高校经典教材同步辅导丛书

配套高教版·同济大学数学系编

九章丛书

# 微积分

第三版·下册

# 同步辅导及习题全解

主 编 黄淑森 苏志平

◆知识点窍 ◆逻辑推理 ◆习题全解

◆全真考题 ◆名师执笔 ◆题型归类

新版

中国水利水电出版社

www.waterpub.com.cn

高校经典教材同步辅导丛书

# 微积分（第三版·下册）同步辅导及习题全解

主　编　黄淑森　苏志平

中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

## 内容提要

本书是高教版《微积分》（第三版·下册）教材的配套学习辅导及习题解答教材。编写的重点在于原教材中各章节全部习题的精解详答，思路清晰，逻辑缜密，循序渐进地帮助读者分析并解决问题，内容详尽，简明易懂。

本书对各章的知识点进行了归纳和提炼，帮助读者梳理各章脉络，统揽全局。在《微积分》教材给出的习题的基础上，根据每章的知识重点，精选了有代表的例题，方便读者迅速掌握各章的重点和难点。

本书可作为工科各专业本科学生《微积分》课程的教学辅导材料和复习参考用书及工科考研强化复习的指导书，也可以作为《微积分》课程教师的教学参考书。

**图书在版编目（CIP）数据**

微积分（第三版下册）同步辅导及习题全解 / 黄淑森，苏志平主编. -- 北京 : 中国水利水电出版社，2010.9
（高校经典教材同步辅导丛书）
ISBN 978-7-5084-7796-1

Ⅰ. ①微… Ⅱ. ①黄… ②苏… Ⅲ. ①微积分一高等学校一教学参考资料 Ⅳ. ①O172

中国版本图书馆CIP数据核字(2010)第163975号

策划编辑：杨庆川　责任编辑：杨元泓　加工编辑：陈洁　封面设计：李佳

| | |
|---|---|
| 书　　名 | 高校经典教材同步辅导丛书<br>微积分（第三版·下册）同步辅导及习题全解 |
| 作　　者 | 主　编　黄淑森　苏志平 |
| 出版发行 | 中国水利水电出版社（北京市海淀区玉渊潭南路 1 号 D 座　100038）<br>网址：www.waterpub.com.cn<br>E-mail：mchannel@263.net（万水）<br>sales@waterpub.com.cn<br>电话：（010）68367658（营销中心）、82562819（万水） |
| 经　　售 | 全国各地新华书店和相关出版物销售网点 |
| 排　　版 | 北京万水电子信息有限公司 |
| 印　　刷 | 北京市梦宇印务有限公司 |
| 规　　格 | 170mm×227mm　16 开本　16 印张　378 千字 |
| 版　　次 | 2010 年 8 月第 1 版　2010 年 8 月第 1 次印刷 |
| 印　　数 | 0001—5000 册 |
| 定　　价 | 20.80 元 |

# 目 录

# 第五章　向量代数与空间解析几何

## 学习指南

1. 理解空间直角坐标系，理解向量的概念及其表示；

2. 掌握向量的运算（线性运算、数量积、向量积、混合积），了解两个向量垂直、平行的条件；

3. 理解单位向量、方向角与方向余弦、向量的坐标表达式，掌握用坐标表达式进行向量运算的方法；

4. 掌握平面方程和直线方程及其求法；

5. 会求平面与平面、平面与直线、直线与直线之间的夹角，并会利用平面、直线的相互关系（平行、垂直、相交等）解决有关问题；

6. 会求点到直线、点到平面以及直线到平面的的距离；

7. 了解曲面方程和空间曲线方程的概念；

8. 了解常用二次曲面的方程及其图形，会求以坐标轴为旋转轴的旋转曲面及母线平行于坐标轴的柱面方程；

9. 了解空间曲线的参数方程和一般方程，会求空间曲线在坐标平面上的投影，并会求其方程.

