普通高等教育“十五”国家级规划教材配套辅导

高等数学 第五版 [下册]

同步辅导与习题精解

胡新启 湛少锋 主编
众邦考试教育研究所 策划

同济大学应用数学系主编《高等数学》第五版同步辅导

众高校名师倾力推荐
高等数学教学新突破

- 课堂同步学习与考研复习并重
- 数十载教学生涯潜心积累
- 最行之有效的学习方法
- 最宝贵的试题资料

中国科学技术大学出版社

普通高等　　　　　　规划教材配套辅导

高等数学

第五版

[下 册]

同步辅导与习题精解

胡新启　湛少锋　主编

众邦考试教育研究所　策划

同济大学应用数学系主编《高等数学》第五版同步辅导

中国科学技术大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

高等数学同步辅导与习题精解/胡新启，湛少锋主编.—合肥：中国科学技术大学出版社，2006.8

ISBN 7-312-02007-0

Ⅰ.高… Ⅱ.①胡…②湛… Ⅲ.高等数学—高等学校—教学参考资料 Ⅳ.O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2006）第 125432 号

出版发行：中国科学技术大学出版社
（安徽省合肥市金寨路 96 号，230026）
印　　刷：中国科学技术大学印刷厂
经　　销：全国新华书店
开　　本：850 mm×1168 mm/32
印　　张：23
版　　次：2006 年 10 月第 1 版
印　　次：2006 年 10 月第 1 次印刷
印　　数：1—5 000 册
定　　价：24.00 元（上下册）

目　录

下　册

第八章 多元函数微分法及其应用

本章主要是把一元函数微分学中一些主要概念、理论和方法推广到多元函数，一方面充实微分学，另一方面也给工程技术及自然科学提供一些处理问题的方法和工具. 多元函数的概念，二元函数的极限和连续的概念，有界闭区域上多元连续函数的性质. 多元函数偏导数和全微分的概念，全微分存在的必要条件和充分条件. 方向导数与梯度的概念及其计算，复合函数、隐函数求导法，高阶偏导数. 空间曲线的切线和法平面及曲线的切平面和法线. 多元函数的极值和条件极值的概念，二元函数极值的必要条件和充分条件，极值的求法，拉格朗日乘数法，多元函数的最大值，最小值及其简单应用等构成了本章的主要内容.

学习要求与内容提要

学习要求

1. 理解多元函数的概念，知道多元函数的极限的概念，理解多元函数偏导数的概念.
2. 理解全微分的概念，知道全微分存在的必要条件和充分条件.
3. 熟练掌握多元初等函数的一阶偏导数和二元函数的二阶偏导数的求法.
4. 掌握复合函数求导法则，会求复合函数和隐函数的一阶偏导数.
5. 会求曲线的切线和法平面方程及曲面的切平面和法线方程.
6. 了解多元函数极值和条件极值的概念，会求二元函数的极值.
7. 了解多元函数条件极值的概念，会用拉格朗日乘数法求条件极值.
8. 会解一些简单的多元函数的最大值与最小值应用题.

重点 多元函数(主要是二元、三元)的偏导数和全微分的概念；多元函数可微的必要条件、充分条件；多元函数连续、偏导数存在、可微三者之间的关系；偏导数和全微分的计算，特别是复合函数的二阶偏导数及隐函数的偏导数；方向导数和梯度的概念及计算；多元函数微

分在几何上的应用(曲面的切平面和法线,曲线的切线和法平面);多元函数的极值和条件极值.

难点　二元函数的极限与连续、偏导数存在与全微分之间关系,多元复合函数的求导公式与计算,多元函数极值的充分条件,条件极值的概念与拉格朗日乘数法.

内容提要

1 多元函数

D 是 n 维空间内的点集,如果对于每一点 $P(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in D$,变量 z 按照一定的法则总有确定的值和它对应,则称 z 是点 P 的函数,记为 $z=f(P)$. 点集 D 称为函数的定义域,z 称为因变量,数集 $\{z|z=f(P),P\in D\}$ 称为函数的值域.

当 $n=1$ 时为一元函数,$n=2$ 时为二元函数,$n\geqslant 2$ 时,n 元函数统称为多元函数.

