

THEORY  
OF  
INTEREST

新编

主 编 刘波 副主编 董普

*Xin Bian Li Xi Li Lun*

利息理论



对外经济贸易大学出版社

University of International Business and Economics Press

# 新编利息理论

主 编 刘 波

副主编 董 普

对外经济贸易大学出版社

中国·北京

## 图书在版编目 (CIP) 数据

新编利息理论/刘波主编. —北京: 对外经济贸易  
大学出版社, 2010

ISBN 978-7-81134-638-1

I. ①新… II. ①刘… III. ①利息 - 经济理论 - 高等  
学校 - 教材 IV. ①F032.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2010) 第 032919 号

© 2010 年 对外经济贸易大学出版社出版发行

版权所有 翻印必究

## 新编利息理论

---

对外经济贸易大学出版社

北京市朝阳区惠新东街 10 号 邮政编码: 100029

邮购电话: 010-64492338 发行部电话: 010-64492342

网址: <http://www.uibep.com> E-mail: [uibep@126.com](mailto:uibep@126.com)

---

山东省沂南县汇丰印刷有限公司印装 新华书店北京发行所发行

成品尺寸: 185mm × 230mm 14.25 印张 286 千字

2010 年 4 月北京第 1 版 2010 年 4 月第 1 次印刷

---

ISBN 978-7-81134-638-1

印数: 0 001 - 5 000 册 定价: 22.00 元

# 序

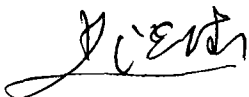
利息理论是以数学、经济学、金融学、投资学等为背景的一门科学，研究金融领域内诸多环节的问题，并为金融企业的良好运作、制定决策提供科学依据和工具。20世纪以来，由于金融实践的迅猛发展和不断创新，金融学逐渐成为一门颇具生命力的学科，与数学的交融越来越紧密。利息理论属于金融学的范畴，而金融学所阐述的货币融通和信用活动以及与之相关的经济活动总是以利息理论作为工具。利息理论的鲜明特征是以金融为对象、以数学为工具进行关于利息的定量研究与应用，它以货币的时间价值和现金流分析贯穿全部内容。

利息理论作为高校金融学科的一门基础课程，已经成为学习和掌握金融学、金融工程学、投资学和精算学的必备入门知识。在我国，越来越多的人参加金融分析师和精算师的资格考试，他们不可避免地涉及利息理论知识的学习。我国高校所培养的金融学、金融工程学和保险学的毕业生，越来越多地借助所学的利息理论与工具在工作岗位发挥作用。

本书的写作体系尽管脱胎于精算学，但并非仅仅针对精算学，而是对整个金融领域的定量分析理论与方法有广泛涉猎，因而适用范围非常广泛。

本书的作者是东北财经大学培养的教学骨干和学生，长期从事金融、金融工程、保险与精算教学工作，积累了丰富的教学经验。本书就是他们在充分借鉴国内外经典教材的基础上，结合多年的教学经验编写而成的。本书博采众长，深入浅出，强调知识点的系统性、相关性和应用性。本书的出版，对于有志从事金融领域的工作，特别是有志从事金融分析师与精算师工作的人士，必定具有很大的裨益。

东北财经大学校长 教授 博士生导师



2010年1月

# 前 言

本书是全面讲授利息理论的专业教材，包括以下几个部分的内容：（1）利息的度量方法；（2）年金价值的基本理论与计算方法；（3）收益率的度量方法；（4）涉及债务偿还的基本理论与计算方法；（5）涉及有价证券的计算方法；（6）利息理论的基本应用；（7）金融分析的基本方法。

本书的写作主要参考了北美精算师协会经典教材，结构保持不变，但在内容上力求完整、详细、深入浅出。

本书的编写与出版得到了对外经贸大学出版社编辑乔亚女士的大力支持与帮助，在此表示衷心感谢。

本书由东北财经大学教师刘波编写第四章至第七章，东北财经大学教师董普编写第二章和第三章，大连理工大学教师（东北财经大学博士生）曹云波编写第一章并参与全书校对。东北财经大学金融学院研究生朱健宁、张云霞、任旭、王靓、冯玉娇、石恒参与了部分章节校对和部分习题整理。

