普通高等教育“十一五”国家级规划教材

高等代数

王萼芳

数学基础课程系列
简明教材

高等教育出版社

普通高等教育“十一五”国家级规划教材

数学基础课程系列简明教材

高等代数

Gaodeng Daishu

王萼芳

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS BEIJING

图书在版编目(CIP)数据

高等代数/王萼芳.—北京:高等教育出版社,2009.12

ISBN 978-7-04-028082-1

Ⅰ.高…　Ⅱ.王…　Ⅲ.高等代数-高等学校-教材　Ⅳ.O15

中国版本图书馆CIP数据核字(2009)第196248号

策划编辑　李　蕊　**责任编辑**　边晓娜　**封面设计**　张申申
责任绘图　黄建英　**版式设计**　王艳红　**责任校对**　杨雪莲
责任印制　张泽业

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街4号	咨询电话	400-810-0598
邮政编码	100120	网　　址	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　　刷	北京地质印刷厂	畅想教育	http://www.widedu.com

开　　本	850×1168　1/32	版　　次	2009年12月第1版
印　　张	13.375	印　　次	2009年12月第1次印刷
字　　数	340 000	定　　价	18.50元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换。

物料号　28082-00

内容提要

本书是普通高等教育"十一五"国家级规划教材，是为综合性大学与师范类院校的数学类专业编写的高等代数教材。根据教学大纲的要求，本书包含多项式、行列式、线性方程组、矩阵、矩阵的对角化问题、二次型、线性空间与线性变换、欧氏空间，共8章内容。

本书在注重强化基础知识及其训练的基础上，尽量做到深入浅出，精炼内容，突出重点，详细讲解难点问题；同时注重培养学生提出问题、分析问题和解决问题的能力。

总　序

2005年，高等教育出版社为适应高校数学类专业的教学需求，经过一段时间的酝酿，决定在“十一五”期间推出一套“数学基础课程系列简明教材”。这套系列教材包含数学分析、高等代数、解析几何、复变函数、实变函数、概率统计、微分几何等。为做好此事，在高等教育出版社的主持下成立了编委会，并邀请了一批有多年教学实践经验的资深教授参加编写工作。这套系列教材中的第一批书目已经被列入普通高等教育“十一五”国家级规划教材。经过几年的努力，这套教材开始正式与大家见面了。其中多数是新编的，也有一些是经过教学实践证明优秀的、深受读者欢迎的教材的修订版。

这套系列教材适用于我国综合性大学、理工科大学以及师范大学中的数学类专业，作为数学专业基础课的教学用书；当然，它们也可以作为理工科中非数学类专业的教学参考书。面向全国各类高校的数学系，具有较广泛的适用性，这是我们编写这套系列教材的初衷之一。

在这套系列教材中，尽管每一本教材的风格各异，但是在编写的基本理念上大家有着相当多的共识。我们希望这套教材做到以下几点：

首先，教材内容“少而精”。

众所周知，“少而精”是教学的一个基本原则。它要求在教学中要紧紧地抓住所涉及学科的基础知识与基本训练这个纲，突出重点，纲举目张。相反，内容过多、过杂、过深，势必使人不得要领，事倍功半。但是，有时人们会看不到讲得过多的害处，会在某些口

号的驱使下使事情脱离了正确的轨道，比如求多求全、追求内容的先进性或现代化等等。我们知道，基础课教材的作用在于它为读者提供后续课以及日后参加工作不可或缺的基础知识、基本方法与基本思想。所讲的内容并非越多越好，越深越好。遗憾的是，目前基础课内容有一种不断扩充的趋势。这虽然出于良好的目的，而其效果却不如愿。实际上，就以我们这些“过来人”为例，认真回想一下自己以前所学到的、真正用得得心应手的内容并不多；而且真正用得到的内容也并不很多。与其求全求多，不如精选最基本的东西，帮助读者真正掌握这些内容的实质、方法和思想。读者有了这样的基础，在他们将来遇到没有学过但确有需要的内容时，也会有能力自学。课程内容“现代化”的要求，应当是针对数学系的整个的教学体系而言的，而不是要求基础课的内容更新换代。这对数学学科而言是无需争议的事实。基础课可以在观念上、记号上为专业课的现代化做些必要的准备，但不应该是把后续课的某些基本概念提到前面来讲述。