二元函数的几何意义　函数 $z=f(x,y)$ 的几何图形在空间直角坐标系中一般表示一张曲面,而其定义域 D 就是此曲面在 xOy 坐标面上的投影.

2 二元函数的极限与连续

设函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某个邻域内有定义(在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处可以无定义),如果对于任意给定的正数 ε,总存在正数 δ,使得对于适合不等式 $0<|PP_0|=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$ 的一切点 $P(x,y)\in D$,都有 $|f(x,y)-A|<\varepsilon$ 成立,则称当 $(x,y)\to(x_0,y_0)$ 时,函数 $f(x,y)$ 以 A 为极限,记作

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}}f(x,y)=A \text{ 或 } f(x,y)\to A(x\to x_0,y\to y_0).$$

二重极限存在,是指 $P(x,y)$ 沿任何线路趋于点 $P_0(x_0,y_0)$ 时,函数值都无限接近于 A. 如果 $P(x,y)$ 沿着一特定的线路趋于点 $P_0(x_0,y_0)$ 时,函数无限接近于某确定值,此时函数的极限未必存在. 但如果 $P(x,y)$ 沿不同的线路趋于 $P_0(x_0,y_0)$ 时,函数趋于不同的值,则函数的极限不存在.

一元函数极限的运算法则,可推广到二重极限.

设有二元函数 $z=f(x,y)$,如果 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}}f(x,y)=f(x_0,y_0)$,则称二元函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处连续. 也可定义为:

设 $\Delta z=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)$,称 Δz 为函数 $f(x,y)$ 的全增

量. 若$\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\Delta z=0$,则称二元函数 $z=f(x,y)$在点 $P_0(x_0,y_0)$处连续. 如果 $f(x,y)$在区域 D 内的每一点都连续,则称 $f(x,y)$在区域 D 上连续.

如果 $f(x,y)$在点 $P_0(x_0,y_0)$不连续,则称点 $P_0(x_0,y_0)$是二元函数 $z=f(x,y)$的不连续点或间断点. 二元函数的间断点可以是一个点,也可以是一条曲线. 二元连续函数的图形是一片无裂缝无点洞的曲面. 在有界闭区域上的多元连续函数同样有最大值和最小值定理,介值定理等. 一切多元初等函数在其定义域内连续. 利用连续定义求极限是求二重极限的一个重要方法.

3 偏导数的定义

设函数 $z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)的某个领域内有定义,固定自变量 $y=y_0$,而自变量 x 在 x_0 处有改变量 Δx,如果极限 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$存在,则称此极限值为函数 $z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)处关于 x 的偏导数,记作

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}},\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}},z_x(x_0,y_0)\text{或 }f_x(x_0,y_0);$$

类似地,函数 $z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)处关于 y 的偏导数定义为

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y},$$

记作$\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}},\left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}},z_y(x_0,y_0)$或 $f_y(x_0,y_0)$.

偏导数的概念可以推广到二元以上的函数,如三元函数 $f(x,y,z)$, $f_x(x_0,y_0,z_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x,y_0,z_0)-f(x_0,y_0,z_0)}{\Delta x}$.

如果函数 $z=f(x,y)$在区域 D 内每一点(x,y)处,对 x 的偏导数 $f_x(x,y)$都存在,则对于区域 D 内每一点(x,y),都有一个偏导数的值与之对应,这样就得到了一个新的二元函数,称为函数 $z=f(x,y)$关于变量 x 的偏导函数,记作

$$\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial x},z_x,f_x\text{ 或 }f_x(x,y).$$

类似地,函数 $z=f(x,y)$关于自变量 y 的偏导函数,记作

$$\frac{\partial z}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial y},z_y,f_y\text{ 或 }f_y(x,y).$$

由偏导数的概念可知,函数 $z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)处关于 x 的偏导

数 $f_x(x_0,y_0)$ 就是偏导函数 $f_x(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的函数值，而 $f_y(x_0,y_0)$ 就是偏导函数 $f_y(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的函数值. 一般把偏导函数简称为偏导数.

从偏导数的定义可以看出，求偏导数的方法与一元函数求导法是完全类似的. 对 $z=f(x,y)$，如果对 x 求偏导，就把 y 视为常量对 x 求导，如果对 y 求偏导，就把 x 视为常量对 y 求导. 高阶偏导也完全类似.