## 本章知识网络图

- 向量代数与平面解析几何
  - 向量
    - 内积
    - 外积
    - 混合积
  - 平面和直线
    - 平面—法向量
    - 直线—方向向量
    - 距离
    - 夹角
  - 空间曲线和曲面
    - 曲线和曲面的表示
    - 二次曲面的分类

## 第一、二节 向量及其运算

### 知识点归纳

**1. 向量的定义**

向量是既有大小、又有方向的量.

(1) 向量的几何表示　有向线段(与起点无关,称为自由向量).

(2) 向量的坐标表示　$\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$,其中 $a_x$、$a_y$、$a_z$ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 在三个坐标轴上的投影. 以 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 为起点、$M(x,y,z)$ 为终点的向量 $\overrightarrow{M_0M}=(x-x_0,y-y_0,z-z_0)$.

(3) 向量的分解表示　$\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$,其中 $\boldsymbol{i}=(1,0,0)$,$\boldsymbol{j}=(0,1,0)$,$\boldsymbol{k}=(0,0,1)$.

**2. 向量的模与方向余弦**

设 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$,则向量的模 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$,方向余弦为 $\cos\alpha=\dfrac{a_x}{|\boldsymbol{a}|}$,$\cos\beta=\dfrac{a_y}{|\boldsymbol{a}|}$,$\cos\gamma=\dfrac{a_z}{|\boldsymbol{a}|}$,其中 $\alpha$、$\beta$、$\gamma$ 分别为 $\boldsymbol{a}$ 与 $x$ 轴、$y$ 轴、$z$ 轴正向的夹角(称为 $\boldsymbol{a}$ 的方向角),

$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$.

### 课后习题全解

**习题 5－1 解答**

1. 设 $A$、$B$、$C$ 为三角形的三个顶点,求 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}$.

**【知识点窍】** 向量的加法,三角形法则.

**解:** 如图 5.1 所示,显然有 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=0$

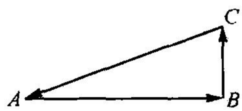

图 5.1

2. 已知正六边形 $ABCDEF$(字母按逆时针向),记 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{AE}=\boldsymbol{b}$,试用向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 表示向量 $\overrightarrow{AC}$,$\overrightarrow{AD}$,$\overrightarrow{AF}$ 和 $\overrightarrow{CB}$.

**【知识点窍】** 向量的运算.

**解:** 如图 5.2 所示,$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CB}=\dfrac{3}{2}\boldsymbol{a}+\dfrac{1}{2}\boldsymbol{b}$

$$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{ED}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},$$

$$\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{CB}=-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b},$$

$$\overrightarrow{CB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DA}=-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}.$$

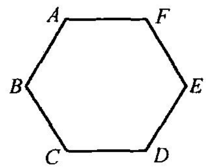

图 5.2

3. 设 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{v}=-\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$，试用 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 来表示 $2\boldsymbol{u}-3\boldsymbol{v}$.

**解**：$2\boldsymbol{u}-3\boldsymbol{v}=2(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{c})-3(-\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=5\boldsymbol{a}+11\boldsymbol{b}-7\boldsymbol{c}$.

4. 用向量法证明：三角形两边中点的连线平行于第三边，且长度等于第三边长度的一半.

**【知识点窍】** 向量的加法.

**解**：设在 $\triangle ABC$ 中(如图 5.3) 所示，$E$ 和 $F$ 分别是 $AB$ 边和 $AC$ 边的中点，即

$\overrightarrow{BA}=2\overrightarrow{EA}$，$\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AF}$，

所以有

$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{EA}+2\overrightarrow{AF}=2\overrightarrow{EF}$，

即结论成立.

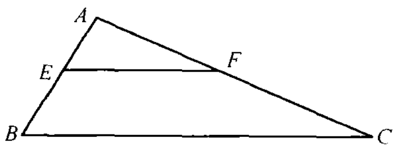


图 5.3

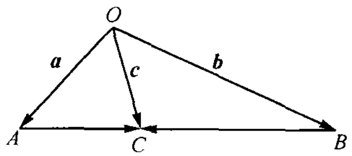


图 5.4

5. 设 $C$ 为线段 $AB$ 上一点且 $|CB|=2|AC|$，$O$ 为 $AB$ 外一点，记 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OA}$，$\boldsymbol{b}=\overrightarrow{OB}$，$\boldsymbol{c}=\overrightarrow{OC}$，试用 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 来表示 $\boldsymbol{c}$.