其次，教材尽可能做到“深入浅出”。

基础课教材是初学者入门的读本，而这些初学者在此之前没有任何学习高等数学的经验。在这种情况下，就要求教材注意循序渐进、由浅入深，尽可能做到通俗易懂，最好还能做到生动有趣，引起读者的兴趣。一个好的数学基础课教材应当既逻辑严谨、体系完整，又深入浅出、平实自然。我们应当学会通过典型的实例和足够详尽的解释，来帮助初学者学会解读数学的抽象形式，透过抽象的数学叙述，正确把握和理解其内容实质。教材的真正水准应当体现在是否能把那些艰深的内容讲得让人感到自然易懂。把本来容易的东西讲得复杂难懂，是不可取的。为此，我们要注意避免过度形式化的不良倾向。数学工作者由于长期从事数学研究与教学，已经养成了严谨的习惯，追求叙述的一般性与抽象性，但与此同时，也往往形成了某种毛病，那就是忽视描述性语言，忽视那些抽象形式背后的直观模型，甚至抹

杀直观的意义，这是很不妥当的。过度的形式化，不仅造成了初学者的困难，更重要的是歪曲了数学本质，误导了学生。在基础课教材中，为了帮助初学者理解抽象数学形式的意义，除了典型例子之外，用必要的直观描述性语言去解释它的意义，同样是十分重要、不可或缺的。

最后，教材重视基本训练，重视对学生的能力培养。

我们赞同"双基"的提法，即基础课的任务是传授基础知识和掌握基本训练。学好一门数学课程，单单知道有关数学结论是不够的，还要求读者具有一定的分析问题与解决问题的能力。这样，勤于思考，独立思考，并做好相当数量的习题，是完全必要的。这是一切在数学上学而有成的人的共同体会。通过做题可以深入、具体地理解和掌握基本概念、结论和方法；获得计算和推理的能力；理解、掌握应用基本知识和方法解决问题的途径；同时也进一步锻炼刻苦思考和探索的毅力，培养创造性的思维能力和习惯。后一点不仅对学好数学很重要，而且对读者以后工作能力的提高和事业的成功都是很重要的。在这套教材中，我们精心选配好适合读者的各种例题与习题，它们是教材很重要的组成部分，不可忽视。习题中不仅有基本练习，而且有一些题目，需要读者经过一定的努力，花费一定的时间去探索，才能最终解决。此外，题目富有多样性、趣味性和启发性。当然，我们也不赞成出一些技巧性过强而没有训练价值的偏题与难题。

常言道："授人以鱼，不如授人以渔"。一本好的基础课教材要努力做到授人以渔，而不只是罗列知识。这就需要帮助读者理解课程内容和方法的实质，理解其中的数学思想。在教材中要尽可能地介绍清楚问题和概念的来龙去脉，包括一些典型的例子；尽可能解释清楚解决问题的思路和方法，其中包括定理证明和计算过程的思路，以提高学生的创新意识与探索精神。

以上是我们对这套教材的希望与要求，也是我们编书的理念。把它们写在这里，主要是为了自勉，并不表明这些我们已经全部做

好了、做到位了。我们希望使用这套教材的师生和其他读者多提宝贵意见，使教材得以不断完善。

“数学基础课程系列简明教材”编委会
2008 年 1 月 5 日

前 言

本书是高等教育出版社组编的“数学基础课程系列简明教材”中的一本。关于出版这套教材的宗旨以及对教材的要求。在总序中已经说得很清楚,这里就不再重复了。

近年来,我国中等教学及大学本科教学都经历了不少变化。就“代数”这门课程的内容而言,与十几年前相比,原有中学代数课程的内容删减了不少。一般大学数学课程中的“高等代数”课时也减少了许多。而对教学内容的要求却没有多大变化。因此给高等代数这门课程的教与学造成了一定的困难。

根据这种情况和编写本系列教材的宗旨。我们编写这本教材的主要思想是在保持高等代数课程基本要求所需内容的前提下尽可能做到教师易教、学生易学。由于高等代数这门课程的主要任务是使学生熟悉诸如多项式、线性方程组、行列式及矩阵等常用的代数工具,以及通过线性空间、线性变换等概念的学习,使学生理解任何把数学对象抽象为数学结构的思维方法。因此本书在介绍概念时尽量做到深入浅出,并且强调一些概念之间的联系。另一方面,编排了较多的由易到难的例题和习题。目的是提供学生自己动手的机会,使他们更深刻地理解概念及各种计算的条件与方法,以帮助读者巩固所学知识并加深理解。