4 高阶偏导数

函数 $z=f(x,y)$ 的偏导数的偏导数称为二阶偏导数. $z=f(x,y)$ 的四个二阶偏导数如下：

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f_{xx}(x,y)=z_{xx},$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_{xy}(x,y)=z_{xy},$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=f_{yx}(x,y)=z_{yx},$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f_{yy}(x,y)=z_{yy}.$$

二阶及二阶以上的偏导数统称为高阶偏导数.

混合偏导数与次序无关的定理　如果函数 $z=f(x,y)$ 的两个混合偏导数在点 (x,y) 连续，则在点 (x,y) 处，有 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$.

5 复合函数求偏导数的公式

(1)复合函数求导法则

设函数 $u=\varphi(x,y)$，$v=\psi(x,y)$ 在点 (x,y) 处有偏导数，函数 $z=f(u,v)$ 在相应点 (u,v) 处有连续偏导数，则复合函数 $z=f[\varphi(x,y),\psi(x,y)]$ 在点 (x,y) 处有偏导数，且

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}.$$

(2)全导数公式

设 $u=u(x)$，$v=v(x)$ 在 x 处可导，$z=f(u,v)$ 处有连续偏导数，则复合函数 $z=f[u(x),v(x)]$ 在 x 处可导，且对 x 的全导数为

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}.$$

(3)设 $z=f(u,v,x,y)$，$u=\varphi(x,y)$，$v=\phi(x,y)$，

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial x},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial y}.$$

这里要注意到$\frac{\partial z}{\partial x}$与$\frac{\partial f}{\partial x}$是不同的，$\frac{\partial z}{\partial x}$是复合后的二元函数 $f(\varphi(x,y),\phi(x,y),x,y)$对 x 的偏导，是将 y 视为常数对 x 求导，而$\frac{\partial f}{\partial x}$是四元函数 $f(u,v,x,y)$对 x 求偏导，是将 u,v,y 均视为常数对 x 求导. $\frac{\partial z}{\partial y}$与$\frac{\partial f}{\partial y}$是类似的.

6 全微分

若二元函数 $z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)的全增量 $\Delta z=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)$可表示为

$$\Delta z=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho),$$

其中 A,B 与 $\Delta x,\Delta y$ 无关，只与 x,y 有关，$\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y^2)}$，则称二元函数$z=f(x,y)$在点$(x_0,y_0)$处可微，并称 $A\Delta x+B\Delta y$ 是 $z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)处的全微分，记作 $\mathrm{d}z$，即

$$\mathrm{d}z=A\Delta x+B\Delta y.$$

若二元函数 $z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)处可微，则函数 $z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)处一定连续.

可微的必要条件　若 $z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)可微，则 $z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)处的两个偏导数存在，且 $A=z_x(x_0,y_0)$，$B=z_y(x_0,y_0)$.

二元函数 $z=f(x,y)$在点(x,y)处的全微分可以写成如下形式：

$$\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y.$$

可微的充分条件　若函数 $z=f(x,y)$的偏导数$\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$在点$(x_0,y_0)$处连续，则函数 $z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)处可微.

通常自变量的增量 Δx 和 Δy 分别记做 $\mathrm{d}x$ 和 $\mathrm{d}y$，从而 $\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y$.

$\frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x$ 和$\frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y$ 称为偏微分. 二元函数的全微分等于它的两个偏微分之

和，这个叠加原理也适用于二元以上的函数. 如三元函数 $u=f(x,y,z)$ 如果可微，则 $du=\dfrac{\partial u}{\partial x}dx+\dfrac{\partial u}{\partial y}dy+\dfrac{\partial u}{\partial z}dz$.

同一元函数一样，多元函数的全微分也具有微分形式的不变性，即无论 u,v 是自变量还是中间变量，$z=f(u,v)$ 的全微分都具有形式 $dz=\dfrac{\partial z}{\partial u}du+\dfrac{\partial z}{\partial v}dv$.

7 隐函数的微分法

若由方程 $F(x,y,z)=0$ 确定了 z 是 x、y 的函数，则称这种由方程所确定的函数为隐函数.

