初学者而言又都是学习的难点.将实数理论放在学完微积分之后再讲,就分散了难点.2) 在讲极限理论时,对一些基于实数连续性的定理述而不证,可以使学生不致陷入实数连续性理论的漩涡,从而能集中精力学习一元微积分的基本理论和方法.3) 某些对数学需求相对少一些的专业,这一章可以部分选讲甚至完全不讲,这样本书就可能适应不同层次教学的需要.

2. 对基础理论有适当加强.例如对实数集的连续性、 $\mathbf{R}^2$ 的完备性和外微分形式等的讨论都比《导论》有所深入.

3. 对本不属于微积分的内容进行了一定程度的精减.1) 微分方程:将原来的两章并成一章,内容的选取仅以后续课程(如数理方程)和物理课程的教学需要为准,对微分方程的理论不进行深入讨论.那些想进一步学习微分方程理论的学生,应当选修相应的专门课程.2) 解析几何的内容也有相应删减,原则上以满足多元微积分的教学需要为准.

4. 与物理关系较密切的部分,主要是“场论”,着重介绍其中的数学理论,尽可能少牵涉物理问题.把物理的问题留给物理教师去讲,效果可能会好得多.

5. 对微积分理论延伸部分的内容(级数,含参变量积分,Fourier 分析)主要介绍其基本方法,在理论上不进行过多的讨论,一些重要但证明较长的定理(如 Fourier 级数的收敛定理)一律述而不证.

6. 某些定理的证明做了改进,使之更为简明易懂.

7. 更新了部分例题和习题.

我们认为,通过重新编写,本书保持了《导论》基础理论完整严密,论述简明扼要的特点,同时又避开了枝节问题的干扰,使重点突出,主线清楚.

本书内容比较丰富,适合于理工科大学本科一年级使用.讲完本书大约需要195~200学时(包括习题课),相当于两学期每周6学时的教学总时数(已考虑放假、考试等减少的课时).根据需要,删减一部分教学内容,则可以把总授课时数削减至170左右.

凡是我们认为可以不讲的内容,在相应条目的标题后面都注有“*”号.删去这些内容,不会在教学中出现前后衔接方面的问题,但由于它们在理论上或实用上的重要性,建议尽可能都列入教学内容,但建议不列入考试范围.

习题附在每一节的正文之后,大多数章节的习题都偏多,不必全部布置给学生.计算题的答案作为附录放在书后.所有答案均经过反复核对,但仍难免有个别错误,希望读者谅解指正.

第1章、第2章和第4章附有一些补充题,主要是供那些对数学有兴趣又学有余力的学生作为课外练习之用.教师也可以选一些作为习题课上的例题.

在本书每一册的附录中都附有教学参考进度,详细注明了每一部分所需的课时数,其中 $(x+y)$ 表示需 x 课时讲授课, y 课时习题课,这主要是为教学经验不足的青年教师提供一个较合理的教学时间表,至于有经验的教师,完全可以按照自己的习惯和风格安排教学.

作者衷心感谢龚昇教授的关怀和指导.作者还对程艺、叶向东、章璞、张韵华和戴小莉等同志的支持和帮助表示衷心的感谢.

本书的初稿曾印成讲义在校内多个专业使用,所有使用过讲义的教师在全身心投入教学的过程中,对讲义提出了大量修改意见.可以说本书是众多教师集体劳动的成果.我们衷心感谢这些教师的无私帮助.

作者殷切期待来自读者对本书的批评和建议.

作 者

2003年12月

于合肥中国科学技术大学

目 录

第二版前言

第一版前言

第 1 章 极限与连续	1
§1.1 数列极限	1
1.1.1 数列极限的定义	2
1.1.2 收敛数列的性质	5
1.1.3 收敛数列的四则运算	7
1.1.4 数列收敛的判别法则	9
1.1.5 趋于无穷大的数列	13
1.1.6 自然对数底 e	14
习题 1.1(A)	15
习题 1.1(B)	17
§1.2 函数极限	18
1.2.1 函数在无穷大处的极限	18
1.2.2 函数在一点的极限	20
1.2.3 函数极限与数列极限的关系	23
1.2.4 函数极限的性质和运算	24
1.2.5 函数极限存在判别法	26
1.2.6 两个重要极限	28
1.2.7 无穷大量	29
1.2.8 无穷小量	30
1.2.9 关于“ O ”和“ o ”	32
习题 1.2	33
§1.3 连续函数	35
1.3.1 连续的定义	35
1.3.2 连续函数的性质与运算	38
1.3.3 闭区间上连续函数的性质	41
习题 1.3(A)	43
习题 1.3(B)	46
第 2 章 一元函数的微分学	47
§2.1 导数	47

