

新编教与学

首都师范大学出版社



胡炯涛 主编

高中数学

G633.6
136

新 编 教 与 学

高 中 数 学

胡炯涛 主编

首都师范大学出版社

(京)新208号

图书在版编目(CIP)数据

新编教与学：高中数学／胡炯涛主编．—北京：首都师范大学出版社，1994.8

ISBN 7-81039-412-6

I.新… II.胡… III.数学-高中-教学参考书 IV.G
633.6

中国版本图书馆CIP数据核字(94)第07455号

首都师范大学出版社

(北京西三环北路105号 邮政编码100037)

北京昌平兴华印刷厂印刷 全国新华书店经销

1994年8月第1版 1995年3月第2次印刷

开本：787×1092 1/32 印张：14.875

字数：300千 印数：21,001—42,000册

定价：9.50元

《新编教与学》出版说明

《教与学》丛书自1988年2月出版至于今，历时六载长销不衰，已稳定地成为部分地区初三、高三学生复习备考的必备用书。

为适应教学改革与升学考试的重大变化，作者与出版者，在充分吸取读者意见、教学与改革经验的基础上，展望教育改革与考试改革的发展趋向后，重新编制了写作大纲，重新组织了《新编教与学》丛书。

《新编教与学》丛书基本保持了原丛书的主体结构、知识框架，强化了能力培养与训练，更新了习题与模拟试题的内容。

我们希望使用本书的老师、家长、学生和我们联系，给我们提出批评、建议、指教和希望，使我们的工作更上一层楼，为教育工作更多地做些贡献。

编 委 会

主 编 王绍宗

副 主 编 华跃义 胡炯涛

编 委 王绍宗 王剑青 齐平昌 华跃义

岳 斌 胡炯涛 金 新 姜佩英

钱吉良

策划编辑 赵永明

目 录

第一章 函数	(1)
[基础知识].....	(1)
一、集合的概念.....	(1)
二、函数的概念.....	(2)
三、一次函数与二次函数.....	(4)
四、函数的性质.....	(5)
五、反函数.....	(7)
[能力训练].....	(8)
一、与函数有关的计算.....	(8)
二、函数的图象及其作法.....	(14)
三、含参数方程与不等式的讨论.....	(19)
[题型练习].....	(26)
习题一(A).....	(26)
习题一(B).....	(29)
第二章 三角函数	(33)
[基础知识].....	(33)
一、任意角的三角函数.....	(33)
二、三角函数的同解性.....	(35)
三、三角函数的图象与性质.....	(36)
四、半角公式中的符号.....	(42)
[能力训练].....	(44)
一、单位圆与函数线.....	(44)

二、三角函数求值	(47)
三、三角恒等式证明	(53)
四、三角函数的最大值与最小值	(64)
[题型练习]	(68)
习题二(A)	(68)
习题二(B)	(71)
第三章 反三角函数与简单三角方程	(74)
[基础知识]	(74)
一、反三角函数的概念	(74)
二、反三角函数的图象与性质	(75)
三、最简三角方程与解三角形	(81)
[能力训练]	(83)
一、反三角函数的求值与证明	(83)
二、简单三角方程的几种解法	(87)
三、三角方程解的检验与解的同一性	(91)
四、三角不等式	(93)
五、三角形内的三角函数关系	(96)
六、三角综合题	(99)
[题型练习]	(108)
习题三(A)	(108)
习题三(B)	(111)
第四章 数列与极限	(115)
[基础知识]	(115)
一、数列的通项公式	(115)
二、等差数列的通项公式与求和公式	(117)
三、等比数列的通项公式与求和公式	(118)
四、等差数列与等比数列的判定	(120)

五、无穷数列的极限	(123)
[能力训练]	(125)
一、特殊数列求和	(125)
二、基本数列极限的求法与应用	(128)
三、递推数列	(136)
[题型练习]	(146)
习题四(A)	(146)
习题四(B)	(148)
第五章 不等式	(152)
[基础知识]	(152)
一、不等式的性质	(152)
二、不等式的同解定理	(156)
三、平均不等式与最大最小值	(157)
[能力训练]	(158)
一、不等式的解法	(158)
二、不等式的证明	(163)
三、数列不等式	(174)
[题型练习]	(179)
习题五(A)	(179)
习题五(B)	(182)
第六章 复数	(185)
[基础知识]	(185)
一、复数的代数性质与运算	(185)
二、复向量及其几何意义	(190)
三、复数的三角形式	(192)
[能力训练]	(195)
一、复数中特殊的代数运算	(195)