由于作者的专业水平和编写能力有限，本书难免会存在错误和疏漏之处，恳请广大读者和专家不吝指正。

编 者

2009年10月

于东北财经大学师道斋

# 目 录

<b>第一章 利息的度量</b> .....	1
第一节 利息的基本概念.....	1
第二节 利息问题的求解.....	21
习题.....	26
<b>第二章 年金</b> .....	29
第一节 标准型年金.....	30
第二节 一般型年金.....	35
第三节 年金的未知时间与未知利率问题.....	52
习题.....	55
<b>第三章 收益分析</b> .....	61
第一节 收益率.....	61
第二节 基金的利息度量.....	67
第三节 收益分配.....	72
第四节 资本预算.....	76
习题.....	79
<b>第四章 债务偿还</b> .....	83
第一节 分期偿还法.....	83
第二节 偿债基金法.....	99
习题.....	108
<b>第五章 债券与其他证券</b> .....	113
第一节 债券.....	114
第二节 其他证券.....	130
习题.....	131

## 2 新编利息理论

<b>第六章 利息理论的应用</b> .....	134
第一节 消费信贷.....	134
第二节 不动产抵押贷款.....	135
第三节 <i>APR</i> 的近似计算.....	137
第四节 固定资产折旧.....	143
第五节 投资成本.....	150
习题.....	151
<b>第七章 金融分析</b> .....	155
第一节 利率水平.....	155
第二节 通货膨胀.....	156
第三节 风险.....	158
第四节 利率期限结构.....	160
第五节 利率风险的度量.....	163
第六节 资产与负债匹配.....	165
习题.....	171
<b>附录 1 常用年金公式</b> .....	174
<b>附录 2 利息函数表</b> .....	179
<b>习题答案</b> .....	209
<b>参考文献</b> .....	220

# 第一章 利息的度量

## ☑ 本章摘要

本章介绍利息理论的基础知识。第一节介绍利息度量的基本概念，包括单利、复利、单贴现率、复贴现率、名义利率、名义贴现率和利息强度等。第二节介绍利息问题的求解方法，包括投资期的确定方法、未知时间和未知利率问题的求解。

## ☑ 本章关键词

积累函数 金额函数 积累值 现值 折现因子 当前值 实际利率 实际贴现率 复利 单利 名义利率 名义贴现率 利息强度 价值等式

利息（Interest）是指在一定时期内，资金拥有人将使用资金的自由权转让给借款人后所得到的报酬。利息是债务人（Borrower）对债权人（Lender）因为资金被借用而牺牲了当前消费以及其面对的机会成本的一种补偿。经济学和货币银行学等课程讨论利息是如何形成的以及分析决定利息大小的具体因素。与此不同，本书假定存在于债权人和债务人之间的利息是一种既定的事实，并在此基础上分析债权人和债务人之间的权利与义务的关系。

利率是度量利息的尺度，利率的高低反映了债务人借用债权人资金的成本。

## 第一节 利息的基本概念

### 一、积累函数与金额函数

通常一笔资金经过一段时间的投资之后会产生利息。我们将初始投资的金额称为本金（Principal），将该投资所经历的时间段称为投资期，而将经过一段时间后回收的总金额称为积累值或终值（Accumulated Value）。显然，积累值与本金的差额就是这段时间投资所产生的利息。例如，某人将 10 000 元存入为期 5 年的储蓄账户，5 年后该账户内有金额 10 500 元。这笔 10 000 元的初始投资金额称为本金，5 年后账户内的总金额 10 500 元称为积累值，而积累值与初始投资额的差额（10 500 元-10 000 元=500 元）就是利息。



如果在一个投资期内,没有任何额外的本金追加,也没有任何本金抽走,那么决定积累值的因素是本金的金额、投资期长度和利率水平。投资期长度可以用多种不同单位来度量,例如日、周、月、季、半年或年。投资期长度的度量单位称为“度量期”,简称为“期”。为方便起见,本书中常常以年作为度量期。既然“度量期”的使用是为了度量利息,所以“度量期”又常常直接被称为“计息期”。

