高校经典教材同步辅导丛书

配套高教版·哈工大理论力学教研室编

九章丛书

理论力学Ⅱ 第七版

同步辅导及习题全解

主编 刘东星 郭志梅

- 知识点窍
- 逻辑推理
- 习题全解
- 全真考题
- 名师执笔
- 题型归类

新版

中国水利水电出版社

www.waterpub.com.cn

高校经典教材同步辅导丛书

理论力学II（第七版）同步辅导及习题全解

主　编　刘东星　郭志梅

中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

内 容 提 要

本书是为了配合由高等教育出版社出版，由哈尔滨工业大学理论力学教研室编写的《理论力学Ⅱ》（第七版）教材而编写的辅导用书。

对应教材，本书共 6 章，分别介绍分析力学基础、非惯性系中的质点动力学、碰撞、机械振动基础、刚体定点运动、自由刚体运动、刚体运动的合成•陀螺仪近似理论、变质量动力学等内容。每章内容针对教材中的思考题和习题给出详细的解答，旨在帮助读者掌握课程内容的重点、难点，提高分析问题、解决问题的能力。

本书可作为工科高等院校学生学习《理论力学Ⅱ》的辅导教材，也可作为考研人员复习备考的辅导教材，同时可供教师备课命题作为参考资料。

图书在版编目（CIP）数据

理论力学（Ⅱ）（第七版）同步辅导及习题全解 / 刘东星，郭志梅主编. -- 北京 : 中国水利水电出版社, 2010.8
（高校经典教材同步辅导丛书）
ISBN 978-7-5084-7708-4

Ⅰ. ①理… Ⅱ. ①刘… ②郭… Ⅲ. ①理论力学—高等学校—教学参考资料 Ⅳ. ①031

中国版本图书馆CIP数据核字(2010)第138118号

策划编辑：杨庆川　责任编辑：宋俊娥　封面设计：李佳

书　　名	高校经典教材同步辅导丛书 理论力学Ⅱ（第七版）同步辅导及习题全解
作　　者	主　编　刘东星　郭志梅
出版发行	中国水利水电出版社（北京市海淀区玉渊潭南路 1 号 D 座　100038） 网址：www.waterpub.com.cn E-mail：mchannel@263.net（万水） sales@waterpub.com.cn 电话：（010）68367658（营销中心）、82562819（万水）
经　　售	全国各地新华书店和相关出版物销售网点
排　　版	北京万水电子信息有限公司
印　　刷	北京市梦宇印务有限公司
规　　格	170mm×227mm　16 开本　7.75 印张　99 千字
版　　次	2010 年 8 月第 1 版　2010 年 8 月第 1 次印刷
印　　数	0001—5000 册
定　　价	10.00 元

编 委 会

（排名不分先后）

前　　言

《理论力学》是一门理论性很强的技术基础课，是大多数理工类学生的必修课程。很多学生在学习中存在一定困难。不能将课上学习的理论与实际问题联系起来，出现“课上能听懂，作业不会做”的现象。本书集多位资深教授的经验于一体，针对读者的常见困惑，引导学生把理论知识与习题紧密地联系起来，举一反三，既巩固了理论知识，又提高了解题能力。

本书对《理论力学Ⅱ》（哈工大第七版）中所有的思考题和习题给出了详细的解答。本书的主要特点有：

1．知识要点：运用公式、定理及定义来点明知识点。

2．解题分析：阐述习题的解题过程。

3．解题过程：概念清晰，步骤完整，数据准确，附图齐全。

把“知识要点”、“解题分析”、“解题过程”联系起来，做到融会贯通，最后给出习题答案。在解题思路和解题技巧上进行精练分析和引导，巩固所学知识，达到举一反三的效果。

“知识要点”和“解题分析”是本书的精华所在，是由多位著名教授根据学生在解题过程中遇到的问题进行分析而研究出来的一种新型的、拓展思路的解题方法。“知识要点”提纲挈领地抓住了题目的核心知识，让学生清楚地了解出题者的意图；“解题分析”则注重引导学生思维，旨在培养学生科学的思维方法，以掌握答题的思维技巧。在此基础上提供了详细的“解题过程”，使学生熟悉整个答题过程。

由于编者水平有限及编写时间仓促，不妥之处在所难免，希望广大读者不吝批评、指正。

编者

2010 年 6 月

目 录

第一章

分析力学基础

思　考　题

1－1　试分析图1－1所示两个平面机构的自由度数。

【解答】　(a)$3\times4-2\times5-1=1$

(b)$3\times4-2\times5=2$

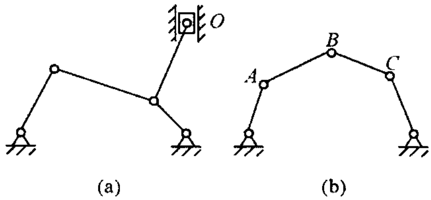


图1－1

1－2　广义力都具有力的量纲吗?广义力与广义坐标有什么联系?

【解答】　广义力不一定具有力的量纲,广义力与其对应的广义坐标的量纲乘积为功的量纲。

1－3　放置在固定半圆柱面上的相同半径的均质半圆柱体和均质半圆柱薄壳,如图1－2所示。试分析哪一个能稳定地保持在图示位置。

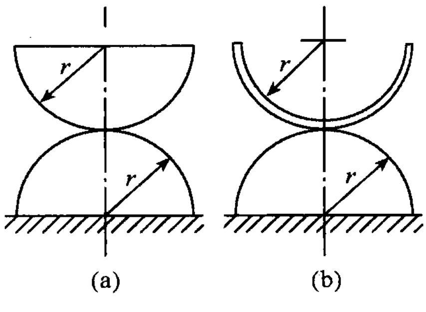


图1－2

【解答】　(1)非稳定平衡,

(2)稳定平衡。

1－4　动力学普遍方程中应包括内力的虚功吗?