**【知识点窍】** 向量的加法.

**解**：如图 5.4 所示，$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{BC}=-2\overrightarrow{AC}=2\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{c}=\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{b}+\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{c}$，

即 $3\boldsymbol{c}=2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，解得 $\boldsymbol{c}=\dfrac{2}{3}\boldsymbol{a}+\dfrac{1}{3}\boldsymbol{b}$.

## 习题 5－2 解答

1. 在空间直角坐标系中，各卦限中的点的坐标有什么特征?指出下列各点所在的卦限：

$A(1,-3,2)$；　$B(3,-2,-4)$；　$C(-1,-2,-3)$；　$D(-3,2,-1)$.

**解**：各卦限中的点的坐标有如下特征：

| Ⅰ | Ⅱ | Ⅲ | Ⅳ | Ⅴ | Ⅵ | Ⅶ | Ⅷ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (+,+,+) | (−,+,+) | (−,−,+) | (+,−,+) | (+,+,−) | (−,+,−) | (−,−,−) | (+,−,−) |

$A$：Ⅳ，$B$：Ⅷ，$C$：Ⅶ，$D$：Ⅵ.

2. 在坐标面上和在坐标轴上的点的坐标各有什么特征?指出下列各点的位置：

$P(0,2,-5)$；　$Q(5,2,0)$；　$R(8,0,0)$；　$S(0,2,0)$.

**解**：$xOy$ 面上的点：$(x,y,0)$；$yOz$ 面上的点：$(0,y,z)$；$xOz$ 面上的点：$(x,0,z)$. $x$ 轴上的点：$(x,0,0)$；$y$ 轴上的点 $(0,y,0)$；$z$ 轴上的点 $(0,0,z)$.

$P$ 在 $yOz$ 面上；$Q$ 在 $xOy$ 面上；$R$ 在 $x$ 轴上；$S$ 在 $y$ 轴上.

**3.** 求点$(a,b,c)$关于(1)各坐标面;(2)各坐标轴;(3)坐标原点的对称点的坐标.

**解:**(1)关于$xOy$面、$yOz$面和$xOz$面的对称点分别是$(a,b,-c)$,$(-a,b,c)$,$(a,-b,c)$;

(2)关于$x$轴、$y$轴和$z$轴的对称点分别为$(a,-b,-c)$,$(-a,b,-c)$,$(-a,-b,c)$;

(3)关于原点的对称点为$(-a,-b,-c)$.

**4.** 自点$P_0(x_0,y_0,z_0)$分别作各坐标面和各坐标轴的垂线,写出各垂足的坐标,进而求出$P_0$到各坐标面和各坐标轴的距离.

**解:**自点$P_0$作各坐标面的垂线,垂足的坐标和$P_0$到各坐标面的距离为:

$xOy$面:$(x_0,y_0,0)$,$d=|z_0|$;

$yOz$面:$(0,y_0,z_0)$,$d=|x_0|$;

$xOz$面:$(x_0,0,z_0)$,$d=|y_0|$.

点$P_0$到作各坐标轴的垂线,垂足的坐标和$P_0$到各坐标轴的距离为:

$x$轴:$(x_0,0,0)$,$d=\sqrt{y_0^2+z_0^2}$;

$y$轴:$(0,y_0,0)$,$d=\sqrt{x_0^2+z_0^2}$;

$z$轴:$(0,0,z_0)$,$d=\sqrt{x_0^2+z_0^2}$.

**5.** 过点$P_0(x_0,y_0,z_0)$分别作平行于$z$轴的直线和平行于$xOy$面的平面,问在它们上面的点的坐标各有什么特征?

**解:**平行于$z$轴的直线上的点的坐标为$(x_0,y_0,z)$;

平行于$xOy$面的平面上的点的坐标为$(x,y,z_0)$.

