图析考点
——能力思维导图

高中数学

张民丽　司超孔　王雪峰
王占平　马　勇　主编

北京出版集团公司　北京教育出版社

高中数学知识结构与思想方法思维导图

- **数列**
  - 热点考向
    - 与等差、等比数列有关的问题(主要考定义和性质)
    - 数列求通项的问题（主要考累加、累积、构造、迭代法）
    - 数列求和的问题（主要考查等差等比数列的求和、错位相减法、裂项相消法、倒序相加法）
  - 主要思想方法
    - 函数思想（数列是特殊的函数）
    - 转化与化归的思想（非等差、等比数列的问题经常转化为等差、等比数列的问题）
- **立体几何**
  - 热点考向
    - 空间几何体的三视图
    - 直线与平面平行、垂直的证明
    - 空间的角的计算（两条异面直线所成的角、直线与平面所成的角、二面角）
  - 主要思想方法
    - 解析法（利用空间坐标系解决平行、垂直、角的问题）
- **解析几何**
  - 热点考向
    - 直线的倾斜角、斜率、截距的问题
    - 圆的方程、直线与圆的位置关系的问题
    - 圆锥曲线的定义、标准方程、几何性质，直线与圆锥曲线的问题（常考查最值、定值、参数范围的问题）
    - 轨迹问题
  - 常用知识
    - 弦长公式：$|AB|=\sqrt{1+k^2}\,|x_1-x_2|$或$|AB|=\sqrt{1+\frac{1}{k^2}}\,|y_1-y_2|$
    - 根与系数的关系
    - 判别式
  - 主要思想方法
    - 数形结合（做这一部分题目先画图分析，再求解）
    - 分类讨论（直线斜率讨论存在与不存在、截距讨论是否为零、含参数的问题的讨论）
    - 点差法（解决与弦中点有关的问题）
- **计数原理、概率与统计、推理与证明、算法与复数**
  - 主要内容
    - 排列组合、二项式定理
    - 概率，随机变量的分布列、期望、方差
    - 随机抽样
    - 频率分布表、直方图、折线图、茎叶图
    - 相关性检验与独立性检验
    - 合情推理与演绎推理
    - 直接证明与间接证明、数学归纳法
    - 算法与程序框图
    - 数系的扩充与复数的运算
  - 热点考向
    - 几何概型、条件概率、折线图、茎叶图、程序框图（这几部分内容都是新教材新增内容）
    - 归纳推理与类比推理
    - 离散型随机变量的分布列与期望、方差
    - 数学归纳法（常与数列、不等式结合考查）
  - 主要思想方法
    - 分类讨论（解决排列组合、概率计算问题）
    - 归纳—猜想—证明的思路方法
- **集合、常用逻辑用语、不等式、函数与导数**
  - 集合
    - 热点考向
      - 集合关系与运算问题
        - 处理方法：数形结合
      - 以集合语言为背景的新信息题
        - 解题关键：准确理解定义
        - 定义新概念型
        - 定义新运算型
        - 开放型
    - 主要思想方法
      - 数形结合（利用数轴、Venn图解题）
      - 分类讨论（求参数的范围问题）
  - 常用逻辑用语
    - 主要内容
      - 逻辑联结词
      - 四种命题及其相互关系
      - 充分、必要条件
      - 全称量词与存在量词
    - 热点考向
      - 命题真假的判断与命题的否定
      - 充分条件、必要条件、充要条件的确认与探索
  - 不等式
    - 热点考向
      - 不等式恒成立与求解的问题
      - 利用基本不等式求最值的问题
      - 线性规划问题
    - 主要思想方法
      - 数形结合（利用数轴求不等式的解集、线性规划问题）
      - 函数思想（求最值）
      - 分离参数法（解决不等式恒成立与有解的问题）
  - 函数与导数
    - 热点考向
      - 函数的性质问题
      - 函数的图象问题
      - 函数的零点问题
      - 用导数解决函数的问题（解决函数的单调性、极值、最值、零点）
    - 主要思想方法
      - 数形结合（函数的性质问题）
      - 分类讨论（含参数的函数问题）
- **三角函数、平面向量、三角恒等交换解三角形**
  - 重点公式
    - 同角三角函数的关系式、诱导公式
    - 两角和与差的正弦、余弦、正切公式
    - 降幂公式：$\sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}$，$\cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2}$
    - 数量积的计算公式：
      代数形式：$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$，
      坐标形式：$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=x_1x_2+y_1y_2\,(\boldsymbol{a}=(x_1,x_2),\boldsymbol{b}=(y_1,y_2))$
  - 热点考向
    - 函数$y=A\sin(\omega x+\varphi)$的解析式、图象与性质问题
    - 三角函数与向量知识的综合
    - 用正、余弦定理解决与测量、几何计算有关的实际问题
    - 用向量线性运算解决几何问题
  - 主要思想方法
    - 数形结合（解决向量的几何运算，解三角形等问题）
    - 分类讨论（含参的三角函数值域问题）
    - 整体思想(函数$y=\sin(\omega x+\varphi)$中$\omega x+\varphi$为一整体)
    - 换元法（三角函数求最值、值域的问题）

告诉中学生朋友

一、图析考点有哪些优势?

一般来说，善于学习的人归纳总结的能力也很强。要想在学习上有更深入的思考和理解，就要学会把看似分散的知识点连成线、结成网，使学到的知识系统化、规律化、结构化。

图析考点，强调系统化、网络化的思维模式，不但强调考点之间的内在结构，而且更加注重考试命题时考点之间表现出来的更深层次的综合联系和逻辑关系。

考点图析化的力量是强大的，知识联合起来的力量决不是个体力量的简单叠加，而是成几何级数增长的，这正是提高学习效率的关键。

二、图析考点的科学依据是什么?

图析考点，并不是简单画出知识结构图，而是运用了思维导图的学习工具，将最科学、最先进的学习方法贯穿其中，使学习知识的效率大大提高。

思维导图，又叫心智图，是表达发散性思维的有效的图形思维工具。思维导图运用图文并重的技巧，把各级主题的关系用相互隶属与相关作用的层级图表现出来，把主题关键词与图像、颜色等建立记忆链接。思维导图充分运用左右脑的机能，开启人类大脑的无限潜能。

思维导图是一种革命性的思维工具，简单却又极其有效，被誉为21世纪全球性的思维工具。

图析考点正是在充分运用思维导图的基础上，结合教学实际和考试要求。深层次描绘出学生知识学习和能力提高的逻辑图，使知识学习过程中的技能、方法、规律更加清晰。

三、使用本书注意哪些问题?