二、复数中特殊的三角运算	(206)
三、复数的几何意义及其应用	(210)
【题型练习】	(214)
习题六(A)	(214)
习题六(B)	(217)
第七章 排列、组合、二项式定理	(221)
【基础知识】	(221)
一、加法原理与乘法原理	(221)
二、排列与组合的基本概念	(223)
三、二项式定理的概念与性质	(223)
四、排列、组合的基本计算方法	(226)
【能力训练】	(229)
一、排列与组合的应用题	(229)
二、二项展开式的通项	(237)
三、二项展开式的系数	(241)
四、二项式定理的应用	(243)
【题型练习】	(246)
习题七(A)	(246)
习题七(B)	(249)
第八章 直线和平面	(252)
【基础知识】	(252)
一、空间图形及其位置关系的知识要点	(252)
二、点、线与面的共属问题	(254)
三、异面直线	(257)
四、平行、垂直的性质与判定	(262)
【能力训练】	(267)
一、三垂线定理及其应用	(267)

二、平行与垂直	(273)
三、距离与角	(279)
四、二面角与折迭形	(285)
[题型练习]	(293)
习题八(A)	(293)
习题八(B)	(297)
第九章 多面体和旋转体	(301)
[基础知识]	(301)
一、基本概念	(301)
二、几何体的截面	(304)
[能力训练]	(306)
一、几何体的一般计算与证明	(306)
二、多面体与旋转体的体积	(312)
三、立体几何综合题	(318)
[题型练习]	(321)
习题九(A)	(321)
习题九(B)	(321)
第十章 直线和圆	(328)
[基础知识]	(328)
一、有向线段与定比分点	(328)
二、直线的斜率与截距	(331)
三、直线方程及其求法	(333)
四、两直线的位置关系	(336)
[能力训练]	(342)
一、过两曲线交点的曲线系方程	(342)
[题型练习]	(343)
习题十(A)	(343)

习题十(B).....	(346)
第十一章 圆锥曲线	(350)
[基础知识].....	(350)
一、圆锥曲线方程的求法.....	(350)
二、渐近线、准线、离心率和焦半径.....	(353)
[能力训练].....	(359)
一、用圆锥曲线的定义解题.....	(359)
二、用平移化简方程.....	(364)
[题型练习].....	(368)
习题十一(A).....	(368)
习题十一(B).....	(371)
第十二章 参数方程、极坐标	(375)
[基础知识].....	(375)
一、参数方程与含参量的方程.....	(375)
二、圆锥曲线的参数方程.....	(379)
三、曲线的极坐标方程.....	(381)
[能力训练].....	(383)
一、如何求轨迹的方程?	(383)
二、如何选择参数?	(389)
三、轨迹的极坐标方程与统一方程.....	(394)
四、几种常用的解题方法.....	(400)
[题型练习].....	(411)
习题十二(A).....	(411)
习题十二(B).....	(414)
综合题(一)	(418)
综合题(二)	(422)
综合题(三)	(425)

综合题 (四)		(429)
	* *	
		*
习题答案部分		(433)