**6.** 已知点$A(2,1,4)$、$B(4,3,10)$,写出以线段$AB$为直径的球面方程.

**【知识点窍】** 两点间的距离公式,球面方程。

**【逻辑推理】** 先求出$AB$两点间的距离,则以线段$AB$为直径的球面半径$R=\frac{1}{2}|AB|$,再求出线段$AB$的中点坐标,则可解。

**解:**设线段$AB$的中点坐标为$(x_0,y_0,z_0)$,

则 $x_0=\frac{2+4}{2}=3$,$y_0=\frac{1+3}{2}=2$,$z_0=\frac{4+10}{2}=7$.

球面半径$r=\frac{1}{2}|AB|=\frac{1}{2}\sqrt{(4-2)^2+(3-1)^2+(10-4)^2}=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{11}=\sqrt{11}$,所求球面方程为$(x-3)^2+(y-2)^2+(z-7)^2=11$.

**7.** 设长方体的各棱与坐标轴平行,已知长方体的两个顶点的坐标,试写出其余六个顶点的坐标:

(1)$(1,1,2)$,$(3,4,5)$; (2)$(4,3,0)$,$(1,6,-4)$.

**解:**(1)各棱与坐标轴平行,所以$(1,1,2)$,$(3,4,5)$必是长方体的两个对角顶点;

与$(1,1,2)$相邻的顶点为:$(1,1,5)$,$(1,4,2)$,$(3,1,2)$;

与$(3,4,5)$相邻的顶点为:$(3,4,2)$,$(3,1,5)$,$(1,4,5)$.

(2) 各棱与坐标轴平行，所以(4,3,0)，(1,6，－4) 必是长方体的两上对角顶点；

与(4,3,0) 相邻的顶点为：(4,3，－4)，(4,6,0)，(1,3,0)；

与(1,6，－4) 相邻的顶点为：(1,6,0)，(1,3，－4)，(4,6，－4).

**8.** 证明：三点 $A(1,0,-1)$，$B(3,4,5)$，$C(0,-2,-4)$ 共线.

**【逻辑推理】** 只需证明$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{BC}$成线性关系即可.

**解**：由于向量$\overrightarrow{AB}=\{2,4,6\}$，$\overrightarrow{BC}=\{-3,-6,-9\}$，所以$\overrightarrow{AB}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$，又因为$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{BC}$有公共点 $B$，故点 $A$、$B$、$C$ 共线.

**9.** 证明：以点 $A(4,1,9)$，$B(10,-1,6)$，$C(2,4,3)$ 为顶点的三角形是等腰直角三角形.

**【知识点窍】** 验证满足等腰直角三角形的定义.

**解**：$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(10-4)^2+(-1-1)^3+(6-9)^2}=7$

$|\overrightarrow{BC}|=\sqrt{(2-10)^2+4(-(-1))^2+(3-6)^2}=7\sqrt{2}$

$|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{(2-4)^2+(4-1)^2+(3-9)^2}=7$

因为　$(|\overrightarrow{AB}|)^2+(|\overrightarrow{AC}|)^2=(|\overrightarrow{BC}|)^2$，$|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{AC}|$

所以，以 $A,B,C$ 为顶点的三角形为等腰直角三角形.

**10.** 已知点 $A(3,-1,2)$，$B(1,2,-4)$，$C(-1,1,2)$，试求点 $D$，使得以 $A,B,C,D$ 为顶点的四边形为平行四边形.

**解**：设平行四边形的 4 个顶点依次为 $A$、$B$、$C$、$D$，则因为 $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{CD}|$，设 $D(x,y,z)$，于是$(-2,3,-6)=(-1-x,1-y,2-z)$，所以 $x=1$，$y=-2$，$z=8$ 和 $D$ 为$(1,-2,8)$.

同理，若 4 个顶点依次为 $A$、$C$、$B$、$D$ 和 $A$、$C$、$D$、$B$，则可得 $D$ 的坐标分别为$(5,0,-4)$，$(-3,4,-4)$.