我们组织一线的教学专家，精心编写了这套丛书，希望帮助同学们在学习方法和学习知识的深度和广度上，有一个根本的改变和提高。

图析考点，并不是全新的陌生的学习方式，其实我们在平时的学习中自觉不自觉地在应用着。比如，学习完一章的内容，我们就会在头脑中形成这一章的知识结构图。我们学习的知识，只有在脑海中形成了这样的结构图，才是系统的、有序的、不容易被遗忘的，也才能真正变成我们自己的东西，在考试的时候，才能自如地运用。

使用本书时，请同学们特别注意以下事项：

1. 针对基础知识思维导图，查缺补漏，找出自己的薄弱环节加以巩固，使自己的知识框架变得完整、清晰。

2. 通过考点思维导图的学习，要对与这一考点有关的各种主要题型有一个清晰的掌握。找出哪一类题型还是自己不熟悉的，哪一个思维分支还是自己没有深度挖掘的。

3. 通过思维导图的学习，要将所学过的所有经典方法、技能和规律总结进去，将所有的经典习题与思维导图的分支建立起联系，构建一个不宜遗忘的最科学的知识构架。

4. 每个人的学习方式不同，知识水平也有差异。通过查缺补漏，通过将所学的好方法和好习题的归纳整理、对号入座，最后一定要将本书中的思维导图翻译成自己的思维导图。这一点至关重要。

我们在书中不但描绘出了所学知识的“基础知识思维导图”，还精心勾画出“考点思维导图”，就是帮助大家，从更加纵深、更加广博的角度来审视和学习知识，使所学的知识在大脑中真正扎根、真正融会贯通、运用自如。

在教学实验过程中，借助思维导图的学习，参与实验的同学们大大缩短了知识的学习时间，知识的学习变得更加系统和清晰，知识记忆得更加长久。同学们通过自己勾画思维导图，能够多角度全方位地进行思考，极大地调动了学习的积极性和学习的兴趣，使学习变得更加主动。我们也衷心地希望使用本书的同学们能够在学习上有自己独到的感受和提高，使学习变得更加轻松和高效。

Contents

目　录

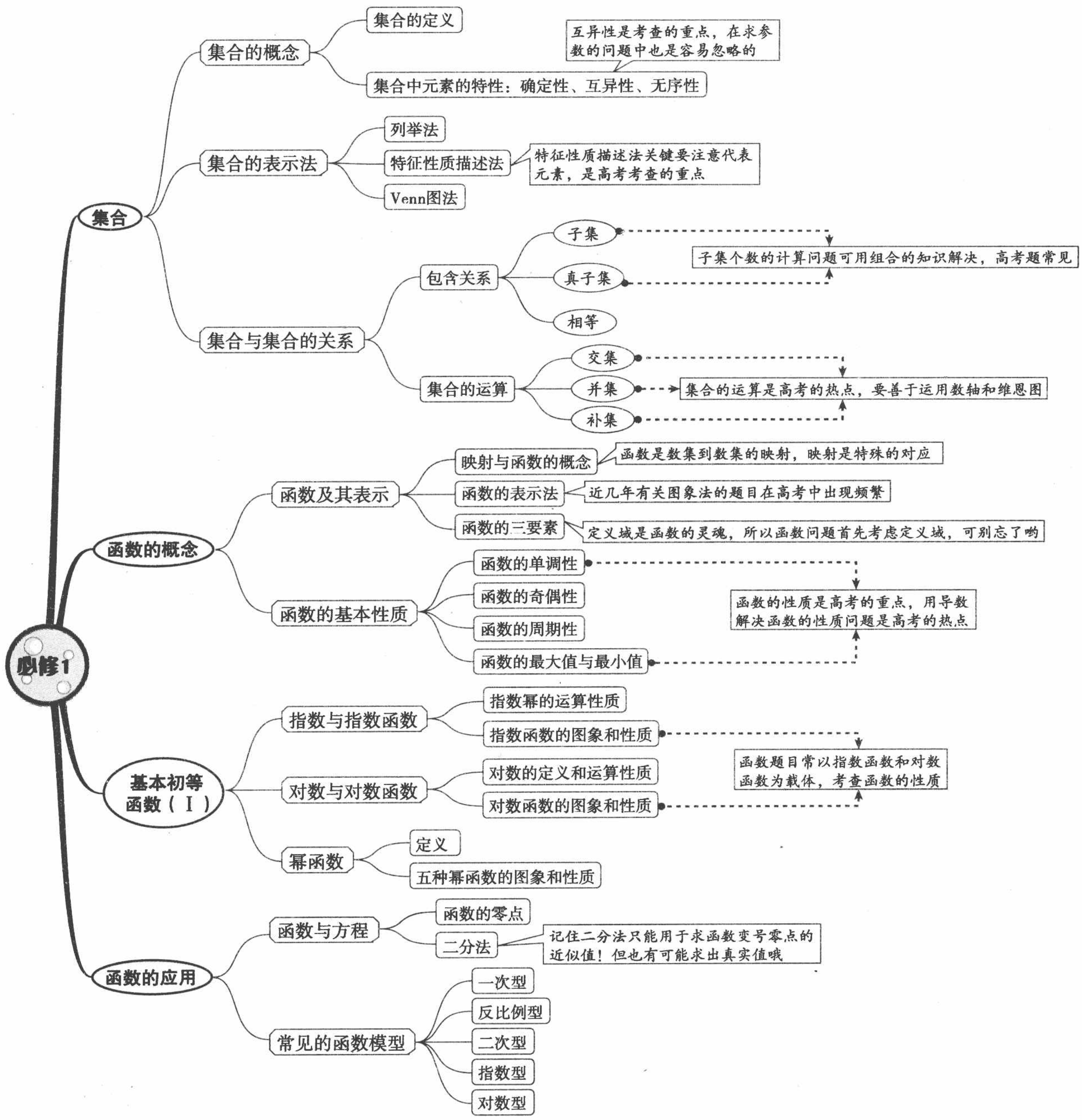
Contents

Contents

Contents

必修1

必修1 思维导图

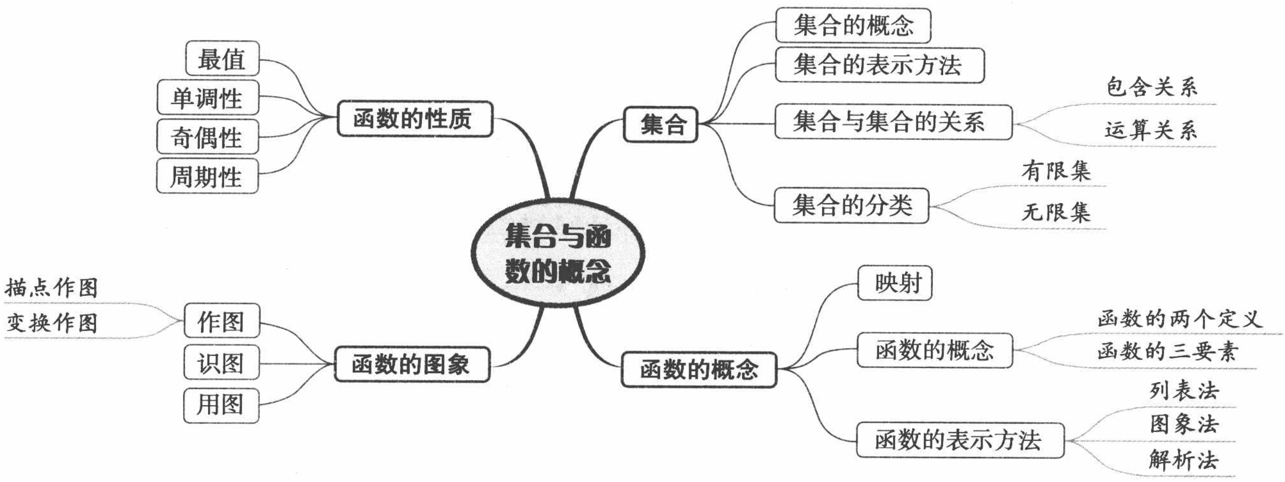


必修模块数学1共分三章：集合、函数、基本初等函数（Ⅰ）（指数函数、对数函数、幂函数），这三章的内容与义务教育阶段相衔接，起着承上启下的作用，对学生的后续学习具有重要意义．必修模块数学1是整个高中数学的基础．

处理集合问题的常用思想方法是列举法和数形结合思想，高考对集合的考查常以运算为主，信息题是近几年考查的热点，题型为选择题，属容易题；有关函数的题目分值在高考中占20%左右，函数可与向量、导数结合考查，有关函数的题也可能为应用题，估计今年高考函数与导数仍会出解答题．