我们利用积累函数  $a(t)$  (Accumulate Function) 和金额函数  $A(t)$  (Amount Function) 来度量利息。

本书定义积累函数  $a(t)$  为在时刻 0 投资 1 单位本金、经过时间  $t$  后的积累值,显然积累函数满足  $a(0)=1$ 。定义金额函数  $A(t)$  为在时刻 0 投资若干单位的本金、经过时间  $t$  后的积累值,显然金额函数满足

$$A(t) = A(0) \cdot a(t)$$

即积累函数是金额函数本金  $A(0)$  取 1 时的特例。

为了使所研究的问题得到简化,通常我们假定  $a(t)$  是连续的、单调递增的函数。连续性意味着  $a(t)$  是不间断的,但事实上,  $a(t)$  是间断函数的情况经常在实务中发生,例如,银行只在付息日才支付利息。单调递增性意味着利息不会为负值,但事实上负利息是可能发生的,例如,当一笔生意亏本时就会产生负利息。

由于  $a(t)$  的定义域为  $t \geq 0$ , 所以在时刻  $u$  ( $u \geq t$ ) 投资的 1 单位本金,到时刻  $u+\Delta$  的积累值为

$$a(u+\Delta)/a(u) \quad (1.1)$$

而不是  $a(\Delta)$ 。

如果投资共有  $n$  期,将其中第  $k$  期 ( $k=1, 2, \dots, n$ ) 内产生的利息记为  $I_k$ , 则

$$I_k = A(k) - A(k-1)$$

显然,整个投资期间内所产生的利息为  $A(n) - A(0)$ , 它一定等于各度量期所产生的利息之和,即

$$A(n) - A(0) = \sum_{k=1}^n I_k$$

**例 1.1** 已知积累函数  $a(t) = kt^2 + m$ , 其中  $k$  和  $m$  为常数。如果在时刻 0 投资 100 元,到时刻 3 可以积累到 181 元。那么,如果在时刻 5 投资 325 元,到时刻 10 的积累值是多少?

**解:** 根据  $a(0)=1$  可知  $m=1$ , 于是  $a(t) = kt^2 + 1$ 。

再根据  $181 = 100(k \cdot 3^2 + 1)$ , 得到  $k=0.09$ , 于是  $a(t) = 0.09t^2 + 1$ 。

现在假设本金从时刻 0 的  $A(0)$  积累到时刻 5 的 325 元, 则  $325 = A(0)(0.09 \times 5^2 + 1)$ ,

得  $A(0) = 100$  元。于是在时刻 5 投资的 325 元到时刻 10 的积累值可以视为在时刻 0 投资 100 元到时刻 10 的积累值，即  $100 \times (0.09 \times 10^2 + 1) = 1\,000$  元。

或者利用式 (1.1) 计算，即

$$325a(10)/a(5) = 325 \times (0.09 \times 10^2 + 1) / (0.09 \times 5^2 + 1) = 1\,000 \text{ 元}$$

## 二、现值与当前值

现在我们介绍现值 (Present Value) 和当前值 (Current Value) 的概念。

前面已经介绍了积累值的概念。既然  $a(t)$  是 1 单位初始投资在时刻  $t$  的积累值，我们常将  $a(t)$  称为“ $t$  期积累因子”，因为它体现了单位本金在  $t$  期末的积累值。

实务中，我们常常需要计算现在应投资多少，才能在若干度量期后获得所期望的积累值。这时，我们需要将所期望的积累值换算到现在。换算的过程称为折现，换算的结果称为现值。

显然，现在投资  $a(t)$  的倒数，即  $a^{-1}(t)$ ，就会在  $t$  期末积累为 1，于是我们将  $a^{-1}(t)$  称为“ $t$  期折现因子”。当  $t$  期末的积累值为  $A(t)$  时， $a^{-1}(t)A(t) = A(0)$  就是  $A(t)$  的现值。从函数的意义上看，既然  $a(t)$  称为积累函数，那么  $a^{-1}(t)$  又可称为折现函数 (Discount Function)。

应该明确的是，积累与折现是恰好相反的过程。 $a(t)$  是 1 单位本金在  $t$  期末的积累值，而  $a^{-1}(t)$  是  $t$  期末 1 单位积累值的现值。换言之，现值  $a^{-1}(t)$  经历  $t$  期后积累值为 1，即  $a^{-1}(t)a(t) = 1$ 。