2.1.1 导数的定义	47
2.1.2 导数的运算	50
2.1.3 求导基本法则和基本公式	55
2.1.4 高阶导数	56
习题 2.1(A)	59
习题 2.1(B)	62
§2.2 一元函数的微分	62
2.2.1 微分的定义	62
2.2.2 微分运算的基本公式和法则	65
2.2.3 一阶微分的形式不变性	65
2.2.4 高阶微分	66
习题 2.2	67
§2.3 Lagrange 中值定理、函数的增减与极值	68
2.3.1 Fermat 定理和 Rolle 定理	68
2.3.2 Lagrange 中值定理	70
2.3.3 函数的增减	72
2.3.4 函数的极值	73
习题 2.3(A)	74
习题 2.3(B)	76
§2.4 Cauchy 中值定理和未定式极限	77
2.4.1 Cauchy 中值定理和 L'Hospital 法则	77
2.4.2 其他类型未定式	81
习题 2.4	83
§2.5 函数图形的描绘	85
2.5.1 函数的凹凸和拐点	85
2.5.2 函数的渐近线	87
2.5.3 描绘函数图像的要点	89
习题 2.5(A)	90
习题 2.5(B)	91
§2.6 Taylor 公式	92
2.6.1 Taylor 多项式	92
2.6.2 Taylor 定理	93
2.6.3 几个基本初等函数的 Maclaurin 公式	95
习题 2.6(A)	98
习题 2.6(B)	99

第 3 章 一元函数的不定积分	101
§3.1 原函数和不定积分的概念	101
3.1.1 求导的逆运算	101
3.1.2 基本积分公式	103
习题 3.1	104
§3.2 基本积分方法	105
3.2.1 换元积分法	105
3.2.2 分部积分法	109
习题 3.2	112
§3.3 有理函数的积分	115
3.3.1 部分分式法	115
3.3.2 三角有理式的积分	118
3.3.3 其他	120
习题 3.3	122
第 4 章 一元函数的定积分	124
§4.1 定积分的定义和性质	124
4.1.1 定积分的定义	124
4.1.2 Newton-Leibniz 定理	127
4.1.3 定积分的性质	128
习题 4.1(A)	134
习题 4.1(B)	137
§4.2 微积分基本定理	138
习题 4.2(A)	140
习题 4.2(B)	141
§4.3 定积分的换元法和分部积分法	142
4.3.1 定积分的换元法	142
4.3.2 定积分的分部部分法	144
习题 4.3(A)	146
习题 4.3(B)	148
*§4.4 积分近似计算	148
4.4.1 矩形法	149
4.4.2 梯形法	150
4.4.3 抛物线法 (Simpson 公式)	152
习题 4.4	153
§4.5 定积分应用举例	153

4.5.1 微元法	153
4.5.2 平面曲线的弧长	155
4.5.3 平面曲线的曲率	157
4.5.4 平面图形的面积	160
4.5.5 旋转体的体积	164
4.5.6 旋转体的侧面积	166
4.5.7 力学应用举例	167
习题 4.5	168
§4.6 广义积分	170
4.6.1 无穷积分	170
4.6.2 瑕积分	173
4.6.3 广义积分的 Cauchy 主值	175
习题 4.6	176
第 5 章 常微分方程	177
§5.1 常微分方程的基本概念	177
习题 5.1	178
§5.2 一阶微分方程	178
5.2.1 可直接积分的方程	179
5.2.2 齐次方程	180
5.2.3 一阶线性微分方程	184
5.2.4 可降阶的二阶微分方程	188
习题 5.2	190
§5.3 二阶线性微分方程的一般理论	191
5.3.1 二阶齐次线性方程通解的结构	191
5.3.2 二阶线性非齐次方程通解的结构	196
习题 5.3	198
§5.4 二阶常系数线性微分方程	199
5.4.1 关于复值函数、复值解及复变量指数函数的注记	199
5.4.2 二阶常系数线性齐次方程	201
5.4.3 二阶常系数线性非齐次方程	204
5.4.4 Euler 方程	207
习题 5.4	209
*§5.5 质点的振动	210
5.5.1 自由简谐振动	210
5.5.2 自由阻尼振动	211

5.5.3 无阻尼的强迫振动	213
习题 5.5	214
§5.6 微分方程组	214
习题 5.6	216
第 6 章 实数集的连续性, 函数的可积性	217
§6.1 实数集的连续性	217
6.1.1 实数的连续性命题	217
*6.1.2 十进制小数和有理数集的完备化	222
6.1.3 连续函数的性质	223
习题 6.1	225
*§6.2 可积函数及积分的性质	226
6.2.1 连续函数的可积性	227
6.2.2 可积函数	229
6.2.3 积分的性质	231
习题 6.2	235
附录 I 部分参考答案及提示	236
附录 II 参考教学进度	257

第1章 极限与连续

§1.1 数列极限

实数的全体记成 $\mathbf{R}$.