第一章 集合与函数的概念

全章知识思维导图

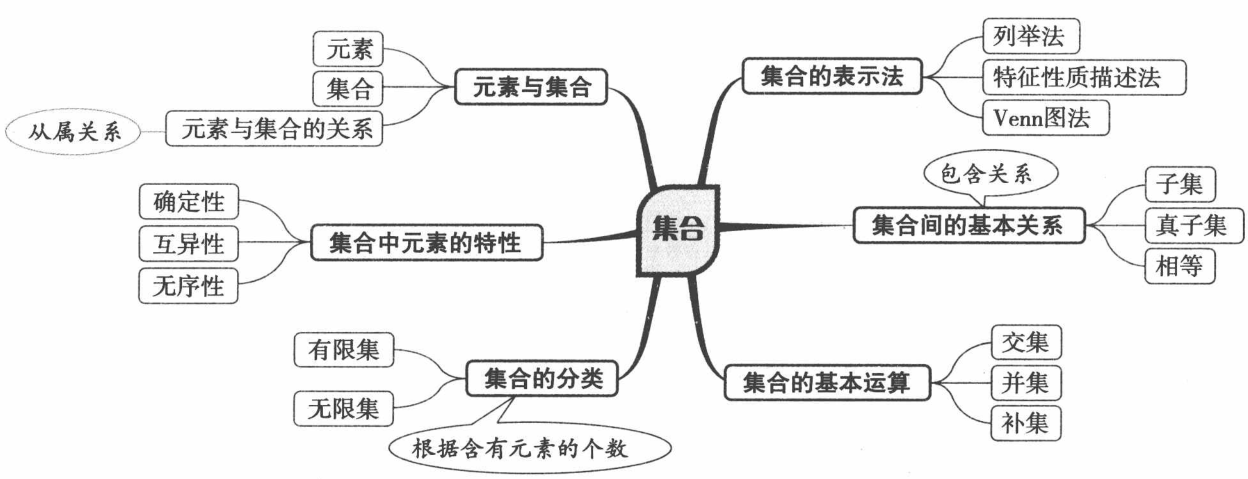


函数是高考数学的重点内容之一，函数的观点和思想方法贯穿整个高中数学的全过程，包括解决几何问题.在近几年的高考试卷中，选择题、填空题、解答题三种题型中每年都有函数试题，而且常考常新.以基本函数为背景的应用题和综合题是高考命题的新趋势.

考试热点：①考查函数的表示法、定义域、值域、单调性、奇偶性、反函数和函数的图象.②函数与方程、不等式、数列是相互关联的概念，通过对实际问题的抽象分析，建立相应的函数模型并用来解决问题，是考试的热点.③考查运用函数的思想来观察问题、分析问题和解决问题，渗透数形结合和分类讨论的基本数学思想.

第一节 集合

基础知识思维导图



集合语言是现代数学的基本语言.《新课程大纲》要求学生会使用最基本的集合语言表示有关的对象，发展运用数学语言进行交流的能力.它和函数、方程、不等式等都有非常紧密的联系.

重点难点突破

（一）理解集合概念时应该注意哪些问题？

答：(1)集合中的元素是确定的．也就是说，对于集合A，任一元素a或者属于A或者不属于A，两者必居其一．若元素a属于集合A，则用$a\in A$表示，若不属于A，则用$a\notin A$表示．

(2)集合中的每个元素是互异的．也就是说，在一个集合中不会重复出现相同的元素．例如集合$\{a,b,b,c,d,d,d\}$的写法是错误的，应为$\{a,b,c,d\}$．

(3)集合中的元素是无序的，可以任意列出．例如$\{1,2,3\}$，$\{2,3,1\}$，$\{3,1,2\}$是同一集合的三种列举法．

(4)集合的元素可以是任何事物，甚至某一集合可以作为另一集合的元素．例如集合$A=\{1,2,\{a,b\}\}$，其中$\{a,b\}$是一个集合，但它又是A的元素．

（二）什么是集合的列举法与特征性质描述法？

答：(1)列举法：把集合中的元素一一列举出来，写在大括号内表示集合的方法，叫列举法．

(2)特征性质描述法的一般形式为：$\{x|p(x)\}$，竖线前面的x表示集合中元素的一般形式，叫代表元素，竖线后面的$p(x)$表示集合元素x的公共属性．在不引起混淆的情况下，为了简便，有些集合用描述法表示时，可省去竖线及左边的部分，例如由所有圆组成的集合，可表示为{圆}．

说明：①由列举法可以看清集合的元素，由描述法可以看清集合的特征．

②两种表示法里的“{　}”都有“全体”“集合”的含义，因而，{全体整数}中的“全体”二字重复，应该为{整数}．

③特征性质描述法特别要注意代表元素，特征性质相同但代表元素不同，则表示的集合不同，例如$A=\{x|y=x^2+1\}$，$B=\{y|y=x^2+1\}$，$C=\{(x,y)|y=x^2+1\}$三个集合分别表示：$A=\mathbf{R}$，$B=[1,+\infty)$，C表示抛物线$y=x^2+1$上的所有点构成的集合．A，B都是数的集合，C是直角坐标平面上的点的集合．

（三）“且”与“或”这两个连接词的含义是什么？

答：$A\cap B=\{x|x\in A$且$x\in B\}$，这里“且”的意思与通常理解的“既”“同时”等是一样的，$A\cap B$即由A与B的公共元素组成的．

$A\cup B=\{x|x\in A$或$x\in B\}$．这里“或”的意思与通常所说的“非此即彼”有区别，这里的“或”有三层含义：①属于A的不属于B的；②属于B的不属于A的；③既属于A又属于B的．

（四）含有n个元素的集合的子集的个数是多少？

答：含有n个元素的集合共有2^n个子集，其中真子集的个数为2^n-1个，非空子集有2^n-1个，非空真子集有2^n-2个．

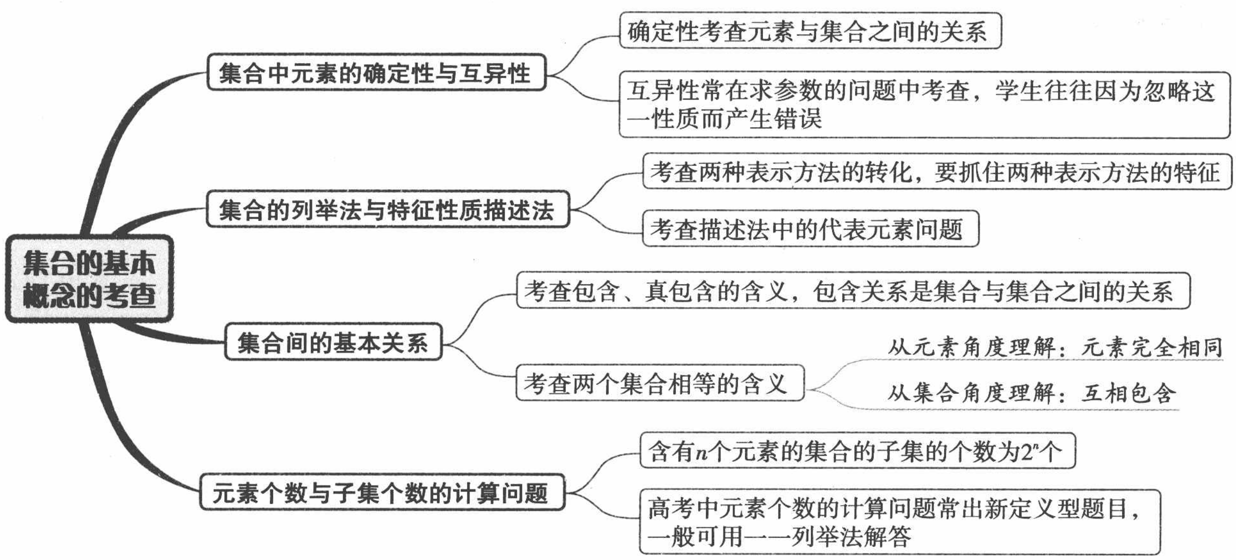
如：设$A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$，A的子集的个数为：$C_n^0+C_n^1+\cdots+C_n^n=2^n$．