第一章 函 数

【基础知识】

一、集合的概念

把某些能确切指定的对象看作一个整体，这个整体叫做一个集合。

集合具有无序性、互异性与确定性。

若 A 是 B 的子集，且 B 中至少有一个元素不属于 A ，则称 A 是 B 的真子集，记作 $A \subset B$ 。空集是任何非空集合的真子集。

不要把数 0 或集合 $\{0\}$ 与空集相混淆，不要把空集错示为 $\{\text{空集}\}$ 或 $\{\emptyset\}$ 。

例1. 已知数集 $A = \{a+2, (a+1)^2, a^2+3a+3\}$ ，且 $1 \in A$ ，求实数 a 的值。

解：把集合中三个数分别令其为1，得 $a=0, -1, -2$ ，据互异性排除 $-1, -2$ ， $\therefore a=0$ 。

例2. 下列说法中正确的是：

(A) 任何一个集合 A 必有两个子集。

(B) 任何一个集合 A 必有一个真子集。

(C) A 为任一集合，它与 B 的交集是空集，则 A, B 中至少有一个是空集。

(D) 若集合 A 与 B 的交集是全集，则 A, B 都是全集。

解：若 A 是 $\emptyset$ ，命题就不成立，(A)不真。

若 A 是 $\emptyset$ ，就没有真子集，(B)不真。

若 A 非空， B 非空，它们的交集可以是 $\emptyset$ ，(C)不真。

若 A 、 B 中有一个非全集，则 $A \cap B$ 不可能是全集，所以命题(D)正确。

例3. 若 A 、 B 为非空集合，且 $A \subset B$ ， I 为全集，问 $A \cap \bar{B}$ 是什么集合？

解：由图示易知 $A \cap \bar{B} = \emptyset$ 。

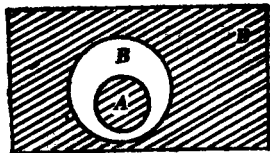


图 1-1

二、函数的概念

设 A 、 B 都是非空的数的集合， f 是从 A 到 B 的一个对应法则，那末 A 到 B 上的映射 $f: A \rightarrow B$ 就叫做 A 到 B 上的函数，记作 $y = f(x)$ ，其中 $x \in A$ ， $y \in B$ 。原象集合 A 叫做函数 $f(x)$ 的定义域，象集合 B 叫做函数 $f(x)$ 的值域。

函数是具有以下两个特点的一种特殊映射 $f: A \rightarrow B$ ：

1. 集合 A 、 B 是非空数集；
2. $f: A \rightarrow B$ 是集合 A 到集合 B 上的映射。

对应“ f ”是联系 x 、 y 的纽带，常可用一个解析式加以表示，也可用其他方式表示（如列表、图示等）。

定义域是 x 的取值范围，解析式相同而定义域不同的函数应看作两个不同的函数。

值域是全体函数值所成的集合。这里研究的函数都是指单值函数。

例1. 若 $f(x) = \sqrt{x}$ ，求 $f(x^2)$ 。

解：这是常函数， $f(x^2) = \sqrt{x^2}$ 。

例2. 以下各组函数中, 表示相同函数的是 () .

(A) $f(x) = \frac{x^2-1}{x+1}$ 与 $\varphi(x) = x-1$.

(B) $f(x) = x$ 与 $\varphi(x) = \sqrt{x^2}$.

(C) $f(x) = x$ 与 $\varphi(x) = \sqrt[3]{x^3}$.

(D) $f(x) = \log_c x^2$ 与 $\varphi(x) = 2 \log_c x$.

解: (A)、(B)、(D)虽能化为相同的解析式, 但因定义域不同, 都属于不同的函数, 仅(C)组属相同的函数组.

例3. 若 $f(\sqrt{x}+1) = x+2\sqrt{x}$, 求 $f(x)$.

解: 运用变量代换, 令 $t = \sqrt{x}+1$, $\sqrt{x} = t-1$,

$$x = (t-1)^2,$$

$$f(t) = (t-1)^2 + 2(t-1) = t^2 - 1,$$

函数表达式与自变量无关, $f(x) = x^2 - 1$.

例4. 求函数 $y = \frac{1}{\sqrt{x+8} - \sqrt{5x+20} + 2}$ 的定义域.

解: 函数的定义域由函数的特征所决定.

对函数 $y = \frac{P(x)}{Q(x)}$, 要求 $Q(x) \neq 0$; 对函数

$y = \sqrt{P(x)}$, 要求 $P(x) \geq 0$ 等等.

求定义域即解不等式组

$$\begin{cases} x+8 \geq 0 \\ 5x+20 \geq 0 \\ \sqrt{x+8} - \sqrt{5x+20} + 2 \neq 0, \end{cases}$$

解得 $-4 \leq x < 1$ 或 $x > 1$.