**11.** 设向量的方向余弦分别满足(1)$\cos\gamma=0$；(2)$\cos\alpha=1$；(3)$\cos\alpha=\cos\gamma=0$，问这些向量与坐标或坐标面的关系如何？

**解**：(1)$\cos\gamma=0$，$\gamma=\frac{\pi}{2}$，故此向量垂直于 $z$ 轴，平行于 $xOy$ 平面；

(2)$\cos\alpha=1$，$\alpha=0$，故此向量的指向与 $x$ 轴正向一致，垂直于 $yOz$ 面；

(3)$\alpha=\gamma=\frac{\pi}{2}$，故此向量同时垂直于 $x$ 轴和 $z$ 轴，即平行于 $y$ 轴，垂直于 $xOz$ 面.

**12.** 已知两点 $M_1(4,\sqrt{2},1)$ 和 $M_2(3,0,2)$，计算向量$\overrightarrow{M_1M_2}$的模、方向余弦和方向角.

**解**：$|\overrightarrow{M_1M_2}|=\sqrt{(4-3)^2+(\sqrt{2}-0)^2+(1-2)^2}=2$

方向余弦为：　$\cos\alpha=\frac{3-4}{|\overrightarrow{M_1M_2}|}=-\frac{1}{2}$，　$\cos\beta=\frac{0-\sqrt{2}}{|\overrightarrow{M_1M_2}|}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$，

$\cos\gamma=\frac{2-1}{|\overrightarrow{M_1M_2}|}=\frac{1}{2}$.

方向角为：$\alpha = \arccos(-\frac{1}{2}) = 120°$，　　$\beta = \arccos(-\frac{\sqrt{2}}{2}) = 135°$，

$$\gamma = \arccos(\frac{1}{2}) = 60°.$$

13. 设 $\boldsymbol{a} = 3\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}+8\boldsymbol{k}, \boldsymbol{b} = 2\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}-7\boldsymbol{k}, \boldsymbol{c} = 5\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-4\boldsymbol{k}$，求向量 $\boldsymbol{l} = 4\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$ 在 $x$ 轴上的投影以及在 $y$ 轴上的分向量.

**解**：$\boldsymbol{l} = 4\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$，所以 $l$ 在 $x,y$ 轴上的投影分别为

$l_x = 4\times 3+3\times 2-5 = 13$

$l_y = 4\times 5+3\times(-4)-1 = 7$

$l$ 在 $x$ 轴上的投影为 13.

$l$ 在 $y$ 轴上的分向量为 $7\boldsymbol{j}$.

14. 设 $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}, \boldsymbol{b} = \boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}, \boldsymbol{c} = -2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$，试用单位向量 $\boldsymbol{e}_a, \boldsymbol{e}_b, \boldsymbol{e}_c$ 表示向量 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$.

**【逻辑推理】**　将 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 看做常量，$\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 看做变量解方程组即可求解。

**解**：解由题设等式组成的方程组，易得

$$\boldsymbol{j} = \frac{1}{3}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}), \boldsymbol{k} = \frac{1}{4}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}), \boldsymbol{i} = \frac{5}{12}\boldsymbol{a}+\frac{1}{12}\boldsymbol{b}-\frac{1}{4}\boldsymbol{c},$$

而 $\boldsymbol{a} = \sqrt{3}\boldsymbol{e}_a, \boldsymbol{b} = \sqrt{6}\boldsymbol{e}_b, \boldsymbol{c} = 3\boldsymbol{e}_c$，于是得

$$\boldsymbol{i} = \frac{5\sqrt{3}}{12}\boldsymbol{e}_a+\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{12}}\boldsymbol{e}_b-\frac{3}{4}\boldsymbol{e}_c, \quad \boldsymbol{j} = \frac{\sqrt{3}}{3}\boldsymbol{e}_a-\frac{\sqrt{6}}{3}\boldsymbol{e}_b, \quad \boldsymbol{k} = \frac{\sqrt{3}}{4}\boldsymbol{e}_a+\frac{\sqrt{6}}{4}\boldsymbol{e}_b+\frac{3}{4}\boldsymbol{e}_c.$$

15. 一向量的终点为 $N(3,-2,6)$，它在 $x$ 轴、$y$ 轴、$z$ 轴上的投影依次为 $5,3,-4$，求这向量的起点的坐标.