（五）什么是德摩根律？

答：$\complement_U(A\cap B)=(\complement_U A)\cup(\complement_U B)$；$\complement_U(A\cup B)=(\complement_U A)\cap(\complement_U B)$．

考点思维导图

考点一　集合的基本概念



集合是研究现代数学的基础和工具．高考命题一般都是基本题目，综合性题目少，且综合性的深度较小，在历年高考中，集合的概念常以选择题或填空题的形式出现，集合几乎是每年必考内容之一．

●思维导图例解

(一)集合中元素的确定性与互异性

例1 设集合$A=\{x|x\leqslant\sqrt{13}\}$,$a=2\sqrt{3}$,那么下列关系正确的是 ( )

A. $a\subset A$

B. $a\in A$

C. $a\notin A$

D. $\{a\}\in A$

解答:$a=2\sqrt{3}=\sqrt{12}\leqslant\sqrt{13}$,故选B.

解题提示:元素与集合之间是从属关系,一个元素要么属于某个集合,要么不属于,二者只能有一个成立,也就是说一个元素与一个集合之间的关系是确定的.

例2 非零实数a、b、c构成一个数$X=\frac{|a|}{a}+\frac{|b|}{b}+\frac{|c|}{c}+\frac{|abc|}{abc}$,则这样的数的集合是________.

解答:(1)当a、b、c全是正数时,$X=4$;

(2)当a、b、c两正一负时,$X=0$;

(3)当a、b、c一正两负时,$X=0$;

(4)当a、b、c全是负数时,$X=-4$.

由集合中元素的互异性知,所求集合为$\{4,0,-4\}$.

解题提示:本题通过分类讨论得到X的值有四个,其中有两个为0,由集合中元素的互异性知,集合中共有3个元素.

(二)集合的表示方法

例3 用列举法可将集合$\{x\in\mathbf{Z}|x^2-5x-6<0\}$表示为________________________.

解答:不等式$x^2-5x-6<0$的解集为$\{x|-1<x<6\}$,因为$x\in\mathbf{Z}$,所以x的取值为0,1,2,3,4,5,答案为:$\{0,1,2,3,4,5\}$.

解题提示:本题考查描述法与列举法的相互转化,理解定义是解答本题的关键.

例4 集合$A=\{y|y=x+1\}$,$B=\{(x,y)|y=x^2+1\}$,则$A\cap B=$________.

解答:A与B两集合的代表元素不同,一个是数,一个是数对(点),故交集为空集,答案为$\varnothing$.

解题提示:一个集合应先看代表元素.

(三)集合间的基本关系

例5 (2008湖北)若非空集合A,B,C满足$A\cup B=C$,且B不是A的子集,则 ( )

A. "$x\in C$"是"$x\in A$"的充分条件但不是必要条件

B. "$x\in C$"是"$x\in A$"的必要条件但不是充分条件

C. "$x\in C$"是"$x\in A$"的充要条件

D. "$x\in C$"既不是"$x\in A$"的充分条件也不是"$x\in A$"的必要条件

解答:若$x\in A$,则$x\in A\cup B=C$,但举例:$A=\{1,2,3\}$,$B=\{3,4\}$,$A\cup B=C=\{1,2,3,4\}$,$4\in C$,但$4\notin A$,所以"$x\in C$"是"$x\in A$"的必要条件但不是充分条件,故选B.

例6 (2007全国Ⅰ)设$a,b\in\mathbf{R}$,集合$\{1,a+b,a\}=\left\{0,\frac{b}{a},b\right\}$,则$b-a=$ ( )

A. 1

B. -1

C. 2

D. -2

解答:因为$a\neq0$,所以$a+b=0$,所以$\frac{b}{a}=-1$,则$a=-1$,$b=1$,$b-a=2$,故选C.

解题提示:两个集合相等,则两个集合的元素完全相同.

(四)元素个数与子集个数的计算

例7 (2008江西)定义集合运算:$A*B=\{z|z=xy,x\in A,y\in B\}$.设$A=\{1,2\}$,$B=\{0,2\}$,则集合$A*B$的所有元素之和为 ( )

A. 0

B. 2

C. 3

D. 6

解答:$y=0$,$z=0$;$y=2$,$x=1$,$z=2$;$y=2$,$x=2$,$z=4$.所有元素之和为$0+2+4=6$,故选D.

解题提示:本题用的是一一列举法,求元素个数的问题多采用此法.

例8 满足$M\subseteq\{a_1,a_2,a_3,a_4\}$,且$M\cap\{a_1,a_2,a_3\}=\{a_1,a_2\}$的集合$M$的个数是 ( )

A. 1

B. 2

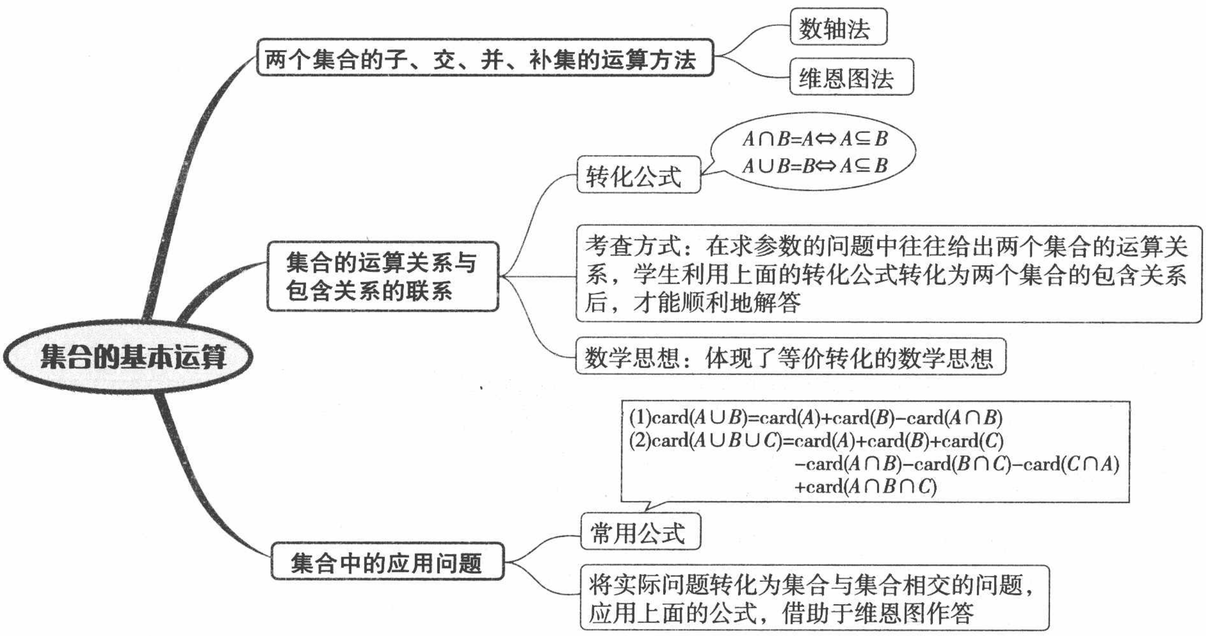
C. 3

D. 4

解答:因为$M\cap\{a_1,a_2,a_3\}=\{a_1,a_2\}$,所以$M$中一定有$a_1,a_2$,一定没有$a_3$,可以含有$a_4$,也可以不含有$a_4$,故$M=\{a_1,a_2\}$或$\{a_1,a_2,a_4\}$,故选B.