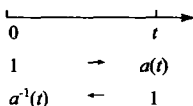


图 1.1 积累与折现

现值和折现的概念在金融领域有广泛的应用，掌握好这个概念有利于理解收支平衡的实现过程。

从严格的意义上讲，“积累值”只与过去的资金额有关，体现的是过去一笔资金的现在价值；“现值”则只与未来的资金额有关，体现的是未来一笔资金的现在价值。“积累值”与“现值”的本质联系在于它们都是对资金价值的度量，区别在于度量的时刻不同。

现值与积累值的概念可以扩展到多笔不同时刻的投资，这时现值等于这多笔本金的现值之和，积累值等于这多笔本金的积累值之和。

对于多笔不同时刻的投资，有时我们需要度量其在这多笔投资发生时刻之间的价值，就需要使用“当前值”的概念。当前值的计算要涉及多笔投资中若干笔资金的积累值和

#### 4 新编利息理论

其余若干笔资金的现值。

下面以例 1.2 为例来解释“现值”、“当前值”和“积累值”的计算。

**例 1.2** 如果在时刻 2 和时刻 4 分别投资 1 和 2 单位，那么这两笔投资额在时刻 0、时刻 3 和时刻 5 的价值。

**解：**这两笔投资在时刻 0 的价值（现值）为

$$V(0) = a^{-1}(2) + 2a^{-1}(4)$$

根据式 (1.1)，这两笔投资在时刻 5 的价值（积累值）为

$$V(5) = a^{-1}(2)a(5) + 2a^{-1}(4)a(5) = [a^{-1}(2) + 2a^{-1}(4)]a(5)$$

根据式 (1.1)，这两笔资金在时刻 3 的价值（当前值）为

$$V(3) = a^{-1}(2)a(3) + a^{-1}(4)a(3) = [a^{-1}(2) + 2a^{-1}(4)]a(3)$$

由此得到

$$\frac{V(0)}{a(0)} = \frac{V(3)}{a(3)} = \frac{V(5)}{a(5)}$$

上式反映这两笔投资在三个不同时刻的价值关系，体现了折现因子的作用。

“现值”、“当前值”和“积累值”的本质联系在于它们都是对资金价值的度量，区别在于度量的时刻不同。

### 三、实际利率

实际利率 (Effective Rate of Interest) 是常用的度量利息方法之一，一个度量期的实际利率是指在该度量期期末所获利息与本金之比。利率常以符号  $i$  来表示。利率是无单位量，常以百分数来表示。

仅仅给出利率数值并不能完整描述单位本金所获利息的金额，必须在给出利率的同时指出其所对应的度量期长度。例如，年利率 5% 明确了每年以利率 5% 计息一次，月利率 2% 明确了每月以利率 2% 计息一次。

下面给出实际利率的严格定义。以  $i_k$  表示第  $k$  期的实际利率，则

$$i_k = \frac{A(k) - A(k-1)}{A(k-1)} = \frac{a(k) - a(k-1)}{a(k-1)} \quad (1.2)$$

即各期实际利率为该期期末积累值与该期本金之差除以该期本金。如果将上式变形为

$$A(k) = A(k-1)(1 + i_k)$$

或

$$a(k) = a(k-1)(1 + i_k) \quad (1.3)$$

则变形后的公式表达了期末积累值与本金的关系。

根据实际利率公式，第  $k$  期所获利息为

$$I_k = A(k) - A(k-1)$$

**例 1.3** 某人有一个银行账户，他向该账户存款 100 元。第一年末该账户的余额为 110 元，第二年末该账户的余额为 120 元。试分别计算各年的实际利率。

**解：**由于  $A(0)=100$ ， $A(1)=110$ ， $A(2)=120$

则  $I_1 = A(1) - A(0) = 10$ ， $I_2 = A(2) - A(1) = 10$ 。于是

$$i_1 = \frac{I_1}{A(0)} = \frac{10}{100} = 10\%$$

$$i_2 = \frac{I_2}{A(1)} = \frac{10}{110} = 9.09\%$$

尽管各年利息数额相同，但由于计算各年实际利率所用的本金不同（分别为 100 元和 110 元），因此各年实际利率并不相同。

当投资期为多个度量期时，利息的度量方式有两种：单利方式和复利方式。下一小节将分别予以介绍。

#### 四、单利与复利

实务中常用的利息度量方法有两种，单利（Simple Interest）和复利（Compound Interest）。为使读者对单利和复利的差异有基本的认识，先考虑例 1.4。