(1)一元隐函数的求导公式

设方程 $F(x,y)=0$ 确定了 y 是 x 的函数 $y=y(x)$，$F_x(x,y)$，$F_y(x,y)$ 连续且 $F_y(x,y)\neq 0$，则 $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{F_x}{F_y}$.

(2)二元隐函数的求导公式

设方程 $F(x,y,z)=0$ 确定了 z 是 x、y 的函数 $z=z(x,y)$，$F_x(x,y,z)$，$F_y(x,y,z)$，$F_z(x,y,z)$ 连续且 $F_z(x,y,z)\neq 0$，则

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z},\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}$$

一般地，求由方程确定的隐函数的偏导数，对方程两边同时求偏导比用上面公式更为方便.

(3)方程组的情形

若方程组 $\begin{cases}F(x,y,z)=0\\G(x,y,z)=0\end{cases}$，确定函数 $y=y(x)$，$z=z(x)$，只要将每个方程两边分别对 x 对导，得 $\begin{cases}F_x+F_y\dfrac{dy}{dx}+F_z\dfrac{dz}{dx}=0\\G_x+G_y\dfrac{dy}{dx}+G_z\dfrac{dz}{dx}=0\end{cases}$，解此关于 $\dfrac{dy}{dx}$，$\dfrac{dz}{dx}$ 的二元一次方程组，求出 $\dfrac{dy}{dx}$、$\dfrac{dz}{dx}$ 即可.

若方程组 $\begin{cases}F(x,y,u,v)=0\\G(x,y,u,v)=0\end{cases}$，确定 $u=u(x,y)$，$v=v(x,y)$，可类似地分别对 x 求偏导，求出 $\dfrac{\partial u}{\partial x}$，$\dfrac{\partial v}{\partial x}$. 再分别对 y 求偏导，求出 $\dfrac{\partial u}{\partial y}$，$\dfrac{\partial v}{\partial y}$ 即可.

8 方向导数与梯度

设函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P(x,y)$ 的某一邻域 $U(P)$ 内有定义，自点 P 引射线 l，自 x 轴的正向到射线 l 的转角为 φ，$P'(x+\Delta x,y+\Delta y)\in U(P)$ 为 l 上的另一点，若 $\lim\limits_{\rho\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\rho}$ 存在，其中 $\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$，则称此极限值为 $f(x,y)$ 在点 P 沿方向 l 的方向导数. 记做 $\dfrac{\partial f}{\partial l}$.

如果 $z=f(x,y)$ 在点 $P(x,y)$ 是可微分的，则函数在该点沿任一方向 l 的方向导数都存在，且 $\dfrac{\partial f}{\partial l}=\dfrac{\partial f}{\partial x}\cos\varphi+\dfrac{\partial f}{\partial y}\sin\varphi$.

三元函数 $u=f(x,y,z)$ 在点 (x,y,z) 沿着方向 l（方向角为 α,β,γ）的方向导数的定义为

$$\frac{\partial f}{\partial l}=\lim_{\rho\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y+\Delta y,z+\Delta z)-f(x,y,z)}{\rho}.$$

其中 $\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2+(\Delta z)^2}$.

若 $u=f(x,y,z)$ 在点 (x,y,z) 处是可微分的，则

$$\frac{\partial f}{\partial l}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma.$$

函数 $z=f(x,y)$ 的梯度：$\operatorname{grad}f(x,y)=\dfrac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i}+\dfrac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j}$

函数 $z=f(x,y,z)$ 的梯度：$\operatorname{grad}f(x,y,z)=\dfrac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i}+\dfrac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j}+\dfrac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{k}$.

函数 $z=f(P)$ 在点 P 的梯度是一个向量，它的方向与方向导数取得最大值时的方向一致，它的模是方向导数的最大值.

9 曲线的切线和曲面的切平面

(1)若空间曲线 C 由参数方程 $x=\varphi(t),y=\phi(t),z=\omega(t)$ 给出，对应 $t=t_0$ 的点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 处的切线方程为 $\dfrac{x-x_0}{\varphi'(t_0)}=\dfrac{y-y_0}{\varphi'(t_0)}=\dfrac{z-z_0}{\omega'(t_0)}$，法平面方程为 $\varphi'(t_0)(x-x_0)+\varphi'(t_0)(y-y_0)+\omega'(t_0)(z-z_0)=0$.

