重点难点解析与训练

ZHONGDIAN NANDIAN
JIEXI YU XUNLIAN

⊙丛书主编　时　曦
⊙本册主编　蒋海啸

特别辅导

初三数学

GUANGXI NORMAL UNIVERSITY PRESS
广西师范大学出版社

重　点　难　点　解　析　与　训　练

特别辅导

本册主编：蒋海啸

初三数学

GUANGXI NORMAL UNIVERSITY PRESS
广西师范大学出版社
·桂林·

编委会名单

丛书主编:时　曦
本册主编:蒋海啸
本册编者:莫小鸣　吴　娟

特别辅导　初三数学
本册主编　蒋海啸

责任编辑:梁燕鸿　　封面设计:杨　琳
　　　　　　　　　　版式设计:林　园

广西师范大学出版社出版发行
(广西桂林市育才路 15 号　邮政编码:541004
网址:http://www.bbtpress.cn)
广西师范大学印刷厂印刷
*
开本:890×1 240　1/32　印张:10.375　字数:306 千字
2004 年 6 月第 3 版　2004 年 6 月第 2 次印刷
印数:8 001～23 000 册
ISBN 7-5633-2356-2/G·1737
定价:13.50 元

前言

本丛书以最新人教版九年义务教育三年制初级中学教材为依据，按照新课程标准的理念精心设计、编写，力求全面体现素质教育思想和教改最新成果，实现创新精神和学科能力的培养。本丛书从揭示认知规律的层面，对重点、难点、易错点、得分点进行解析，并从学习方法指导的角度，构建初中各科重点、难点的学习方略，旨在帮助初中学生在高效完成同步学习的同时实现能力超前发展。

本丛书具有如下特点：

一、同步构建优化的知识网络，提供高效学习新捷径。

在素质教育背景下，考试命题的思路可以综述为"遵循大纲，不拘泥于教材"，教材内容仅是命题的素材之一，多数试题内容选自教材之外，但分析和解题方法乃至答案都源自教材。因此，学生在学习时就要对大纲的要求及课本知识进行网络化处理。本丛书不仅提炼了一个实用、有效的知识网络，使学生对知识间的关联一目了然，而且对大纲要求的各种能力，以同步辅导的形式分别讲解，并通过多个角度突破重点、难点和关键问题，通过多种思路归纳解题技巧，这对提高学生的学习效率和应试能力有极好的帮助作用。

二、能力立意与问题立意相结合，使能力问题化，以题串讲，知识的掌握与能力的提高尽在读题练题中。

为增强学习效果，提高学习效率，本丛书从栏目设置到

编写体例都贴近学生学习实际、认知规律及思维特点。本着精讲精练的原则，各分册通过“名师导学”、“重点难点题析”、“迁移点拨”、“思维与能力训练”、“热点试题精析”、“经验与规律”、“新视野阅读”、“英美文化背景”、“综合能力检测”等栏目，以例题讲解及配套训练的形式将所学内容串起来。与此同时，本丛书注重通过题目来反映学科知识的内在联系与迁移，注重对学习策略的引导和学习规律的总结，从思维方法的层面对学习中的重点、难点、易错点及得分点加以解析和点拨，便于学生理解和应用。

三、选取贴近生活、贴近社会、反映科技发展趋势的例题和训练题，着力培养学生的实践能力和创新能力。

本丛书特别注重对学生综合素质的培养，力争让学生学好、学活知识，达到学以致用的目的。各分册均注意从社会价值较大的信息中归纳要点，并以此选取、设计新的例题和训练题，多角度锻炼学生的实践能力，并在此过程中强调创新意识，促进研究性学习的开展。为了加深理解这些问题，在例题分析与解答过程中，针对学生学习中的易错点、思维受阻点、困惑点予以讲解，并以旁批的形式加以提示，帮助学生抓住重点、突破难点，明白解决问题的关键所在，从而提高自身分析问题、解决问题的能力。