限于编者水平,书中难免错误和疏漏,恳请广大师生和读者批评指正。

王萼芳

2009 年 2 月于北京

目　　录

第 1 章　多项式 …… 1

1.1　一元多项式及其运算 …… 1

习题 1.1 …… 5

1.2　整除性理论 …… 5

习题 1.2 …… 11

1.3　最大公因式 …… 11

习题 1.3 …… 21

1.4　数域 …… 21

习题 1.4 …… 25

1.5　因式分解定理 …… 25

习题 1.5 …… 29

1.6　重因式 …… 30

习题 1.6 …… 34

1.7　复系数与实系数多项式的因式分解 …… 35

习题 1.7 …… 38

1.8　有理系数多项式 …… 38

习题 1.8 …… 43

复习题 1 …… 44

第 2 章　行列式 …… 46

2.1　2 阶行列式与 3 阶行列式 …… 46

习题 2.1 …… 51

2.2　n 阶排列 …… 52

习题 2.2 …… 55

2.3　n 阶行列式的定义 …… 56

习题 2.3 …… 60
2.4 行列式的性质及计算 …… 61
习题 2.4 …… 74
2.5 行列式按一行(列)展开公式 …… 75
习题 2.5 …… 86
2.6 克莱姆法则 …… 87
习题 2.6 …… 93
复习题 2 …… 93
第 3 章 线性方程组 …… 97
3.1 消元法 …… 97
习题 3.1 …… 114
3.2 n 维向量空间 …… 115
习题 3.2 …… 120
3.3 线性相关性 …… 121
习题 3.3 …… 133
3.4 矩阵的秩 …… 134
习题 3.4 …… 141
3.5 线性方程组有解判别定理 …… 142
习题 3.5 …… 145
3.6 线性方程组解的结构 …… 146
习题 3.6 …… 156
复习题 3 …… 157
第 4 章 矩阵 …… 161
4.1 矩阵的运算 …… 161
习题 4.1 …… 171
4.2 矩阵的分块 …… 173
习题 4.2 …… 180
4.3 矩阵的逆 …… 181
习题 4.3 …… 187

4.4 等价矩阵 ………… 189
习题 4.4 ………… 197
4.5 几类特殊矩阵 ………… 197
习题 4.5 ………… 203
4.6 正交矩阵 ………… 204
习题 4.6 ………… 210
复习题 4 ………… 210
第 5 章 矩阵的对角化问题 ………… 214
5.1 相似矩阵 ………… 214
习题 5.1 ………… 217
5.2 特征值与特征向量 ………… 217
习题 5.2 ………… 227
5.3 矩阵可对角化条件 ………… 228
习题 5.3 ………… 232
5.4 实对称矩阵的对角化 ………… 232
习题 5.4 ………… 238
复习题 5 ………… 239
第 6 章 二次型 ………… 242
6.1 二次型及其矩阵表示 ………… 242
习题 6.1 ………… 248
6.2 用正交变换化实二次型为标准形 ………… 249
习题 6.2 ………… 252
6.3 标准形 ………… 252
习题 6.3 ………… 263
6.4 规范形 ………… 263
习题 6.4 ………… 268
6.5 正定二次型 ………… 269
习题 6.5 ………… 278
复习题 6 ………… 278

第7章 线性空间与线性变换 …… 281
7.1 线性空间的定义及简单性质 …… 281
习题7.1 …… 285
7.2 维数、基与坐标 …… 286
习题7.2 …… 290
7.3 基变换与坐标变换 …… 290
习题7.3 …… 294
7.4 线性空间的同构 …… 295
习题7.4 …… 297
7.5 线性子空间 …… 297
习题7.5 …… 306
7.6 线性变换及其运算 …… 307
习题7.6 …… 313
7.7 线性变换的矩阵 …… 314
习题7.7 …… 325
7.8 不变子空间 …… 326
习题7.8 …… 330
复习题7 …… 330
第8章 欧氏空间 …… 333
8.1 欧氏空间的定义及基本性质 …… 333
习题8.1 …… 341
8.2 标准正交基 …… 342
习题8.2 …… 348
8.3 子空间 …… 349
习题8.3 …… 352
8.4 正交变换与对称变换 …… 353
习题8.4 …… 358
复习题8 …… 359
习题答案及提示 …… 363