**例 1.4** 某人有现金 100 元，他面临三种储蓄方式：（1）以 2 年期利率 4% 储蓄 2 年，到期领取本息；（2）以 1 年期利率 2% 储蓄 2 年，每年末领取年度利息；（3）以 1 年期利率 2% 储蓄 2 年，且将第 1 年末所获得的利息并入第 2 年的本金，在 2 年储蓄结束后才一次性领取本息。试从利息金额的角度比较这三种储蓄方式的差异。

**解：**仅仅从利率数值的比较上看，第一种方式的利率较高，其他两种方式的利率略有差异且低于第一种方式。似乎第一种方式较好，而其他两种方式无差异且差于第一种方式。然而，实际情况并非如此。

第一种方式下所获利息为  $100 \times 4\% = 4$  元。

第二种方式下每年所领取的利息均为 2 元，2 年储蓄所获利息总额为 4 元，与第一种方式从利息总额上来看并无差异。

第三种方式下，第 1 年末积累值（本利和）为 102 元，所获利息为 2 元（但并不领取，而是并入第 2 年的本金）；第 2 年初的储蓄本金为 102 元，导致第 2 年末的积累值为  $102 \times (1+2\%) = 104.04$  元，一次性领取的利息总额为 4.04 元，比前两种方式多获利息 0.04 元。

## 6 新编利息理论

所以从领取的利息总额来看，第三种方式最好，所获利息最多，而前两种方式无差异。

从例 1.4 中三种储蓄方式的比较结果来看，利息的多少不仅仅取决于利率的大小，还取决于度量期长度（以 2 年为度量期还是以 1 年为度量期）和投资方式（各年利息是直接领取还是并入下一年本金）。

事实上，例 1.4 中前两种投资属于单利计息方式，第三种投资方式属于复利计息方式。

下面分别讨论单利和复利。

### （一）单利

单利计息方式是指每期利息仅以初始本金为基础来计息，各期利息并不并入下期本金。当时刻 0 投资的 1 单位本金且第  $k$  ( $k=1, 2, \dots, n$ ) 期的利率为  $i_k^s$  时，如果该投资在第  $n$  期末的积累值为

$$a(n) = 1 + \sum_{k=1}^n i_k^s \quad (1.4)$$

则称该投资采用单利方式来计息，且  $i_k^s$  称为第  $k$  期的单利率。

单利方式下，第  $k$  期所获利息为

$$I_k = A(k) - A(k-1) = i_k^s \cdot A(0)$$

即各期所获利息为该期单利率与初始本金的乘积。

**例 1.5** 某人将 100 元投资 3 年，各年的单利率分别为 2%、3% 和 4%，试计算该投资在各年获得的利息金额以及第 3 年末的积累值。

**解：**由于单利方式，各年末的利息只以初始本金为基础来计息，所以各年所获利息分别为 2 元、3 元和 4 元。因此，该投资在第 3 年末的积累值为  $100+2+3+4=109$  元。也可以按式(1.4)来直接计算，即

$$100a(3) = 100(1 + 2\% + 3\% + 4\%) = 109 \text{ (元)}$$

实务中经常遇到的是单利率为常数的情形，即常数单利方式，表达式如下：

$$a(t) = 1 + i \cdot t, \quad t \geq 0$$

由于

$$a(t + \Delta t) - a(t) = i \cdot \Delta t$$

所以常数单利方式下资金的绝对增长额与积累时间增量  $\Delta t$  成正比，而与  $t$  之前的状态无关，即没有“记忆性”。

在常数单利率  $i$  下，对于  $k=1, 2, \dots, n$ ，根据式 (1.2)，第  $k$  期实际利率

$$i_k = \frac{a(k) - a(k-1)}{a(k-1)} = \frac{i}{1 + (k-1)i}$$

关于  $k$  单调递减。这说明，在常数单利方式下，各期常数单利率对应的实际利率并不为常数（仅当  $k=1$  时，实际利率才与单利率相等，因为该期的本金即为初始本金）。