我们相信，这套倾注了众多特级、高级教师和资深教研员心血的丛书，必将成为广大学生的良师益友。愿这套丛书能帮助广大初中学生快速提高学习成绩，并实现学习成绩与能力发展的双丰收。

编者

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

目录

代数部分

第十二章　一元二次方程

名师导学

本章的主要内容有：一元二次方程的解法及其应用，根的判别式，根与系数的关系，可化为一元二次方程的分式方程以及简单的二元二次方程组的解法. 学习本章时，要熟练掌握一元二次方程的四种解法，它是后面学习分式方程和简单的二元二次方程组的必备知识；理解并掌握根的判别式及根与系数的关系，能灵活运用这些知识解决有关方程的求根、求值、化简、证明等问题；解一元二次方程与分式方程的应用题时，关键是要学会寻找已知数与未知数之间的关系，正确捕捉题中的相等关系，列出方程，检验是不可忽略的步骤. 另外本章中体现出了较多的数学思想方法的应用，如配方法，换元法，消元、降次法等，要通过学习领会、掌握这些思想方法，以提高解决问题的能力.

第一节　一元二次方程及其解法

本节的主要知识有一元二次方程的定义和一元二次方程的四种解法. 一元二次方程的四种解法是本节的重点，不仅要熟练掌握，而且要能根据方程的特点灵活选择适当的方法求解. 配方法是四种解法中的难点，也是一种重要的数学方法，在以后的数学学习中有着广泛的应用.

重点难点题析

例 1　下列方程哪些是一元二次方程？

(1) $\frac{1}{x^2}-2x=3$；　　(2) $x^2-2xy+1=0$；

(3) $x^3-2x-5=0$；　　　　(4) $\frac{1}{\sqrt{3}}x^2-\sqrt{3}=0$；

(5) $mx^2-6x-7=0$（m 为常数，且 $m\neq0$）；

(6) $ax^2+bx+c=0$；

(7) $5y^2=7y$；

(8) $2x(x-1)+6x=2x^2+7$.

分析　此题考查对一元二次方程概念的掌握情况. 应抓住一元二次方程的三个特征：(1) 是整式方程；(2) 只含有一个未知数；(3) 未知数的最高次数是 2 且二次项系数不为 0. 由于(1)不是整式方程，(2)含有两个未知数，(3)未知数的最高次数是 3，(6)二次项系数是否为 0 不明确，(8)整理后得 $4x=7$，所以(1)、(2)、(3)、(6)、(8)不是一元二次方程.

答　(4)、(5)、(7)是一元二次方程.

迁移点拨　运用一元二次方程的概念不仅可进行方程类型的识别，还能求方程中某些待定字母的取值. 解题时要特别注意二次项系数不能为 0，这是最易被忽略的.

如　当 m 取何值时，方程 $(m-1)x^{m^2+1}+2mx+3=0$ 是关于 x 的一元二次方程？

解　当 $m^2+1=2$ 且 $m-1\neq0$ 时，方程 $(m-1)x^{m^2+1}+2mx+3=0$ 是关于 x 的一元二次方程.

由 $m^2+1=2$，得 $m^2=1$. ∴　$m=\pm1$.

由 $m-1\neq0$，得 $m\neq1$.

∴　当 $m=-1$ 时，方程 $(m-1)x^{m^2+1}+2mx+3=0$ 是关于 x 的一元二次方程.

再如　若 $x^{2a+b}-2x^{a-b}+3=0$ 是关于 x 的一元二次方程，求 a、b 的值.

分析　x^{2a+b} 和 x^{a-b} 的指数至少一个为 2 共 5 种情况.