**【知识点窍】**　考查向量的定义及向量的运算.

**解**：设这个向量的起点的坐标为 $M$，则由已知得

向量 $\overrightarrow{MN} = (5,3,-4)$，故点 $M$ 的坐标为 $(-2,-5,10)$.

## 第三节　向量的乘法运算

### 知识点归纳

**1. 向量的加法与数乘运算**

向量的加法有平行四边形法则和三角形法则：

(1) 运算的代数表示：设 $\boldsymbol{a} = (a_x, a_y, a_z), \boldsymbol{b} = (b_x, b_y, b_z)$，

则(ⅰ) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} = (a_x+b_x, a_y+b_y, a_z+b_z)$；

(ⅱ) $\lambda\boldsymbol{a} = (\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z)$.

线性运算律为

① 交换律　$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$

② 结合律　$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}),\lambda(\mu\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$

③ 分配律　$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$

(2) 定理 1:设向量 $\boldsymbol{a}\neq 0$,则

$\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\exists\lambda\in\mathbf{R}$,使得 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$;

或　设 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)\neq 0,\boldsymbol{b}=(b_x,b_y,b_z)$,则

$$\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\frac{b_x}{a_x}=\frac{b_y}{a_y}=\frac{b_z}{a_z}.$$

**推论**　对数轴 $Ou$ 上的任意一点 $P$,轴上有向线段$\overrightarrow{OP}$都可唯一地表示为 $P$ 点的坐标 $u$ 与轴上单位向量 $\boldsymbol{e}_u$ 的乘积$\overrightarrow{OP}=u\boldsymbol{e}_u$.

空间直角坐标系中,三个坐标轴上正向的单位向量分别记为 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$,则 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$ 的分解表达式为:$\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$.

**2. 数量积**

数量积又称点积、内积.

(1) 定义　$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\boldsymbol{a}\hat{,}\boldsymbol{b})=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$.

(2) 性质　$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|a|^2,\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$,

$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c},(\lambda\boldsymbol{a})\cdot(\mu\boldsymbol{b})=(\lambda\mu)(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$.

(3) 向量的夹角　$\cos(\boldsymbol{a}\hat{,}\boldsymbol{b})=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\dfrac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}$.

$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$ 的充要条件是 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$ 或 $a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=0$.

$\boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{a}$ 上的投影　$\mathrm{Prj}_a\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{b}|\cos(\boldsymbol{a}\hat{,}\boldsymbol{b})=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|}=\boldsymbol{e}_a\cdot\boldsymbol{b}$.

**3. 向量积**

向量积又称叉积、外积.

(1) 定义　$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin(\boldsymbol{a}\hat{,}\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{e}_c$,其中 $\boldsymbol{e}_c$ 是同时垂直于 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 的单位向量,并且 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{e}_c$ 符合右手法则.

(2) 坐标表达式　设 $\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k},b=b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k}$,则

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\end{vmatrix}.$$

(3) 性质　$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0},\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$.

$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c},(\lambda\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\times(\lambda\boldsymbol{b})$.

(4) 几何意义：(ⅰ) $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$ 等于以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为边的平行四边形面积；

(ⅱ) $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{a}$ 且 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{b}$.

**4. 混合积**

(1) 定义 $[\boldsymbol{abc}]=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$.

(2) 坐标表达式 设 $\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k},\boldsymbol{b}=b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k},\boldsymbol{c}=c_x\boldsymbol{i}+c_y\boldsymbol{j}+c_z\boldsymbol{k}$,

$$\text{则}[\boldsymbol{abc}]=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

(3) 性质

(ⅰ) $[\boldsymbol{abc}]=[\boldsymbol{bca}]=[\boldsymbol{cab}]$.