(2)曲面的切平面与法线. 若曲面方程由 $F(x,y,z)=0$ 给出，曲面上点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 处的切平面方程为

$F_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+F_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+F_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0$，

法线方程为 $\dfrac{x-x_0}{F_x(x_0,y_0,z_0)}=\dfrac{y-y_0}{F_y(x_0,y_0,z_0)}=\dfrac{z-z_0}{F_z(x_0,y_0,z_0)}$.

10 二元函数的极值与驻点

设函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某个邻域内有定义，如果对在此邻域内除点 $P_0(x_0,y_0)$ 外的任意点 $P(x,y)$，均有 $f(x,y)<f(x_0,y_0)$（或 $f(x,y)>f(x_0,y_0)$），则称点 $P_0(x_0,y_0)$ 为函数 $z=f(x,y)$ 的极大值点（或极小值点）. $f(x_0,y_0)$ 称为极大值（或极小值），极大值点和极小值点统称为极值点，极大值和极小值统称为极值.

使 $f_x(x,y)=0$，$f_y(x,y)=0$ 同时成立的点 (x,y) 称为函数 $z=f(x,y)$ 的驻点.

极值存在的必要条件　设函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某个邻域内有定义，且存在一阶偏导数，如果 $P_0(x_0,y_0)$ 是极值点，则必有 $f_x(x_0,y_0)=0$，$f_y(x_0,y_0)=0$.

注意　可导函数的极值点必定为驻点，但是函数 $z=f(x,y)$ 的驻点却不一定是极值点.

极值存在的充分条件　设函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某个邻域内具有二阶连续偏导数，且 $P_0(x_0,y_0)$ 是驻点. 设 $A=f_{xx}(x_0,y_0)$，$B=f_{xy}(x_0,y_0)$，$C=f_{yy}(x_0,y_0)$，则

①当 $B^2-AC<0$ 时，点 $P_0(x_0,y_0)$ 是极值点，且当 $A<0$ 时，点 $P_0(x_0,y_0)$ 是极大值点；当 $A>0$ 时，点 $P_0(x_0,y_0)$ 是极小值点；

②当 $B^2-AC>0$ 时，点 $P_0(x_0,y_0)$ 不是极值点；

③当 $B^2-AC=0$ 时，点 $P_0(x_0,y_0)$ 可能是极值点也可能不是极值点.

11 条件极值与拉格朗日乘数法

求多元函数的极值问题或最大值、最小值问题时，对自变量的取值往往要附加一定的约束条件，这类附有约束条件的极值问题，称为条件极值.

求函数 $u=f(x,y,z)$ 在满足约束条件 $\varphi(x,y,z)=0$ 下的条件极值，其常用方法是拉格朗日乘数法. 拉格朗日乘数法的具体步骤如下：

①构造拉格朗日函数 $F(x,y,z,\lambda)=f(x,y,z)+\lambda\varphi(x,y,z)$，其中 λ 为待定常数，称其为拉格朗日乘数.

②求四元函数 $F(x,y,z,\lambda)$ 的驻点，即列方程组

$$\begin{cases} F_x=f_x(x,y,z)+\lambda\varphi_x(x,y,z)=0, \\ F_y=f_y(x,y,z)+\lambda\varphi_y(x,y,z)=0, \\ F_z=f_z(x,y,z)+\lambda\varphi_z(x,y,z)=0, \\ F_\lambda=\varphi(x,y,z)=0. \end{cases}$$

求出上述方程组的解 x,y,z,λ，那么驻点 (x,y,z) 可能是极值点.

③判别求出的点(x,y,z)是否是极值点，通常由问题的实际意义来确定.

对于多于三个自变量的函数或多于一个约束条件的情形也有类似的结果.