解题提示:理解式子$M\cap\{a_1,a_2,a_3\}=\{a_1,a_2\}$的含义为"$M$中一定有$a_1,a_2$,一定没有$a_3$"是解答本题的关键.

考点二　集合间的基本运算



集合间的运算是集合这一部分的重点，是高考常考的内容之一.

●思维导图例解

（一）集合间的基本运算

例1　(2008 北京 1)已知全集 $U=\mathbf{R}$，集合 $A=\{x|-2\leqslant x\leqslant 3\}$，$B=\{x|x<-1$ 或 $x>4\}$，那么集合 $A\cap(\complement_U B)$ 等于　(　　)

A. $\{x|-2\leqslant x<4\}$　　B. $\{x|x\leqslant 3$ 或 $x\geqslant 4\}$

C. $\{x|-2\leqslant x<-1\}$　　D. $\{x|-1\leqslant x\leqslant 3\}$

解答：因为 $B=\{x|x<-1$ 或 $x>4\}$，所以 $\complement_U B=\{x|-1\leqslant x\leqslant 4\}$，$A\cap(\complement_U B)=\{x|-1\leqslant x\leqslant 3\}$，故选 D.

解题提示：求解集合间的基本运算可借助于数轴.

例2　(2009 湖南)某班共 30 人，其中 15 人喜爱篮球运动，10 人喜爱乒乓球运动，8 人对这两项运动都不喜爱，则喜爱篮球运动但不喜爱乒乓球运动的人数为________.

解答：如图 1−1.1−1，设喜爱篮球的为集合 A，喜爱乒乓球的为集合 B，设所求人数为 x，则只喜爱乒乓球运动的人数为 $10-(15-x)=x-5$，

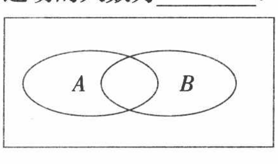


图 1−1.1−1

故 $15+x-5=30-8\Rightarrow x=12$.

解题提示：在解决涉及集合与集合交集的问题时，借助维恩图进行分析，可帮助我们理解和转化.

（二）已知集合间的关系求参数

例3　(2009 山东)集合 $A=\{0,2,a\}$，$B=\{1,a^2\}$，若 $A\cup B=\{0,1,2,4,16\}$，则 a 的值为　(　　)

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 4

解答：$\because A\cup B=\{0,1,2,4,16\}$，$\therefore a=4$，$a^2=16$，故选 D.

解题提示：并集是由所有属于 A 和属于 B 的元素组成的，相同的元素只写一次.

例4　(2009 上海)已知集合 $A=\{x|x\leqslant 1\}$，$B=\{x|x\geqslant a\}$，且 $A\cup B=\mathbf{R}$，则实数 a 的取值范围是________.

解答：因为 $A\cup B=\mathbf{R}$，画数轴可知，实数 a 必须在点 1 上或在 1 的左边，所以，有 $a\leqslant 1$.

解题提示：已知两个集合的关系求参数，一般借助于数轴来解答.

（三）集合间的运算关系与包含关系的转化

例5　设 $A=\{x|x^2+4x=0\}$，$B=\{x|x^2+2(a+1)\cdot x+a^2-1=0\}$，其中 $x\in\mathbf{R}$，如果 $A\cap B=B$，求实数 a 的取值范围.

解：由 $A\cap B=B$，得 $B\subseteq A$，而 $A=\{-4,0\}$，$\Delta=4(a+1)^2-4(a^2-1)=8a+8$，

当 $\Delta=8a+8<0$，即 $a<-1$ 时，$B=\varnothing$，符合 $B\subseteq A$；

当 $\Delta=8a+8=0$，即 $a=-1$ 时，$B=\{0\}$，符合 $B\subseteq A$；

当 $\Delta=8a+8>0$，即 $a>-1$ 时，B 中有两个元素，而 $B\subseteq A=\{-4,0\}$，

$\therefore B=\{-4,0\}$，得 $a=1$.

$\therefore a=1$ 或 $a\leqslant -1$.

解题提示：解答本题的关键是把 $A\cap B=B$ 转化为 $B\subseteq A$.

（四）集合中的应用问题

例6　某地对农户作抽样调查，结果如下：电冰箱

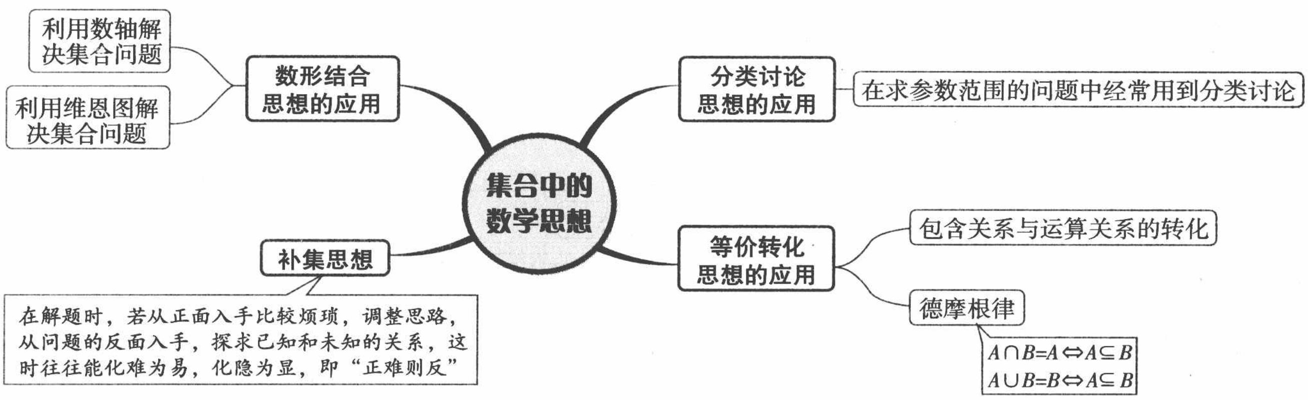
拥有率为 49%，电视机拥有率为 85%，洗衣机拥有率为 44%，至少拥有上述三种电器中两种以上的为 63%，三种电器齐全的为 25%，那么一种电器也没有的相对贫困户所占比例为 （ ）

A. 10% B. 12% C. 15% D. 27%

解答：不妨设调查了 100 户农户，$U=\{$被调查的 100 户农户$\}$，$A=\{$100 户中拥有电冰箱的农户$\}$，$B=\{$100 户中拥有电视机的农户$\}$，$C=\{$100 户中拥有洗衣机的农户$\}$，$\mathrm{card}(A\cup B\cup C)=\mathrm{card}(A)+\mathrm{card}(B)+\mathrm{card}(C)-\mathrm{card}(A\cap B)-\mathrm{card}(A\cap C)-\mathrm{card}(B\cap C)+\mathrm{card}(A\cap B\cap C)$，所以 $\mathrm{card}(A\cup B\cup C)=49+85+44-63-25=90$，则一种电器也没有的为 $100-90=10$ 户，故选 A.