第1章 多 项 式

多项式是代数学中一个基本的研究对象.它与高次方程的讨论有密切的关系.多项式作为一类极其重要的初等函数,有广泛的应用.关于多项式的一些重要结论,在进一步学习后继课程、其他数学分支以及在实际问题中都常常用到.多项式理论中的一些论证和思考问题的方法,对于进一步学习及应用都有启发作用.

本章介绍有关多项式的一些基本概念及结论,讨论多项式的因式分解问题,并详细论述了复系数、实系数、有理系数多项式的因式分解问题.

1.1 一元多项式及其运算

本节介绍一元多项式的基本概念以及一元多项式的运算.

设 x 是一个变量(或称文字),n 是一个非负整数,表示式

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0 \tag{1}$$

称为 x 的一个多项式.其中 $a_n,a_{n-1},\cdots,a_1,a_0$ 都是常数,称为多项式(1)的系数;a_kx^k 称为多项式(1)的 k 次项;a_k 称为 k 次项系数.实际上,这里定义的多项式只包含一个变量,所以是一元多项式.为了简单起见,在不会引起误解的情况下,我们将一元多项式简称为多项式.在这一章中,我们提到的多项式都是指一元多项式.

以后我们常用 $f(x),g(x),\cdots$,或者简单地就用 $f,g,\cdots$ 表示多项式.并用 $f(a)$ 表示多项式 $f(x)$ 当 $x=a$ 时的值.如果 $f(c)=0$,就称 c 是多项式 $f(x)$ 的一个根.

如果两个多项式 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的同次项的系数全相等,就称

$f(x)$与$g(x)$相等,记作$f(x)=g(x)$.

系数全等于零的多项式称为零多项式,记作0.

如果在(1)中,$a_n\neq 0$,那么a_nx^n就称为多项式(1)的首项,a_n称为多项式(1)的首项系数,n称为多项式(1)的次数.为了方便起见,我们用"$\deg f(x)$"(或者简单地,用"$\deg f$")来表示$f(x)$的次数.非零常数是零次多项式.零多项式是唯一的无法确定次数的多项式.因此必须注意:只有在$f(x)\neq 0$时,符号"$\deg f(x)$"才有意义.

如果多项式

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$$

的系数$a_n,a_{n-1},\cdots,a_1,a_0$都是整数,我们就称$f(x)$是一个整系数多项式;如果$f(x)$的系数都是有理数,就称$f(x)$是一个有理系数多项式.同样地,可以定义实系数多项式和复系数多项式.因为一切常数都可以看成复数,所以一切多项式都可以看作复系数多项式.以后,如果不加以声明,我们总是理解为所讨论的多项式都是复系数多项式,有时也可限制为所讨论多项式是实系数多项式.

在初等代数中,我们学过多项式的加法、减法和乘法.两个多项式相加(或相减),就是把它们的同次项的系数相加(或相减);两个多项式相乘,就是分别将各个单项相乘,然后合并同类项.下面举例说明多项式的运算.

例1 设$f(x)=2x^2+3x-1$,$g(x)=x^3+2x^2-3x+2$.
求$f(x)+g(x)$,$f(x)-g(x)$,$f(x)g(x)$.

解
$$\begin{aligned}f(x)+g(x)&=(2x^2+3x-1)+(x^3+2x^2-3x+2)\\&=x^3+(2+2)x^2+(3-3)x+(-1+2)\\&=x^3+4x^2+1.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f(x)-g(x)&=(2x^2+3x-1)-(x^3+2x^2-3x+2)\\&=(0-1)x^3+(2-2)x^2+[3-(-3)]x+(-1-2)\\&=-x^3+6x-3.\end{aligned}$$

$$f(x)g(x)=(2x^2+3x-1)\cdot(x^3+2x^2-3x+2)$$

$$
\begin{aligned}
&= 2x^5+3x^4-x^3+4x^4+6x^3-2x^2 \\
&\quad -6x^3-9x^2+3x+4x^2+6x-2 \\
&= 2x^5+(3+4)x^4+(-1+6-6)x^3 \\
&\quad +(-2-9+4)x^2+(3+6)x-2 \\
&= 2x^5+7x^4-x^3-7x^2+9x-2.
\end{aligned}
$$

为了便于统一地讨论多项式的问题,我们还需要对多项式的运算规则作进一步的讨论.