方法与疑难解析

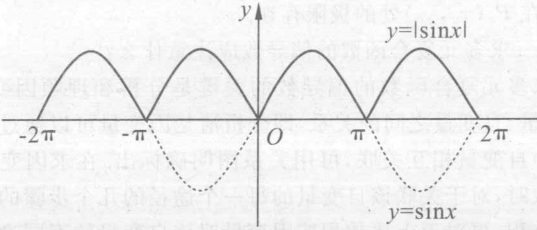
1 方法解析

(1)一般借助于一元函数的连续性，或通过变换、不等式的放缩等来确定多元函数的极限. 在用定义证明$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}} f(x,y)$二重极限不存在时通常有二种途径：

①找到两条特殊的路径，得出(x,y)沿这两条路径趋于(x_0,y_0)时，$f(x,y)$的极限值不等；

②找到一条特殊的路径证明(x,y)沿此路径趋于(x_0,y_0)时，$f(x,y)$的极限不存在.

(2)二重极限、连续、偏导数存在、可微间的关系



(3)多元函数的微分法一个是难点，要求读者一定要分清自变量与中间变量，以及它们之间的关系. 搞清楚函数的各变量间的复合关系，由于多元函数的复合关系可以说是无穷无尽的，不可能列出所有的公式. 因此，要记住最基本的公式，这就是链式规则——通过一切有关的中间变量到自变量. 自变量有几个，链式规则中就会含有几个公式；中间变量有几个，链式规则中的每个公式里就有几项. 同时，读者还应做较多的练习，才能熟练、灵活地掌握链式规则，确保求导的正确性.

(4)学习方向导数应注意的问题

①$\dfrac{\partial f}{\partial l}$是单侧极限. 因为$\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$，所以$\rho\to 0$实际上是$\rho\to 0^+$.

②$\frac{\partial f}{\partial x}$是双侧极限. $\Delta x \to 0$ 时, Δx 可正、可负,因此 $\alpha=0$ 时, $\frac{\partial f}{\partial l}$ 与 $\frac{\partial f}{\partial x}$ 不一定相等, $\alpha=\frac{\pi}{2}$ 时, $\frac{\partial f}{\partial l}$ 与 $\frac{\partial f}{\partial x}$ 也不一定相等.

③梯度 $\mathrm{grad} f(x,y)=\left\{\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}\right\}$ 是一个向量,当 l 的方向与梯度方向相同时,方向导数 $\frac{\partial f}{\partial l}$ 达到最大值 $|\mathrm{grad} f(x,y)|$.

2 疑难解析

【问题 1】 二元函数的极限与一元函数的极限有何异同?

解析 函数极限定义中的动点 $P \to P_0$(定点)是指 P 无限趋近于 P_0. 对于一元函数 $f(x)$,也就是 $x \to x_0$,其趋近方式只有两种: $x \to x_0^+$ 和 $x \to x_0^-$. 即当这两种情形时的单侧极限存在且相等时,一元函数 $f(x)$ 在 $x \to x_0$ 的极限存在. 但对于二元函数 $f(x,y)$ 的情形就较为复杂. 动点 $P(x,y)$ 趋近于定点 $P_0(x_0,y_0)$ 的路径千变万化(可包含任意过的 P_0 直线和曲线),只有当 P 沿任何路径趋近于 P_0 时,函数 $f(x,y)$ 取同一极限值,才称二元函数 $f(x,y)$ 在 $P_0(x_0,y_0)$ 处的极限存在.

【问题 2】 求多元复合函数的偏导数应注意什么?

解析 求多元复合函数的偏导数的关键是分析和理顺因变量(即函数)与中间变量、自变量之间的关系,即分析清楚因变量可以通过哪些中间变量与每一个自变量相互关联,可用关系图明确标出. 在求因变量对该自变量的偏导数时,对于关联该自变量的每一个途径的几个步骤的偏导数按乘法原理作乘积,再对于上述乘积按因变量对该自变量的不同途径依加法原理求和,称之为多元链式求导法则.

【问题 3】 在求由方程所确定的隐函数的二阶偏导数时,应注意什么?

解析 二阶偏导数是一阶偏导数的偏导数. 而由方程所确定的隐函数的偏导数仍然是一个可能含有因变量的表达式,在对该表达式再直接求偏导数时,应对该因变量的函数式进行复合求偏导. 直至求出指定自变量的偏导数. 这一点极其重要,也是较为容易疏忽的.

【问题 4】 二元函数的驻点,极值点,最值点与一元函数的情形有何异同?