解　$\begin{cases}2a+b=2,\\a-b=2,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}2a+b=2,\\a-b=1,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}2a+b=2,\\a-b=0,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}2a+b=0,\\a-b=2,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}2a+b=1,\\a-b=2.\end{cases}$

即$\begin{cases} a_1=\dfrac{4}{3}, \\ b_1=-\dfrac{2}{3}; \end{cases}$ $\begin{cases} a_2=1, \\ b_2=0; \end{cases}$ $\begin{cases} a_3=\dfrac{2}{3}, \\ b_3=\dfrac{2}{3}; \end{cases}$ $\begin{cases} a_4=\dfrac{2}{3}, \\ b_4=-\dfrac{4}{3}; \end{cases}$ $\begin{cases} a_5=1, \\ b_5=-1. \end{cases}$

例 2　用配方法解方程 $3x^2-\sqrt{2}x-20=0$.

分析　此题考查对配方法的掌握情况.配方法最关键的步骤是前三步:(1) 将二次项系数化为 1;(2) 将常数项与二次项、一次项分开在等式两边;(3) 方程两边都加上一次项系数一半的平方,即可化为 $(x+a)^2=k$ 的形式.然后用开平方法求解.

解　方程两边都除以 3,得

$x^2-\dfrac{\sqrt{2}}{3}x-\dfrac{20}{3}=0.$①

> ①这是最易漏掉的一步,记住:用配方法首先要将二次项系数化为 1.

移项,得 $x^2-\dfrac{\sqrt{2}}{3}x=\dfrac{20}{3}$.

配方,得

$$x^2-\frac{\sqrt{2}}{3}x+\left(\frac{\sqrt{2}}{6}\right)^2=\frac{20}{3}+\left(\frac{\sqrt{2}}{6}\right)^2,$$

即　$\left(x-\dfrac{\sqrt{2}}{6}\right)^2=\dfrac{121}{18}$.

$\therefore$　$x-\dfrac{\sqrt{2}}{6}=\pm\dfrac{11\sqrt{2}}{6}$, 即　$x=\dfrac{\sqrt{2}}{6}\pm\dfrac{11\sqrt{2}}{6}$.

$\therefore$　$x_1=2\sqrt{2}, x_2=-\dfrac{5\sqrt{2}}{3}$.

迁移点拨　配方法是一种重要的数学方法,除了用来解一元二次方程外,还在判断数的正、负,代数式变形,恒等式的证明中有着广泛的应用.

如　证明:不论 x 为何值,$5x^2-6x+11$ 的值恒大于 0.

证明　$5x^2-6x+11$

$=5\left(x^2-\frac{6}{5}x\right)+11$①

$=5\left[x^2-\frac{6}{5}x+\left(\frac{3}{5}\right)^2-\left(\frac{3}{5}\right)^2\right]+11$

$=5\left[\left(x-\frac{3}{5}\right)^2-\frac{9}{25}\right]+11$

$=5\left(x-\frac{3}{5}\right)^2-\frac{9}{5}+11$

$=5\left(x-\frac{3}{5}\right)^2+\frac{46}{5}.$

①将代数式某项的系数化为1，只能采取提公因式的办法，千万不能像方程那样每项都除以系数.

∵　不论 x 为何实数，都有 $\left(x-\frac{3}{5}\right)^2\geqslant 0$，

∴　$5\left(x-\frac{3}{5}\right)^2+\frac{46}{5}>0.$

∴　$5x^2-6x+11$ 的值恒大于 0.

例 3　用适当的方法解下列方程：

(1) $4(3x-2)^2=9$；　　(2) $3x^2-\frac{1}{2}=5x$；

(3) $3(4x^2-9)-2(2x-3)=0$；　　(4) $\sqrt{3}x^2-(3+\sqrt{2})x+\sqrt{6}=0$.

分析　此题考查对一元二次方程解法的灵活掌握情况.一元二次方程的解法有四种：①直接开平方法，②配方法，③公式法，④因式分解法.具体用哪种方法来解，要根据方程的特点来定.一般来说，若方程无一次项，常可用直接开平方法来解；若方程缺少常数项或方程左边可因式分解成两个一次因式之积，方程右边是 0，可用因式分解法求解.以上方法不可行时，用公式法.应重点掌握因式分解法和公式法.因式分解法在解方程中显出迅捷性与灵活性，公式法表现为求解的“万能性”.