解题提示：这是一个小型应用题．把各种人群看做集合，本题就是已知全集元素的个数，求其子集元素的个数，可借助维恩图．

考点三 集合中的数学思想



抓住了思想，就抓住了解决问题的关键．深刻领会集合中的数学思想有利于学生对这部分内容的掌握．

思维导图例解

（一）利用数形结合解集合问题

例 1 设集合 $A=\{x\in\mathbf{R}\,|\,|x-2|\leqslant 2\}$，$B=\{y\,|\,y=-x^2,-1\leqslant x\leqslant 2\}$，则 $\complement_{\mathbf{R}}(A\cap B)$ 等于 （ ）

A. $\mathbf{R}$ B. $\{x\,|\,x\in\mathbf{R},x\neq 0\}$

C. $\{0\}$ D. $\varnothing$

解答：$A=\{x\in\mathbf{R}\,|\,|x-2|\leqslant 2\}=[0,4]$，$B=\{y\,|\,y=-x^2,-1\leqslant x\leqslant 2\}=[-4,0]$，如图 1－1.1－2.

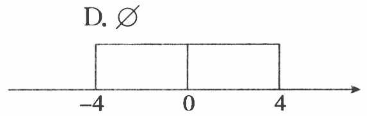


图 1－1.1－2

可得 $A\cap B=\{0\}$，$\complement_{\mathbf{R}}(A\cap B)=\{x\,|\,x\in\mathbf{R},x\neq 0\}$，故选 B.

解题提示：本题是不等式和函数值域相结合的问题，凡是不等式解集中的交集、并集、补集问题，都可以借助数轴解决．

例 2 已知全集 $U=\{$不大于 20 的质数$\}$，M,N 是 U 的两个子集，且 $M\cap(\complement_U N)=\{3,5\}$，$(\complement_U M)\cap N=\{7,19\}$，$(\complement_U M)\cap(\complement_U N)=\{2,17\}$，求 M,N.

解：如图 1－1.1－3 所示：

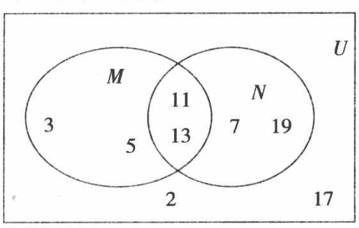


图 1－1.1－3

解题提示：由于维恩图形象直观，因此在交集、并集、补集的有关题目中，经常考查我们识图和用图的能力．

（二）利用分类讨论解题

例 3 设 $U=\mathbf{R}$，集合 $A=\{x\,|\,x^2+3x+2=0\}$，$B=\{x\,|\,x^2+(m+1)x+m=0\}$．若 $(\complement_U A)\cap B=\varnothing$，求 m 的值．

解：$A=\{-2,-1\}$，由 $(\complement_U A)\cap B=\varnothing$，得 $B\subseteq A$，

当 $m=1$ 时，$B=\{-1\}$，符合 $B\subseteq A$；

当 $m\neq 1$ 时，$B=\{-1,-m\}$，而 $B\subseteq A$，$\therefore -m=-2$，即 $m=2$.

$\therefore m=1$ 或 2.

解题提示：分类讨论必须要做到不重复、不遗漏．

（三）利用等价转化思想解题

例 4 已知 p：$\left|1-\dfrac{x-1}{3}\right|\leqslant 2$；$q$：$x^2-2x+1-m^2\leqslant 0(m>0)$．若 $\neg p$ 是 $\neg q$ 的充分而不必要条件，求实数 m 的取值范围．

解：由 p：$\left|1-\dfrac{x-1}{3}\right|\leqslant 2$，得 $-2\leqslant x\leqslant 10$；由 $x^2-2x+1-m^2\leqslant 0(m>0)$，得 $1-m\leqslant x\leqslant 1+m$，$\because \neg p$ 是 $\neg q$ 的充分而不必要条件，$\therefore q$ 是 p 的充分而不必要条件，$\therefore$ 集合 $\{x\,|\,1-m\leqslant x\leqslant 1+m\}$ 是集合 $\{x\,|\,-2\leqslant x\leqslant 10\}$ 的真子集，$\therefore 1-m\geqslant -2$，$1+m\leqslant 10$ 且等号不同时成立，$\therefore m\leqslant 3$．又 $m>0$，$\therefore 0<m\leqslant 3$.

解题提示：

本题中的两个转化

利用等价命题对条件转化：$\neg p$是$\neg q$的充分而不必要条件$\Leftrightarrow q$是p的充分而不必要条件

A表示满足条件p的集合，B表示满足条件q的集合

充要条件与集合关系的转化：p是q的充分条件$\Leftrightarrow A\subseteq B$；$p$是$q$的必要条件$\Leftrightarrow A\supseteq B$；$p$是$q$的充要条件$\Leftrightarrow A=B$

（四）利用补集思想解题

例5　（2009郑州模拟）已知集合$A=\{x|x^2-4mx+2m+6=0\}$，$B=\{x|x<0\}$，若$A\cap B\neq\varnothing$，求实数m的取值范围.

解：设全集$U=\{m|\Delta=(-4m)^2-4(2m+6)\geqslant0\}$
$=\left\{m\,\middle|\,m\leqslant-1，或\ m\geqslant\frac{3}{2}\right\}$.

若方程$x^2-4mx+2m+6=0$的两根x_1,x_2均为非负根，则

$\begin{cases}m\in U,\\ x_1+x_2=4m\geqslant0,\\ x_1x_2=2m+6\geqslant0,\end{cases}$得$m\geqslant\frac{3}{2}$，$\because\left\{m\,\middle|\,m\geqslant\frac{3}{2}\right\}$关于$U$的补集为$\{m|m\leqslant-1\}$，$\therefore$实数$m$的取值范围为$\{m|m\leqslant-1\}$.

解题提示：本题运用的是"正难则反"的解题策略，正是运用了"补集思想".

同步检测

（时间45分钟，分值100分）

一、选择题（共有8个小题，每小题6分，共48分）

1. 已知集合$A=\{x|x^2+2ax+1=0\}$的真子集只有一个，则a值的集合是（　　）

A. $(-1,1)$

B. $(-\infty,-1)\cup[1,+\infty)$

C. $\{-1,1\}$

D. $\{0\}$

2. 设集合$M=\left\{x\,|\,x=\frac{k}{2}+\frac{1}{4},k\in\mathbf{Z}\right\}$，$N=\left\{x\,|\,x=\frac{k}{4}+\frac{1}{2},k\in\mathbf{Z}\right\}$，则（　　）

A. $M=N$　　B. $M\subseteq N$

C. $M\supseteq N$　　D. $M\cap N=\varnothing$

3. 满足关系$\{1,2\}\subseteq A\subseteq\{1,2,3,4,5\}$的集合$A$的个数为（　　）

A. 4　　B. 6

C. 8　　D. 10

4. 已知集合M具有性质：若$a\in M$，则$2a\in M$. 现已知$-1\in M$，则下列元素一定是M中的元素的是（　　）

A. $-\frac{1}{2}$　　B. 0

C. -2　　D. 2

5. 集合$M=\{(x,y)|x^2+y^2=1,x\in\mathbf{R},y\in\mathbf{R}\}$，$N=\{(x,y)|x^2-y=0,x\in\mathbf{R},y\in\mathbf{R}\}$，则集合$M\cap N$中元素的个数为（　　）

A. 1　　B. 2

C. 3　　D. 4

6. （2008辽宁1）已知集合$M=\left\{x\,\middle|\,\frac{x+3}{x-1}<0\right\}$，$N=\{x|x\leqslant-3\}$，则集合$\{x|x\geqslant1\}=$（　　）