**例 1.6** 某人将 100 元投资 3 年，年单利率为 2%，试计算各年的实际利率。

**解：**各年实际利率的计算过程为：

年度	本金	利息	实际利率
1	100	2	$2/100=2.00\%$
2	102	2	$2/102=1.96\%$
3	104	2	$2/104=1.92\%$

当积累时间  $t$  不是度量期的整数倍时，积累时间  $t$  的小数部分所产生的利息将小于每个整数度量期间所产生的利息。

在常数单利方式下，折现函数为

$$a^{-1}(t) = \frac{1}{1 + i \cdot t}$$

它表示的是时刻  $t$  的 1 单位积累值在时刻 0 的现值。

由于在单利计息方式下，各期利息并不并入下期本金，人们常常将这种方式描述为“利上无利”。

实务中，单利计息方式的应用十分有限，单利计息方式通常只适用于短期借贷。对于较长期的借贷，如果一期所生利息不能并入下期本金，显然损害了债权人的利益。这时，债权人必然定期取走利息，或者取出本息再将其转入下期来放贷，造成借贷行为的短期化。由于单利计息方式非常简便，银行为使单利计息方式适用于长期借贷而设置了多档次的单利率，例如 1 年期、2 年期和 5 年期单利率。

## (二) 复利

复利计息方式是指将每期的利息都并入下期本金，以便在下一个计息期继续生息。当时刻 0 投资 1 单位本金且第  $k$  ( $k=1, 2, \dots, n$ ) 期的利率为  $i_k^C$  时，如果该投资在第  $n$  期末的积累值为

$$a(n) = \prod_{k=1}^n (1 + i_k^C) \quad (1.5)$$

则称该投资采用复利方式来计息，且  $i_k^C$  称为第  $k$  期的复利率。

复利方式下，第  $k$  期所获利息为

$$I_k = A(k) - A(k-1) = i_k^c \cdot A(k-1) \quad (1.6)$$

即各期所获利息为该期复利率与该期本金的乘积。

对于  $k=1, 2, \dots, n$ , 第  $k$  期的实际利率

$$i_k = \frac{a(k) - a(k-1)}{a(k-1)} = \frac{(1+i_k^c)a(k-1) - a(k-1)}{a(k-1)} = i_k^c$$

可见, 复利率与实际利率本质上是一致的, 尽管定义不同。换言之, 复利计息方式与按实际利率计息的方式是相同的。所以在本书后面的讨论中, 对复利率和实际利率不加区分。

**例 1.7** 与例 1.3 有所不同, 某人将 100 元投资 3 年, 各年的复利率分别为 2%、3% 和 4%。试计算该投资在各年获得的利息金额以及第 3 年末的积累值。

**解:** 由于复利方式, 各年末的利息只以当年本金为基础来计息, 所以各年末积累值的计算过程为:

年 度	本 金	利 息	年 末 积 累 值
1	100.00	$100 \times 2\% = 2.00$	102.00
2	102.00	$102 \times 3\% = 3.06$	105.06
3	105.06	$105.06 \times 4\% = 4.20$	109.26

也可以按式(1.4)来直接计算, 即

$$100a(3) = 100(1+2\%)(1+3\%)(1+4\%) = 109.26 \quad (\text{元})$$

实务中常见的是复利率为常数的情形, 即常数复利方式。本书中, 除非特别指明, 否则涉及复利的讨论均针对常数复利。在常数复利率  $i$  下, 常数复利方式的表达式如下:

$$a(t) = (1+i)^t, \quad t \geq 0$$

由于

$$\frac{a(t+\Delta) - a(t)}{a(t)} = \frac{(1+i)^\Delta a(t) - a(t)}{a(t)} = (1+i)^\Delta - 1 \quad (1.7)$$

所以常数复利公式的特点是资金的相对增长率只与积累时间增量  $\Delta$  有关, 而与  $t$  之前的状态无关, 即没有“记忆性”。式 (1.7) 中,  $(1+i)^\Delta - 1$  称为“复利计息因子”。复利计息因子度量了任意时刻单位金额资金积累  $\Delta$  时间后获得的利息。