解　(1) 方程两边都除以 4，得 $(3x-2)^2=\frac{9}{4}$.

两边开平方，得

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

$$3x-2=\pm\frac{3}{2},$$

即　$3x-2=\frac{3}{2}$，或 $3x-2=-\frac{3}{2}$.

∴　$x_1=\frac{7}{6}$，$x_2=\frac{1}{6}$.

(2) 去分母、移项，得 $6x^2-10x-1=0$.

∵　$a=6$，$b=-10$，$c=-1$，

∴　$b^2-4ac=(-10)^2-4\times6\times(-1)=124>0$.

∴　$x=\frac{-(-10)\pm\sqrt{124}}{2\times6}=\frac{10\pm2\sqrt{31}}{12}=\frac{5\pm\sqrt{31}}{6}$.

∴　$x_1=\frac{5+\sqrt{31}}{6}$，$x_2=\frac{5-\sqrt{31}}{6}$.

(3) 原方程可化为 $3(2x+3)(2x-3)-2(2x-3)=0$，

即　$(2x-3)(6x+9-2)=0$.

∴　$(2x-3)(6x+7)=0$.

∴　$2x-3=0$，或 $6x+7=0$.

∴　$x_1=\frac{3}{2}$，$x_2=-\frac{7}{6}$.

(4) 因式分解，得$(\sqrt{3}x-\sqrt{2})(x-\sqrt{3})=0$.

∴　$\sqrt{3}x-\sqrt{2}=0$，或 $x-\sqrt{3}=0$.

∴　$x_1=\frac{\sqrt{6}}{3}$，$x_2=\sqrt{3}$.

迁移点拨　因式分解法体现了“降次”、“化归”的数学思想方法.它不仅可用来解一元二次方程，而且在解一元高次方程、二元二次方程组及有关代数式的计算、证明中也有着广泛的应用.

如　先从括号内①、②、③、④备选项中选出合适的一项，填在横线上，将题目补充完整后再解答.

(1) 如果 a 是关于 x 的方程 $x^2+bx+a=0$ 的根，并且 $a\neq0$，求

______的值.(① ab,② $\frac{b}{a}$,③ $a+b$,④$a-b$.)

(2) 已知 $7x^2+5y^2=12xy$,并且 $xy\neq0$,求______的值.(① xy,② $\frac{x}{y}$,③ $x+y$,④ $x-y$.)

(宁夏区中考题)

解　(1) 选③. ∵ a 是方程 $x^2+bx+a=0$ 的根,

∴ $a^2+ab+a=0$,∴ $a(a+b+1)=0$.

又∵ $a\neq0$,∴ $a+b+1=0$. ∴ $a+b=-1$.

(2) 选②. ∵ $7x^2+5y^2=12xy$,

∴ $7x^2-12xy+5y^2=0$, $(7x-5y)(x-y)=0$.

∴ $7x-5y=0$ 或 $x-y=0$.

∴ $\frac{x}{y}=\frac{5}{7}$或$\frac{x}{y}=1$.

又如　解方程 $x^3-3x^2-2x+6=0$.

解　原方程可化为$(x^3-3x^2)-(2x-6)=0$.

$x^2(x-3)-2(x-3)=0$.

$(x-3)(x^2-2)=0$, 即　$(x-3)(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})=0$.

∴ $x-3=0$,或 $x+\sqrt{2}=0$,或 $x-\sqrt{2}=0$.

∴ $x_1=3,x_2=-\sqrt{2},x_3=\sqrt{2}$.

例 4　解关于 x 的方程 $abx^2-(a^2+b^2)x+ab=0(ab\neq0)$.