符号 $\forall$ 表示任意, 符号 $\exists$ 表示存在.

设数集 $E \subset \mathbf{R}$, 如果有实数 M , 使得 $\forall x \in E$, 都有

$$x \leq M,$$

则称 E 有上界, M 称为 E 的一个上界. 类似地, 可以定义数集 E 有下界和 E 的下界.

在第6章, 我们将证明下述重要命题.

定理 1.1.1 (确界原理) 设 E 是非空数集. 若 E 有上界, 则 E 有最小上界; 若 E 有下界, 则 E 有最大下界.

E 的最小上界叫 E 的上确界, 记成 $\sup E$, 若 E 无上界, 就记 $\sup E = +\infty$; E 的最大下界叫 E 的下确界, 记成 $\inf E$, 若 E 无下界, 则记 $\inf E = -\infty$.

所谓 a 为 E 的最小上界 (上确界), 即是: $1^\circ \forall x \in E$, 有 $x \leq a$ (a 为 E 的上界); $2^\circ \forall \varepsilon > 0, \exists x_0 \in E$, 使 $x_0 > a - \varepsilon$ ($a - \varepsilon$ 不是 E 的上界). 亦可使用类似方法描述 E 的最大下界 (下确界).

例如 $I_1 = (0, 1)$, $I_2 = [0, 1]$, 则 $\sup I_1 = \sup I_2 = 1$, $\inf I_1 = \inf I_2 = 0$.

显然, 若 E 有最大数 α , 则 $\alpha = \sup E$; 若 E 有最小数 β , 则 $\beta = \inf E$.

如果数集 E 既有上界, 又有下界, 就称 E 为有界集, 否则称 E 为无界集. 显然, 数集 E 有界的充分必要条件是: 存在正数 M , 使

$$|x| < M$$

对任何 $x \in E$ 都成立.

设数集 $E \subset \mathbf{R}$, 函数 $y = f(x)$ 在 E 上有定义. 记

$$f(E) = \{f(x) | x \in E\},$$

称为 E 关于 f 的象. 如果 E 是 f 的定义域, 则 $f(E)$ 就是 f 的值域.

如果 $f(E)$ 有上 (下) 界, 则称 f 在 E 有上 (下) 界; 如果 $f(E)$ 有界, 则称 f 在 E 有界; 如果 $f(E)$ 无界, 则称 f 在 E 无界; $f(E)$ 的上 (下) 确界, 称为 f 在 E 中的上 (下) 确界, 并记成 $\sup_{x \in E} f$ ($\inf_{x \in E} f$).

例如 $\sup_{x \in \mathbf{R}} \sin x = 1$, $\inf_{x \in \mathbf{R}} \cos x = -1$, $\sup_{|x| < \frac{\pi}{2}} \tan x = +\infty$ 等.

设 $x_0 \in \mathbf{R}$, $r > 0$. 称区间 $(x_0 - r, x_0 + r)$ 为 x_0 的 r 邻域, 记为 $U(x_0, r)$; 称 $(x_0, x_0 + r)$ 为 x_0 的右侧邻域, 记为 $U^+(x_0, r)$; 称 $(x_0 - r, x_0)$ 为 x_0 的左侧邻域, 记为 $U^-(x_0, r)$. 把 $\{x \mid 0 < |x - x_0| < r\}$ 称为 x_0 的去心 r 邻域, 记为 $U^\circ(x_0, r)$, 它就是 x_0 的 r 邻域除去中心点 x_0 以后的集合, r 叫这些邻域的半径. 当不需要知道邻域半径时, 用 $U(x_0)$ 、 $U^\circ(x_0)$ 、 $U^+(x_0)$ 和 $U^-(x_0)$ 分别表示 x_0 的邻域、去心邻域、右侧邻域和左侧邻域.