例5. 已知函数 $f(x)$ 的定义域是 $[0, 1]$, 试求函数 $y = f(a+x) + f(a-x)$ ($0 < a \leq 1$) 的定义域.

解: 定义域是指“ f ”对应下括号内自变量的取值范围,

即解不等式组

$$\begin{cases} 0 \leq a+x \leq 1 \\ 0 \leq a-x \leq 1 \end{cases} \iff \begin{cases} -a \leq x \leq 1-a \\ -1+a \leq x \leq a \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{①} \\ \text{②} \end{matrix}$$

①、②是两个“区间套”，求定义域也就是求两者的公共部分。易知当 $a = \frac{1}{2}$ 时①、②相同，随着 a 的增加，①向左移，②向右移，直至不相交。当 a 减少时，移向相反。

据上述，取 $a = \frac{1}{2}$ 为分界点，划分区间，求交集得定义域：

$$\begin{cases} a=1 \text{ 时, } x=0. \\ \frac{1}{2} \leq a \leq 1 \text{ 时, } x \in [a-1, 1-a] \\ 0 < a < \frac{1}{2} \text{ 时, } x \in [-a, a]. \end{cases}$$

三、一次函数与二次函数

函数 $y=kx+b$ ($k \neq 0$) 称为 x 的一次函数。

函数 $y=ax^2+bx+c$ ($a \neq 0$) 称为 x 的二次函数，它的图象是一条抛物线。图象中起决定性作用的元素是 a 与顶点坐标 $(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a})$ 。顶点坐标决定了图象的位置，而 a 则决定着抛物线的形状 (a 决定了开口方向， $|a|$ 决定了张口的大小)。二次函数与二次方程、二次三项式、二次不等式有密切的联系，有“四个二次”之称。

数形结合在二次函数解题中作用明显。

例1. 已知 $f(x)$ 是一次函数，且 $f[f(x)] = 4x - 1$ ，求 $f(x)$ 的解析式。

解: 可设 $f(x) = ax + b$, 则 $a(ax + b) + b = 4x - 1$,
即 $a^2x + (ab + b) = 4x - 1$, $a^2 = 4$, $ab + b = -1$.

得 $a = 2$, $b = -\frac{1}{3}$ 或 $a = -2$, $b = 1$, 所求函数为

$$f(x) = 2x - \frac{1}{3} \quad \text{或} \quad f(x) = -2x + 1.$$

例2. 二次函数 $f(x)$ 当 $x = 1$ 时取最大值 16, 它的图象在 x 轴上截得的线段长为 8, 求此二次函数.

解: 据最大值可表示成 $f(x) = a(x-1)^2 + 16$, $a < 0$, 其图象关于 $x = 1$ 对称. 又因 x 轴上截得线段长为 8, 由图上易知交点横坐标为 1 ± 4 , 取 $(5, 0)$ 点代入得 $a = -1$, 所求二次函数为 $f(x) = -(x-1)^2 + 16 = -x^2 + 2x + 15$.

亦可据交点横坐标设 $f(x) = a(x-5)(x+3)$, 以 $(1, 16)$ 代入得 $a = -1$, 同样求得 $f(x) = -x^2 + 2x + 15$.

四、函数的性质

偶函数的图象关于 y 轴对称, 奇函数图象关于原点对称, 反之也成立. 奇偶性的判定首先看其定义域是否关于原点对称的区间, 接着再验算 $f(-x)$ 与 $f(x)$ 的关系.

两个奇函数之和构成一个奇函数; 两个偶函数之和构成一个偶函数; 两个奇(偶)函数之积构成一个偶函数; 一个奇函数和一个偶函数之积构成一个奇函数.

函数的单调性必须指明单调区间. 证明函数单调性一般途径是: 任取 $x_1, x_2 \in M$, 且 $x_1 < x_2$, 据 $f(x_1) \vee f(x_2)$ ($\vee$ 表示“大于或小于”)判定单调性.

关于复合函数的增减性有如下结论: 设 $y = f(u)$, $u = g(x)$ 都是单调函数, 则复合函数 $y = f[g(x)]$ 在其定义