根据常数复利公式, 对于  $k=1, 2, \dots, n$ , 第  $k$  期利息

$$a(k) - a(k-1) = (1+i)^k - (1+i)^{k-1} = a(k-1) \cdot i$$

关于  $k$  单调递增。第  $k$  期实际利率

$$i_k = \frac{a(k) - a(k-1)}{a(k-1)} = \frac{(1+i)a(k-1) - a(k-1)}{a(k-1)} = i$$

为常数。

常数复利方式下，折现函数为

$$a^{-1}(t) = (1+i)^{-t}$$

它表示的是  $t$  期末 1 单位积累值的现值。

关于复利方式，历史上有一个著名的“72 法则”，下面以例 1.8 来说明。

**例 1.8** 关于“72 法则”的讨论：在年复利率  $i$  下，1 单位本金经过多少年能够翻倍？

**解：**由  $(1+i)^t = 2$  得， $t = \ln 2 / \ln(1+i)$ 。

$$\text{变形后得 } t = \frac{i \ln 2}{\ln(1+i)} \cdot \frac{1}{i}$$

利用  $i=8\%$  计算上式右端第一项，得  $\frac{8\% \ln 2}{\ln 1.08} = 0.7205$ ，于是  $t$  的近似公式为

$$t \approx \frac{72}{100i}$$

该公式就是著名的“72 法则”，它是指以 1% 的年复利率来计息，经过 72 年，本金将会翻倍。尽管该公式在 1% 下得到的结果并不是准确的 72（而是 69.66），但它能在很大的利率范围内可以产生相当精确的结果，如下表所示：

表 1.1 使本金翻倍的时间长度

利率 (%)	“72 法则”值	准确值
4	18	17.67
5	14.4	14.21
6	12	11.90
7	10.29	10.24
8	9	9.01
9	8	8.04
10	7.2	7.27
12	6	6.12
18	4	4.19

复利方式与单利方式的资金积累速度因其积累时间而存在不同的情形。由于



$$(1+i)^t \begin{cases} < 1+i \cdot t, & 0 < t < 1 \\ = 1+i \cdot t, & t = 1 \\ > 1+i \cdot t, & t > 1 \end{cases}$$

所以，当积累时间短于一个度量期时，复利方式的资金积累速度低于单利方式；当积累时间为一个度量期时，复利方式与单利方式没有差别；当积累时间为多个度量期时，复利方式的资金积累速度高于单利方式，这就是人们常常描述的“利上有利”、“利滚利”。

当复利率与单利率在数值上相同时，资金积累过程的比较如图 1.2 所示。

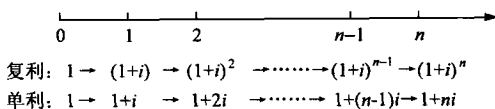


图 1.2 复利与单利方式下资金积累过程比较

实务中，投资期达到或超过一个度量期的长期金融业务几乎全部使用复利方式，许多短期金融业务也常常使用复利方式。而单利方式只是偶尔用于短期业务，或者用于短于一个度量期的复利的近似计算。

将折现的概念应用于复利方式，可以得到非常简捷的表达式。如果每期复利率为  $i$ ，则第  $n$  期末的 1 单位积累值，经历  $n$  期折现后的现值为

$$a^{-1}(n) = (1+i)^{-n} = a^{-1}(n-1)/(1+i)$$

则每期折现因子（记为  $v$ ）为

$$v = 1/(1+i)$$

复利方式下的资金折现过程如图 1.3 所示。

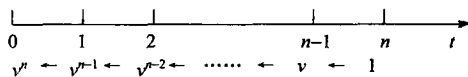


图 1.3 复利方式下资金折现

## 五、实际贴现率

实际利率是关于期末获得利息的度量，而实际贴现率（Effective Rate of Discount）则是关于期初获得利息的度量。

一个度量期的实际贴现率是指该度量期初所获利息与期末回收金额之比，常以  $d$  来表示。读者一定注意到，该定义中没有使用“本金”这一术语，因为本金是期初金额，不是期末金额。严格地讲，实际贴现率的定义中的“利息”应该称为“贴息”，但在涉及实际贴现率的场合，这两个术语是通用的。之所以要强调区分这两个术语，是因为“利