1.1.1 数列极限的定义

一列实数

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$$

叫数列, 记成 $\{a_n\}$.

a_n 叫数列的第 n 项, n 叫这一项的脚标. 数列不能等同于一个数集, 因为一个数集的两个不同的元素互不相等, 而数列中的不同的两项可以相等, 也就是说一个数可以在数列中多次甚至无穷多次出现.

数列 $\{a_n\}$ 其实就是在自然数集 $\mathbf{N}$ 上的函数 $f(n)$. 如果 $f(n)$ 有 (上、下) 界, 就称 $\{a_n\}$ 有 (上、下) 界; $f(n)$ 的上 (下) 界称为 $\{a_n\}$ 的上 (下) 界; $f(n)$ 的上 (下) 确界称为 $\{a_n\}$ 的上 (下) 确界, 记成 $\sup\{a_n\}$ ($\inf\{a_n\}$).

“如果当 n 无限增大的时候, a_n 和 a 无限接近, 或者说 $|a_n - a|$ 无限趋于零, 就称 $\{a_n\}$ 以 a 为极限.” 这是中学数学教材给数列极限下的定义, 由于是一种基于直观而非量化的描述, 所以不便使用, 但它是给出数列极限的准确定义的出发点.

先看一个例子. 设

$$a_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}.$$

我们知道, $\{a_n\}$ 以 1 为极限, 因为 $|a_n - 1| = \frac{1}{n}$, 而当 n 无限增大时, $\frac{1}{n}$ 就无限减少而趋于零. 或可以说成只要 n 足够大, $\frac{1}{n}$ 就可以小于任意给定的无论多么小的数.

如果要 $|a_n - 1| = \frac{1}{n}$ 小于 10^{-1} , 只要取 $n > 10$; 如果要 $|a_n - 1|$ 小于 10^{-3} , 只要取 $n > 10^3$; …… 总之, 无论我们给出一个多么小的正数 ε , 只要取 $n > \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil$, 就能使 $|a_n - 1| = \frac{1}{n}$ 小于 ε .

一般而言, $\{a_n\}$ 以 a 为极限可以说成是: 无论给定一个多么小的正数 ε , 必可找到一个自然数 n_0 , 只要 $n > n_0$, 就有

$$|a_n - a| < \varepsilon.$$

于是, 我们有如下定义.

定义 1.1.1 设 $\{a_n\}$ 是给定的数列, 如果对 $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbf{N}$, 当 $n > n_0$, 就有 $|a_n - a| < \varepsilon$, 则称 a 是数列 $\{a_n\}$ 的极限, 也称数列 $\{a_n\}$ 收敛于 a , 记成

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$$

或

$$\lim a_n = a,$$

也可以记成 $a_n \rightarrow a (n \rightarrow \infty)$, 此定义称为数列极限的 ε - n_0 定义.

有极限的数列称为收敛数列, 不收敛的数列称为发散数列.

显然, $\lim a_n = a$ 和 $\lim(a_n - a) = 0$ 是等价的.

在定义中, 正数 ε 是任意的, 所以定义中的 $|a_n - a| < \varepsilon$ 也可写成 $|a_n - a| \leq \varepsilon$ 或 $|a_n - a| < k\varepsilon$ (其中 k 是一个正常数), 而 n_0 则是与 ε 有关的, 所以必要时, 可以记成 $n_0(\varepsilon)$ 或 n_ε . 一般当 ε 较小时, n_0 相应地要比较大些.

在考察一个数列的极限时, 可以认为 ε 是一个“很小”的正数, 而不必去考虑“较大”的那些 ε . 因为对于较小的 ε , 如果找到了需要的 $n_0(\varepsilon)$, 则对于较 ε 大的那些 ε' , 当 $n > n_0(\varepsilon)$ 时, 必定有

$$|a_n - a| < \varepsilon < \varepsilon',$$

所以对那些比 ε 大的 ε' , 都可以选取 $n_0(\varepsilon') = n_0(\varepsilon)$.

$\lim a_n = a$ 也可以说成: $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbf{N}$, 当 $n > n_0$ 时, 总有 $a_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$. 也就是说, a 的任何 ε 邻域内都包含了数列 $\{a_n\}$ 的几乎全体项, 而在邻域之外只有数列的有限项. 这可以看成是定义 1.1.1 几何描述 (图 1.1).

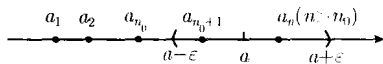


图 1.1

思考题: $\lim a_n = a, n > m$, 是否一定有 a_n 比 a_m 更靠近 a ?