首先,我们总结一下多项式的和、差、积的系数公式.

设
$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0,$$
$$g(x)=b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_1x+b_0$$
是两个多项式. 如果 $n=m$,那么容易看出:

$$
\begin{aligned}
f(x)+g(x) &= (a_n+b_n)x^n+(a_{n-1}+b_{n-1})x^{n-1}+\cdots \\
&\quad +(a_1+b_1)x+(a_0+b_0), \\
f(x)-g(x) &= (a_n-b_n)x^n+(a_{n-1}-b_{n-1})x^{n-1}+\cdots \\
&\quad +(a_1-b_1)x+(a_0-b_0).
\end{aligned}
$$

如果 $n>m$,那么在推导多项式的加法及减法公式时,为了方便起见,我们令 $b_{m+1}=b_{m+2}=\cdots=b_n=0$,而把 $g(x)$ 写成
$$g(x)=b_nx^n+b_{n-1}x^{n-1}+\cdots+b_1x+b_0.$$
于是可以同样地得到 $f(x)+g(x)$ 和 $f(x)-g(x)$ 的表示式. 如果 $m>n$,可以类似地处理. 读者可以作为练习自行推导.

根据上面的 $f(x)+g(x)$ 与 $f(x)-g(x)$ 的表示式,可以看出:$f(x)+g(x)$ 的 k 次项系数是 a_k+b_k;而 $f(x)-g(x)$ 的 k 次项系数是 a_k-b_k. 因此,$f(x)\pm g(x)$ 的次数满足下面的不等式:
$$\deg(f(x)+g(x))\leqslant\max(\deg f(x),\deg g(x)).$$

$f(x)$ 与 $g(x)$ 的乘法规则为
$$
\begin{aligned}
f(x)g(x) &= a_nb_mx^{n+m}+(a_nb_{m-1}+a_{n-1}b_m)x^{n+m-1}+\cdots \\
&\quad +(a_1b_0+a_0b_1)x+a_0b_0,
\end{aligned}
$$
其中 k 次项的系数是

$$a_kb_0+a_{k-1}b_1+\cdots+a_1b_{k-1}+a_0b_k{}^{*}.$$

如果$f(x)$或$g(x)$中有一个是零多项式,那么$f(x)g(x)$也是零多项式;如果$f(x)$与$g(x)$都不等于0,并设它们的首项分别是a_nx^n与b_mx^m,那么可以从乘法公式看出:$f(x)g(x)$的首项就是$a_nb_mx^{n+m}$.因此可知:如果$f(x)$与$g(x)$都不为0,那么乘积$f(x)g(x)$也不为0,并且它的次数等于$f(x)$与$g(x)$的次数之和:

$$\deg(f(x)g(x))=\deg(f(x))+\deg(g(x)).$$

由此还可推出:如果$f(x)g(x)=0$,那么必有$f(x)=0$或$g(x)=0$.

同数的运算相类似,多项式的加法与乘法满足下面的一些运算律:

(1) **加法交换律**

$$f(x)+g(x)=g(x)+f(x);$$

(2) **加法结合律**

$$(f(x)+g(x))+h(x)=f(x)+(g(x)+h(x));$$

(3) **乘法交换律**

$$f(x)g(x)=g(x)f(x);$$

(4) **乘法结合律**

$$(f(x)g(x))h(x)=f(x)(g(x)h(x));$$

(5) **加乘分配律**

$$f(x)[g(x)+h(x)]=f(x)g(x)+f(x)h(x).$$

这些规律不仅可以用来简化计算,而且在以后的讨论中也经常用到.

最后我们来证明,多项式的乘法还满足消去律.

(6) **乘法消去律**

如果$f(x)g(x)=f(x)h(x)$,并且$f(x)\neq 0$,那么必有$g(x)=h(x)$.

证明 从$f(x)g(x)=f(x)h(x)$可得

---

* 如果$l>n$,则令$a_l=0$;如果$l>m$,则令$b_l=0$.以后都这样理解.