A. $M\cap N$　　B. $M\cup N$

C. $\complement_U(M\cap N)$　　D. $\complement_U(M\cup N)$

7. （2009安徽）若集合$A=\{x\,|\,|2x-1|<3\}$，$B=\left\{x\,\middle|\,\frac{2x+1}{3-x}<0\right\}$，则$A\cap B$是（　　）

A. $\left\{x\,\middle|\,-1<x<-\frac{1}{2}或\ 2<x<3\right\}$

B. $\{x|2<x<3\}$

C. $\left\{x\,|\,-\frac{1}{2}<x<2\right\}$

D. $\left\{x\,|\,-1<x<-\frac{1}{2}\right\}$

8. 如图1－1.1－4，I是全集，M、P、S是I的3个子集，则阴影部分所表示的集合是（　　）

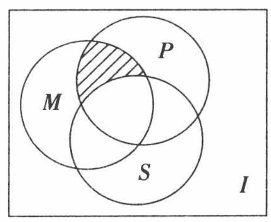


图1－1.1－4

A. $(M\cap P)\cap S$

B. $(M\cap P)\cup S$

C. $(M\cap P)\cap(\complement_I S)$

D. $(M\cap P)\cup(\complement_I S)$

二、填空题（共有5个小题，每小题6分，共30分）

9. 设全集$I=\{2,3,a^2+2a-3\}$，$A=\{|2a-1|,2\}$，如果$\complement_I A=\{5\}$，实数$a=$________.

10. 设集合$A=\{5,\log_2(a+3)\}$，集合$B=\{a,b\}$. 若$A\cap B=\{2\}$，则$A\cup B=$________.

11. 已知集合$A=\{x\,|\,|x|\leqslant2,x\in\mathbf{R}\}$，$B=\{x|x\geqslant a\}$，且$A\subseteq B$，则实数$a$的取值范围是________.

12. 已知$A=\{x|x>3或\ x<-1\}$，$B=\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$. 若$A\cup B=\mathbf{R}$，$A\cap B=\{x|3<x\leqslant4\}$，则$a,b$的值分别为________.

13. 已知$M=\{x|2x^2-5x-3=0\}$，$N=\{x|mx=1\}$，若$N\subseteq M$，则适合条件的实数m的集合P为________.

三、解答题（共有2个小题，每小题11分，共22分）

14. 记函数$f(x)=\sqrt{2-\frac{x+3}{x+1}}$的定义域为$A$，

$g(x)=\lg[(x-a-1)(2a-x)](a<1)$ 的定义域为 B.

(1)求 A;

(2)若 $B\subseteq A$,求实数 a 的取值范围.

15.已知集合 $A=\{(x,y)|x^2+mx-y+2=0\}$,$B=\{(x,y)|x-y+1=0,0\leqslant x\leqslant 2\}$,如果 $A\cap B\neq\varnothing$,求实数 m 的取值范围.

参考答案

1.C 【解析】集合 A 是含有一个元素的集合,因此 $\Delta=(2a)^2-4=0$,$a=\pm1$,故选 C.

2.B 【解析】通分:M 中 $x=\dfrac{2k+1}{4}$,$k\in\mathbf{Z}$,分子表示奇数;N 中 $x=\dfrac{k+2}{4}$,$k\in\mathbf{Z}$,分子表示整数,故选 B.

3.C 【解析】集合 A 中一定含有 1、2,集合 $\{3,4,5\}$ 的子集一共有 8 个,再加入 1、2 即是满足条件的 A,故选 C.

4.C 【解析】因为若 $a\in M$,则 $2a\in M$,所以现已知 $-1\in M$,则 $-2\in M$,故选 C.

5.B 【解析】$x^2+y^2=1$ 表示圆心在坐标原点的单位圆,$x^2-y=0$ 表示顶点在原点、开口向上的抛物线,由数形结合知有两个交点,故选 B.

6.D 【解析】$M=\left\{x\left|\dfrac{x+3}{x-1}<0\right.\right\}=\{x|-3<x<1\}$,$M\cup N=\{x|x<1\}$,$\complement_U(M\cup N)=\{x|x\geqslant1\}$,故选 D.

7.D 【解析】$A=\{x||2x-1|<3\}=\{x|-1<x<2\}$,$B=\left\{x\left|\dfrac{2x+1}{3-x}<0\right.\right\}=\{x|(2x+1)(x-3)>0\}=\left\{x\left|x<-\dfrac{1}{2}\text{或}x>3\right.\right\}$,$A\cap B=\left\{x\left|-1<x<-\dfrac{1}{2}\right.\right\}$,故选 D.

8.C 【解析】由题图知选 C.

9.2 【解析】因为 $A\cup(\complement_I A)=I$,所以 $\begin{cases}a^2+2a-3=5,\\|2a-1|=3,\end{cases}$ 解得 $a=2$.

10.$\{1,2,5\}$ 【解析】因为 $A\cap B=\{2\}$,所以 $\log_2(a+3)=2$,$a=1$,$b=2$,$A\cup B=\{1,2,5\}$.

11.$a\leqslant-2$ 【解析】$A=\{x|-2\leqslant x\leqslant 2\}$,因为 $A\subseteq B$,所以 $a\leqslant-2$.

12.-1,4 【解析】画出数轴可知 $a=-1$,$b=4$.

13.$\left\{-2,0,\dfrac{1}{3}\right\}$ 【解析】$M=\left\{-\dfrac{1}{2},3\right\}$,若 $m=0$,$N=\varnothing\subseteq M$;若 $m\neq0$,$N=\left\{\dfrac{1}{m}\right\}$.若 $\dfrac{1}{m}=-\dfrac{1}{2}$,则 $m=-2$,若 $\dfrac{1}{m}=3$,则 $m=\dfrac{1}{3}$,所以 m 的值为 -2,0 或 $\dfrac{1}{3}$.

14.(1)$2-\dfrac{x+3}{x+1}\geqslant0$,且 $x+1\neq0$,得 $x<-1$ 或 $x\geqslant1$,即 $A=\{x|x<-1\text{或}x\geqslant1\}$.

(2)由 $(x-a-1)(2a-x)>0$,得 $(x-a-1)(x-2a)<0$.

又 $a<1$,所以 $a+1>2a$,$B=(2a,a+1)$.

又 $B\subseteq A$,所以 $2a\geqslant1$ 或 $a+1\leqslant-1$,

即 $a\geqslant\dfrac{1}{2}$ 或 $a\leqslant-2$.

而 $a<1$,所以 $\dfrac{1}{2}\leqslant a<1$ 或 $a\leqslant-2$.

即 a 的取值范围是 $(-\infty,-2]\cup\left[\dfrac{1}{2},1\right)$.

15.由 $\begin{cases}x^2+mx-y+2=0,\\x-y+1=0,\end{cases}$ 得 $x^2+(m-1)x+1=0$, ①

$\because A\cap B\neq\varnothing$,$\therefore$ 方程①在区间 $[0,2]$ 上至少有一个实数解.

首先,由 $\Delta=(m-1)^2-4\geqslant0$,得 $m\geqslant3$ 或 $m\leqslant-1$.