由于决定 $\{a_n\}$ 的极限的是 n 充分大时 a_n 的值, 所以任意改变有限多项 a_n 的值或从数列中删去任意有限多项不会改变数列的敛散性, 也不会改变收敛数列的极限.

例 1.1.1 $a_n = a (n = 1, 2, 3, \dots)$, 则

$$\lim a_n = a.$$

例 1.1.1 给出的数列叫常数列.

例 1.1.2 $\alpha > 0$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0$.

证 由

$$\left| \frac{1}{n^\alpha} - 0 \right| = \frac{1}{n^\alpha}$$

可知, 要

$$\frac{1}{n^\alpha} < \varepsilon,$$

只要

$$n > \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{\alpha}},$$

所以 $\forall \varepsilon > 0$, 取

$$n_0 = \left[\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right],$$

则当 $n > n_0$, 即

$$n \geq \left[\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right] + 1 > \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

时, 就有

$$\left|\frac{1}{n^\alpha} - 0\right| < \varepsilon.$$

由定义可知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0.$$

例 1.1.3 $0 < |q| < 1$, 求证: $\lim q^n = 0$.

证 因为

$$|q^n - 0| = |q|^n,$$

$\forall \varepsilon > 0$, 不妨设 $\varepsilon < 1$, 要使

$$|q|^n < \varepsilon,$$

只需

$$n > \frac{\lg \varepsilon}{\lg |q|},$$

所以, 取

$$n_0 = \left[\frac{\lg \varepsilon}{\lg |q|}\right],$$

则当 $n > n_0$ 时, 就有

$$|q^n - 0| < \varepsilon.$$

由定义可知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0.$$

在证明当中, 我们要求 $0 < \varepsilon < 1$, 如果给的是 $\varepsilon' \geq 1$, 则我们可以任取一个 $0 < \varepsilon < 1$, 并取 $n_0 = \left[\frac{\lg \varepsilon}{\lg |q|}\right]$, 则当 $n > n_0$ 时, 必有

$$|q^n - 0| < \varepsilon < \varepsilon'.$$

其实,这一点在前面已经解释过了.

1.1.2 收敛数列的性质

定理 1.1.2 (有界性) 如果 $\{a_n\}$ 为收敛数列, 则 $\{a_n\}$ 为有界数列.

证 设 $\lim a_n = a$, 取 $\varepsilon = 1$, 由定义, $\exists n_0 \in \mathbf{N}$, 当 $n > n_0$ 时, 有

$$|a_n - a| < 1,$$

即当 $n > n_0$ 时, 有

$$|a_n| < |a| + 1.$$

取

$$M = \max(|a_1|, |a_2|, \cdots, |a_{n_0}|, |a| + 1),$$

则对所有 $n \in \mathbf{N}$, 都有

$$|a_n| \leq M.$$

□

由定理 1.1.2 可知, 如果 $\{a_n\}$ 是无界数列, 则 $\{a_n\}$ 一定是发散的.

定理 1.1.3 (唯一性) 如果 $\{a_n\}$ 是收敛数列, 则 $\{a_n\}$ 的极限是唯一的.

证 设 a 和 b 都是 $\{a_n\}$ 的极限, 则对 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n \in \mathbf{N}$, 使

$$|a_n - a| < \varepsilon, \quad |a_n - b| < \varepsilon.$$

于是有

$$|a - b| = |a - a_n + a_n - b| < |a_n - a| + |a_n - b| < 2\varepsilon,$$

由 ε 的任意性可知, 只有 $a = b$. 这说明收敛数列不能有两个不同的极限. □

从几何上看, 定理 1.1.3 是十分明显的 (图 1.2). 如果 $\lim a_n = a, b \neq a$, 则当 n 充分大时, a_n 都在 a 的 $\frac{b-a}{2}$ 邻域中, a_n 就不可能在 b 的 $\frac{b-a}{2}$ 邻域中, 因为这两个邻域没有公共点.

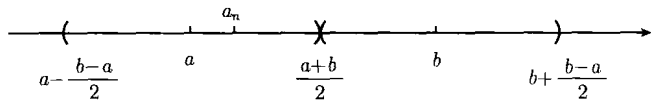


图 1.2

定理 1.1.4 (保序性) 设 $\lim a_n = a, \lim b_n = b$.

1° 如果 $\exists n_0 \in \mathbf{N}$, 使当 $n > n_0$ 时 $a_n \geq b_n$, 则 $a \geq b$;

2° 如果 $a > b$, 则 $\exists n_0 \in \mathbf{N}$ 及 $\tau > 0$, 使当 $n > n_0$ 时, $a_n > b_n + \tau$.