分析　此题考查对字母系数方程的解法. 由于 $ab\neq0$,可判断该方程为一元二次方程. 方程已具备一般形式,故考虑用公式法或因式分解法. 用公式法,必须在确定 $\Delta\geqslant0$ 的前提下才能求解;用因式分解法则需左端能分解因式. 一般来说,这类方程适合因式分解法.

解法一

$A=ab,B=-(a^2+b^2),C=ab$,

$$\begin{aligned}\Delta=B^2-4AC&=[-(a^2+b^2)]^2-4ab\cdot ab\\&=a^4+2a^2b^2+b^4-4a^2b^2\end{aligned}$$

$$=a^4-2a^2b^2+b^4$$
$$=(a^2-b^2)^2\geqslant 0.$$

$$\therefore\quad x=\frac{(a^2+b^2)\pm\sqrt{(a^2-b^2)^2}}{2\cdot ab}$$
$$=\frac{(a^2+b^2)\pm|a^2-b^2|}{2ab}.$$

$$\therefore\quad x_1=\frac{a}{b},x_2=\frac{b}{a}.$$

解法二

因式分解，得$(ax-b)(bx-a)=0$.

$\therefore\quad ax-b=0$，或 $bx-a=0$.

$$\therefore\quad x_1=\frac{b}{a},x_2=\frac{a}{b}.$$

迁移点拨　解字母系数的方程，要注意判断最高次项的系数是否为 0，以便确定方程的类型. 若不能判断，则要分情况讨论.

如　解关于 x 的方程$(a^2-b^2)x^2-4abx=a^2-b^2$.

解　当 $a^2-b^2\neq 0$ 时，方程是 x 的一元二次方程.

因式分解，得　$(a+b)(a-b)x^2-4abx-(a+b)(a-b)=0$,

$$[(a+b)x+(a-b)][(a-b)x-(a+b)]=0.$$

$\because\quad a^2-b^2\neq 0$，$\therefore\quad a+b\neq 0$，$a-b\neq 0$.

$$\therefore\quad x_1=-\frac{a-b}{a+b},x_2=\frac{a+b}{a-b}.$$

当 $a^2-b^2=0$ 时，方程不是 x 的一元二次方程. 分两种情况讨论：

若 $a^2=b^2=0$，则原方程化为 $0\cdot x^2-0\cdot x=0$，x 可取任意实数，方程有无数个解；

若 $a^2=b^2\neq 0$，则 $a\neq 0$ 且 $b\neq 0$，原方程化为$-4abx=0$.

$\therefore\quad x=0$.

思维与能力训练

一、选择题

1. 方程$(k^2-1)x^2+kx-5=0$是一元二次方程，则k的值不能是(　　).

A. 0　　B. 1　　C. -1　　D. ±1

2. 方程$\sqrt{2}x(x-1)-3=\sqrt{3}x(x+1)$化为一般式后，$a$、$b$、$c$的值是(　　).

A. $a=\sqrt{3}-\sqrt{2}, b=\sqrt{3}+\sqrt{2}, c=-3$

B. $a=\sqrt{3}-\sqrt{2}, b=-(\sqrt{3}+\sqrt{2}), c=6$

C. $a=\sqrt{3}-\sqrt{2}, b=\sqrt{3}+\sqrt{2}, c=3$

D. $a=\sqrt{3}+\sqrt{2}, b=\sqrt{3}+\sqrt{2}, c=-6$

3. 方程$x^2+\frac{3}{2}x+4=0$左边配成一个完全平方式后，所得的方程是(　　).

A. $\left(x+\frac{3}{4}\right)^2=-\frac{55}{16}$　　B. $\left(x+\frac{3}{4}\right)^2=\frac{55}{16}$

C. $\left(x+\frac{3}{2}\right)^2=-\frac{15}{4}$　　D. $\left(x+\frac{3}{2}\right)^2=\frac{15}{4}$

4. 下列方程：①$4x^2+\frac{1}{2x}+1=0$，②$5x^2-38=x$，③$4x^2-7xy+y^2=0$，④$\frac{y^2}{5}=0$，其中为一元二次方程的是(　　).