解析 二元函数的驻点与极值点的关系与一元函数的情形完全类似. 驻点偏导数不存在的点均为可能极值点,偏导数存在的极值点一定是驻

点，但是驻点不一定是极值点.

二元函数的极值点与最值点的关系与一元函数的情形却有所不同. 在一元函数中，若连续函数在某闭区间上只有惟一的极值点，则该点一定是该函数在这一闭区间上的最值点；但对于二元函数不一定成立. 即二元函数在有界闭区域 D 上有惟一的极值点，该点却不一定是该函数在区域 D 上的最值点，该函数的最值有可能同时都在 D 的边界上取得. 对于这一问题应根据实际问题本身的性质来判定.

【问题 5】 方向导数和梯度对于研究函数有何意义？

解析　二元函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 处的方向导数 $\frac{\partial f}{\partial l}$ 刻画了函数在这点当自变量沿着射线 l 变化时的变化率，梯度 $\mathrm{grad}z$ 的方向则是函数在点 (x,y) 处方向导数最大的射线方向. 因此沿梯度方向也是函数值增加最快的方向，所以梯度对寻找函数的最大值很有帮助.

典型例题分析

求二元函数定义域

多元函数的定义域的求法与一元函数的定义域的求法完全相同. 即先考虑三种情况：分母不为零；偶次根式的被开方式不小于零；要使对数函数，某些三角函数与反三角函数有意义. 再建立不等式组，求出其公共部分就是多元函数的定义域. 如果多元函数是几个函数的代数和或几个函数的乘积，其定义域就是这些函数定义域的公共部分.

【例 1】 求下列函数的定义域并画出定义域的图形.

(1) $z=\ln(y-x^2)+\sqrt{1-y-x^2}$　(2) $z=\dfrac{\sqrt{4x-y^2}}{\sqrt{x-\sqrt{y}}}$

解　(1)要使函数有意义，需满足条件

$$\begin{cases}y-x^2>0\\1-y-x^2\geqslant 0\end{cases}\text{即 } x^2<y\leqslant 1-x^2.$$

因此定义域为 $y=x^2$ 与 $y=1-x^2$ 围成的部分，包括曲线 $y=1-x^2$，如图 8-1 所示.

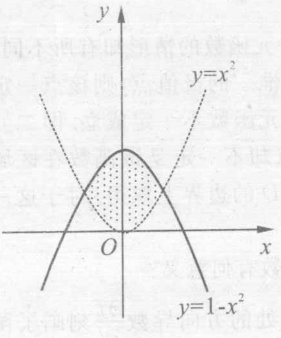


图 8－1

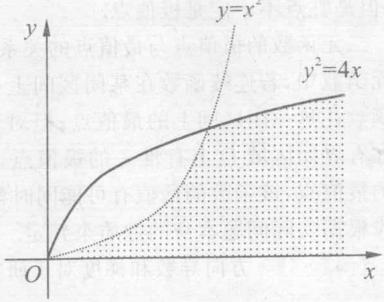


图 8－2

(2)要使函数有意义，需满足条件

$$\begin{cases} 4x-y^2\geqslant 0 \\ x-\sqrt{y}>0 \\ y\geqslant 0 \end{cases}，即\begin{cases} y^2\leqslant 4x \\ 0\leqslant y<x^2 \end{cases}.$$

定义域如图 8－2 阴影部分所示.

求二元函数的极限

二元函数的极限比一元函数的极限要复杂得多，计算也更困难. 通常从以下三个方面考虑：

(1)设法利用变换化为一元函数的极限；

(2)掌握绝对值不等式的放缩技巧，使用夹逼准则；

(3)通过观察，若能大致估计所求极限不存在，可选择两条不同路径，求出不同的极限值，借以证明原式极限不存在.

【例 2】 求下列极限.

(1)$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{2x^3-3y^4}{3x^2-2xy+y^2}$ (2)$\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}\dfrac{x+y}{x^2-xy+y^2}$

(3)$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^3y+xy^4+x^2y}{x+y}$

解 (1)由于

$$0\leqslant\left|\frac{2x^3-3y^4}{3x^2-2xy+y^2}\right|\leqslant\frac{2|x|^3}{2x^2+(x-y)^2}+\frac{3|y|^4}{3(x-\frac{1}{3}y)^2+\frac{2}{3}y^2}$$