(ⅱ) $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 共面的充要条件是 $[\boldsymbol{abc}]=0$ 或存在一组不全为 0 的数 $\kappa$、$\lambda$、$\mu$，使得 $\kappa\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}+\mu\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$.

(4) 几何意义 $|(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}|$ 等于以 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 为棱的平行六面体的体积.

## 课后习题全解

### 习题 5－3 解答

**1.** 设 $\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k},\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$，求

(1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$；(2) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$；(3) $\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}$；(4) $\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}$；(5) $\cos(\boldsymbol{a}\hat{,}\boldsymbol{b})$.

**解**：(1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=3\times1+(-1)\times2+(-2)\times(-1)=3$.

$$(2)\ \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 3 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}=5\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+7\boldsymbol{k}.$$

$$(3)\ \mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{3}{\sqrt{14}}.$$

$$(4)\ \mathrm{Prj}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}=\frac{3}{\sqrt{6}}.$$

$$(5)\ \cos(\boldsymbol{a}\hat{,}\boldsymbol{b})=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{\sqrt{3^2+(-1)^2+(-2)^2}\sqrt{1+2^2+(-1)^2}}=\frac{3}{\sqrt{14}\sqrt{6}}=\frac{3}{2\sqrt{21}}=\frac{\sqrt{21}}{14}.$$

**2.** 设 $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k},\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k},\boldsymbol{c}=\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}$，求：

(1) $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$； (2) $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}$； (3) $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$； (4) $(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}$.

$$\textbf{解}：(1)\ \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix}=-8\boldsymbol{i}-5\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}.$$

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=-8+10=2$$

$$(2)(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\-8&-5&1\\1&-2&0\end{vmatrix}=2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+21\boldsymbol{k}$$

$$(3)\ \boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=(2\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})\times\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\1&-1&3\\1&-2&0\end{vmatrix}=(2\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})\times(6\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k})$$

$$=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\2&-3&1\\6&3&-1\end{vmatrix}=8\boldsymbol{j}+24\boldsymbol{k}$$

$$(4)(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\,\boldsymbol{c}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\,\boldsymbol{b}=[2\times1+(-3)\times(-1)+1\times3](\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j})$$
$$-[2\times1+(-3)\times(-2)+1\times0](\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k})$$
$$=-8\boldsymbol{j}-24\boldsymbol{k}$$

**3.** 设向量$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$满足$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=0$,证明:

(1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}=-\dfrac{1}{2}(|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2+|\boldsymbol{c}|^2)$;

(2) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}$.

**解**:(1) 因为$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=0$,所以$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=0$

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{c}+2(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})$$

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=-\frac{1}{2}(|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2+|\boldsymbol{c}|^2)$$

(2) 因为$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=0$,所以$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=0$

$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}=0,\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}=0$,也即$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}$

同理$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$.

**4.** 已知 $A(1,-1,2),B(5,-6,2),C(1,3,-1)$,求

(1) 同时与$\overrightarrow{AB}$ 及$\overrightarrow{AC}$ 垂直的单位向量;

(2)$\triangle ABC$ 的面积;

(3) 从顶点 $B$ 到边 $AC$ 的高的长度.

**解**:(1) $\overrightarrow{AB}=(4,-5,0),\overrightarrow{AC}=(0,4,-3)$,与$\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$ 垂直的向量有

$$\pm(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC})=\pm\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\4&-5&0\\0&4&-3\end{vmatrix}=\pm(15\boldsymbol{i}+12\boldsymbol{j}+16\boldsymbol{k})$$

对应的单位向量为$\pm\dfrac{\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|}=\pm\dfrac{15\boldsymbol{i}+12\boldsymbol{j}+16\boldsymbol{k}}{\sqrt{15^2+12^2+16^2}}$

(2) $S_{\triangle ABC}=|\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=\dfrac{1}{2}|15\boldsymbol{i}+12\boldsymbol{j}+16\boldsymbol{k}|=\dfrac{1}{2}\sqrt{15^2+12^2+16^2}=\dfrac{25}{2}$