A. ②　　B. ②和①　　C. ②和③　　D. ②和④

5. 若一元二次方程$(m-1)x^2+3m^2x+(m^2+3m-4)=0$有一个根为0，则$m$的值是(　　).

A. 1　　B. -4　　C. 1或-4　　D. -1或4

6. 若$2x^2+1$与$4x^2-2x-5$互为相反数，则x为(　　).

A. -1或$\frac{2}{3}$　　B. 1或$-\frac{3}{2}$

C. 1 或 $-\frac{2}{3}$　　　　D. -1 或 $\frac{3}{2}$

二、填空题

1. 方程 $(m^2-4)x^2+(m-2)x+3m-1=0$，当 m ________ 时，为一元一次方程；当 m ________ 时，为一元二次方程.

2. 方程 $x=x(x-3)$ 的根是______；$5x^2-7=0$ 的根是______.

3. 已知 a 与 b 互为相反数，且 $2a-b=3$，那么 $a=$______，$b=$______，$ax^2+bx-2=0$ 的解是______.

4. 若 $x=-1$ 是方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根，则 $a-b+c=$______.

5. 已知 $|a|=3$，则关于 x 的一元二次方程 $(a-3)x^2+2=(a+2)x$ 的解是________.

6. 若关于 x 的方程 $x^2+a^2-16=0$ 与 $x^2-3a+12=0$ 有相同的实根，则 a 的值为______.

7. 已知 x_1、x_2 是方程 $3x^2-19x+m=0$ 的两根，且 $x_1=\frac{m}{3}$，则 m 的值为______.

三、解答题

1. 用直接开平方法解下列方程.

(1) $3x^2-\sqrt{25}=0$；　　　　(2) $(x-3)^2=4(5x+2)^2$.

2. 用配方法解下列方程.

(1) $x^2-2x-99=0$；　　　　(2) $2x^2-3x+1=0$.

3. 用公式法解下列方程.

(1) $x^2-0.5x=0.06$；　　　　(2) $3y^2-2\sqrt{3}y=-1$.

4. 用因式分解法解下列方程.

(1) $4(x-1)=1-x^2$；

(2) $(2x-1)(x+1)=(3x+1)(x+1)$；

(3) $x^2+5x-5m=2mx-6-m^2$.

5. 选择适当的方法解下列方程.

(1) $5y^2+1=2\sqrt{5}y$；

(2) $(2x+3)^2=3(4x+3)$;

(3) $3x(1-x)=2x-2$;

(4) $(x+3)(x+1)=6x+4$;

(5) $x^2-2ax+a^2-b^2=0$.

6. 已知:$2x^2+3xy+y^2=0$,x、y 均不为 0. 求$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}$的值.

7. 证明:关于 x 的方程$(a^2-8a+20)x^2+2ax+1=0$,不论 a 为何值,该方程都是一元二次方程.

第二节 一元二次方程的根的判别式

一元二次方程根的情况与根的判别式的关系是本节的重点. 首先要记住根的判别式的表达式,理解判别式与根的情况的关系,能运用这些关系解决以下几个方面的问题:①不解方程,判断一元二次方程根的情况;②根据方程根的情况,确定方程中字母系数的取值范围;③应用判别式进行有关证明.

重点难点题析

例 1 不解方程,判断下列方程的根的情况:

(1) $x(2x+3)=2$;　　(2) $16y^2+9=24y$;

(3) $5(x^2+1)+9x=0$.

分析 此题考查对一元二次方程根的判别式定理的掌握情况. 在判别一元二次方程根的情况时,首先应把方程整理为一般形式,写出方程中的 a、b、c,计算出根的判别式 $\Delta=b^2-4ac$ 的值;由 Δ 的值,判断出 Δ 的符号.

解 (1) 原方程可化为

$$2x^2+3x-2=0.$$

$\because$ $a=2$,$b=3$,$c=-2$,

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com