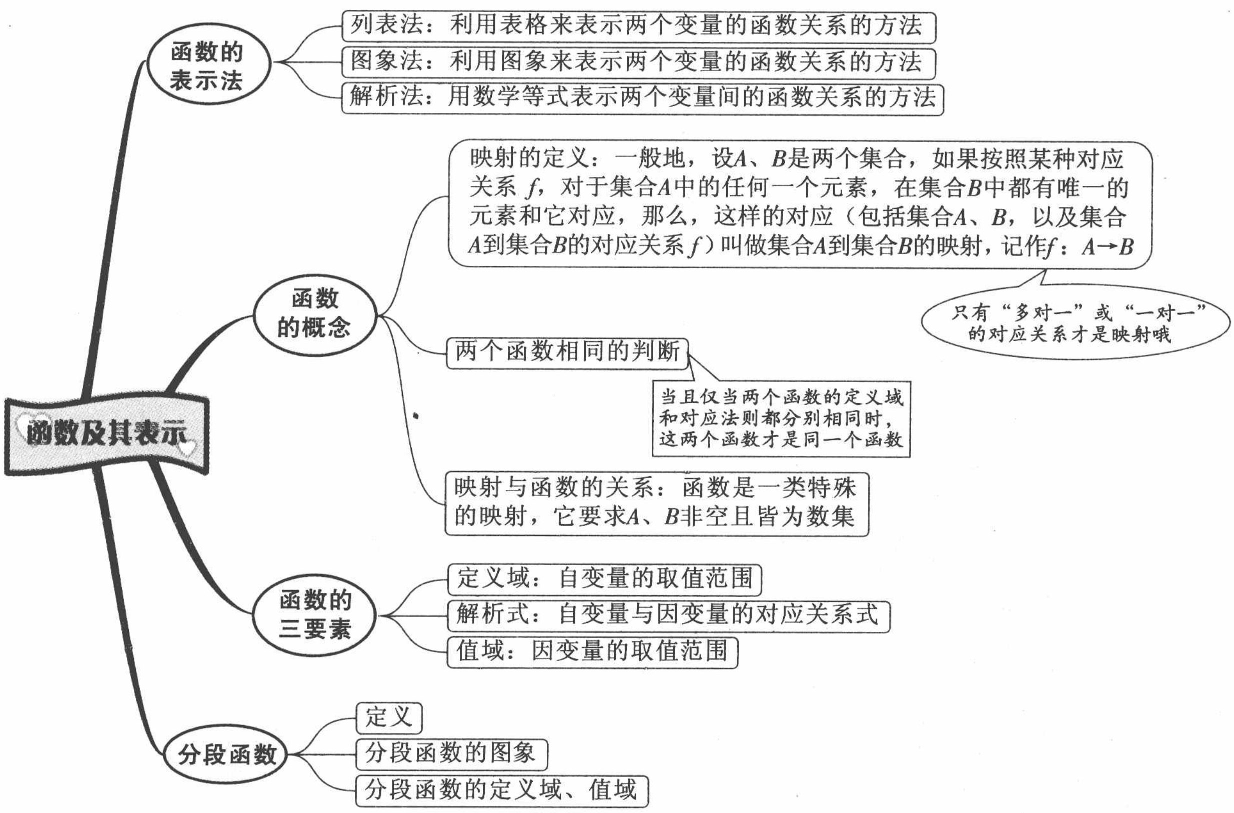
当 $m\geqslant3$ 时,由 $x_1+x_2=-(m-1)<0$ 及 $x_1x_2=1$ 知,方程①只有负根,不符合要求;

当 $m\leqslant-1$ 时,由 $x_1+x_2=-(m-1)>0$ 及 $x_1x_2=1>0$ 知,方程①有两个互为倒数的正根,故必有一根在区间 $(0,1)$ 内,从而方程①至少有一个根在区间 $[0,2]$ 内.

综上所述,所求 m 的取值范围是 $(-\infty,-1]$.

第二节　函数及其表示

基础知识思维导图



函数是整个高中数学的重点，其中函数思想是最重要的数学思想方法，函数问题在历年的高考中都占据相当大的比例.

从近几年来看，对本部分内容的考查形势稳中求变，向着更灵活的方向发展，对于函数的概念及表示多以下面的形式出现：通过具体问题（几何问题、实际应用题）找出变量间的函数关系，再求出函数的定义域、值域，进而研究函数性质，寻求问题的结果.

高考对函数概念与表示的考查以选择和填空为主，以解答题形式出现的可能性相对较小，本节知识作为工具和其他知识结合起来命题的可能性依然很大.

重点难点突破

（一）函数是如何定义的？

答：设 A、B 是非空的数集，如果按某个确定的对应关系 f，对于集合 A 中的任意一个数 x，在集合 B 中都有唯一确定的数 $f(x)$ 和它对应，那么就称 $f:A\to B$ 为从集合 A 到集合 B 的一个函数，记作 $y=f(x)$，$x\in A$，其中 x 叫做自变量. x 的取值范围 A 叫做函数的定义域；与 x 的值相对应的 y 的值叫做函数值，函数值的集合 $\{f(x)\mid x\in A\}$ 叫做函数的值域.

（二）函数与映射的异同点是什么？

答：映射 $f:A\to B$，其中 A，B 是两个“非空集合”；而函数 $y=f(x)$，其定义域 A 为“非空的实数集”，其值域也是实数集，所以，函数是数集到数集的映射. 由此可见，映射是函数的推广，函数是一种特殊的映射.

（三）区间与不等式的关系怎样？如何用数轴表示？

答：设 $a,b\in\mathbf{R}$ 且 $a<b$，规定：

定义	名称	符号	数轴表示
$\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$	闭区间	$[a,b]$	a b
$\{x\mid a<x<b\}$	开区间	(a,b)	a b
$\{x\mid a\leqslant x<b\}$	半开半闭区间	$[a,b)$	a b
$\{x\mid a<x\leqslant b\}$	半开半闭区间	$(a,b]$	a b
$\{x\mid x\geqslant a\}$	开区间	$[a,+\infty)$	a
$\{x\mid x>a\}$	开区间	$(a,+\infty)$	a
$\{x\mid x\leqslant b\}$	开区间	$(-\infty,b]$	b
$\{x\mid x<b\}$	开区间	$(-\infty,b)$	b
$\mathbf{R}$	开区间	$(-\infty,+\infty)$	取遍数轴上所有值

考点思维导图

考点一　函数的定义域问题

函数的定义域问题

- **抽象函数的定义域**（利用整体思想理解）
  - 已知函数的定义域，求复合函数的定义域
    - 举例：已知$f(x)$的定义域为$[a,b]$，求$f(g(x))$的定义域.
      方法：令$a\leqslant g(x)\leqslant b$，解得$x$的范围即为所求
    - 思想：整体思想
  - 已知复合函数的定义域，求函数的定义域
    - 举例：已知$f(g(x))$的定义域为$[a,b]$，求$f(x)$的定义域.
      方法：由$f(g(x))$中$a\leqslant x\leqslant b$，求得$g(x)$的范围即$f(x)$中x的范围
    - 理解方法：可以通过换元思想来理解，设$g(x)=t$，t相当于$f(x)$中的x
  - 与定义域有关的参数范围问题
    - 考查类型：定义域为$\mathbf{R}$，求参数范围
    - 思想：分类讨论，特别是二次项系数为零的讨论，学生容易忽略
- **具体函数的定义域**（就是使解析式有意义的自变量的取值范围）
  - 如果解析式是整式或奇次根式，则定义域为$\mathbf{R}$
  - 如果解析式是分式，则定义域是使分母不为零的实数的集合
  - 如果解析式是偶次根式，则定义域是使根号内的式子大于等于零的实数的集合
  - 对数函数的真数必须大于零；对数函数和指数函数的底数必须大于零且不等于1
  - 正切函数$y=\tan x$的定义域是$\left\{x\mid x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbf{Z}\right\}$
  - 如果解析式是由几个部分的数学式子构成的，则定义域是使各部分式子都有意义的实数集合（即求各部分集合的交集）
  - 实际问题中函数的定义域是使变量都有意义且符合实际的实数集合

函数的定义域是函数的灵魂，所以高考对定义域的考查不仅以选择、填空的形式出现，有时也以解答题的形式出现.