【解答】 动力学普遍方程不应计入内力的虚功。

1－5 如研究系统中有摩擦力，如何应用动力学普遍方程或拉格朗日方程？

【解答】 把摩擦力看成主动力。

1－6 试用拉格朗日方程推导刚体平面运动的运动微分方程。

【解答】 平面运动刚体有三个自由度，取其质心坐标 x_C，y_C 和转角 θ 的广义坐标。刚体的动能为

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}_C^2 + \dot{y}_C^2) + \frac{1}{2}J_C\dot{\theta}^2$$

将刚体所受外力向质心简化，即为三个广义力

$$Q_x = \sum F_x, Q_y = \sum F_y, Q_z = \sum M_C(\boldsymbol{F})$$

代入拉格朗日方程，有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_C} = Q_x$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\partial T}{\partial \dot{y}_C} = Q_y$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = Q_z$$

即 $m\ddot{x}_C = \sum F_x$，$m\ddot{y}_C = \sum F_y$，$J_C\ddot{\theta} = \sum M_C(\boldsymbol{F})$

此即为刚体平面运动微分方程。

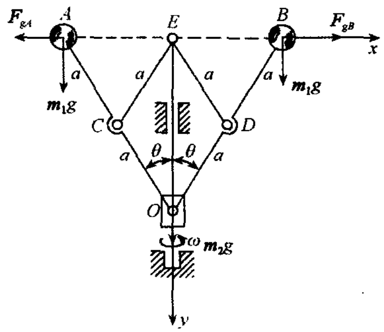
1－7 推导第二类拉格朗日方程的过程中，哪一步用到了完整约束的条件？

【解答】 完整约束系统中，约束条件不含速度，任一点位置 $\boldsymbol{r}_i$ 均可以用广义坐标 q_i 表示为 $\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{r}_i(q_1, q_2 \cdots t)$

则 $$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_i}{\mathrm{d}t} = \sum\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial t}$$

习　题

1－1　图示离心调速器以角速度 ω 绕铅直轴转动。每个球质量为 m_1，套管 O 质量为 m_2，杆重忽略不计。$OC = EC = AC = OD = ED = BD = a$。求稳定旋转时，两臂 OA 和 OB 与铅直轴的夹角 θ。



题 1－1 图

【知识要点】　坐标变分及拉格朗日方程的运用。

【解题分析】　先判断系统约束为理想约束，找到主动力和惯性力，再分别找出各作用点的坐标及其变分，代入动力学普遍方程。

【解答】　如图建立坐标系，在此坐标系下 A,B,O 点的坐标为

$x_A = -2a\sin\theta$　　$x_B = 2a\sin\theta$　　$x_O = 0$

$y_A = 0$　　$y_B = 0$　　$y_O = 2a\cos\theta$

相应的变分为

$\delta x_A = -2a\cos\theta \cdot \delta\theta$　　$\delta x_B = 2a\cos\theta \cdot \delta\theta$　　$\delta x_O = 0$

$\delta y_A = 0$　　$\delta y_B = 0$　　$\delta y_O = -2a\sin\theta\delta\theta$

理想约束体系的主动力和惯性力分别为

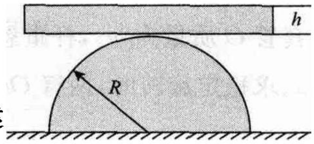
$F_{gA} = F_{gB} = m_1\omega^2 \cdot 2a\sin\theta$

代入拉格朗日方程可得

$$-F_{gA}\cdot\delta x_A+F_{gB}\cdot\delta x_B+m_2 g\delta y_O=0$$

由此可得　$\cos\theta=\dfrac{m_2 g}{4am_1\omega^2}$

1－2　一质量为 m 的均质板置于圆柱体顶面上，两者之间无相对滑动。试证明：当 $h>2R$ 时，系统的平衡是不稳定的。



题 1－2 图

【知识要点】　系统平衡状态的判定。

【解题分析】　以木板的倾角 θ 为广义坐标建立函数。

【解答】　如图，令木板倾斜角度为 θ，

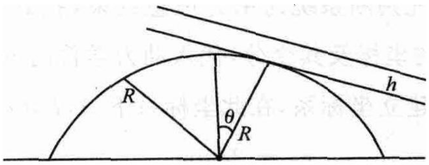
则系统在以 θ 为广义坐标下的势能方程为

$$V=mg\cdot R\cdot\cos\theta+mg\cdot\frac{h}{2}(1-\cos\theta)$$

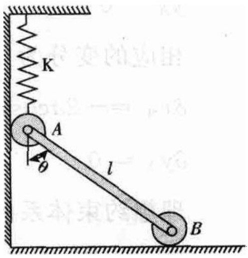
$$\frac{d^2V}{d\theta^2}=mg(R\cdot\cos\theta-\frac{h}{2}\cdot\cos\theta)$$

令 $\dfrac{d^2V}{d\theta^2}<0$　　　即得 $h>2R$

得证。



1－3　弹簧连杆机构如图所示，AB 为均质杆，质量 $m=10\text{kg}$，长 $l=0.6\text{m}$，其余构件的质量不计。不计摩擦，弹簧 K 的刚度系数 $k=200\text{N/m}$，$\theta=0$ 时弹簧为原长。试求该系统的平衡位置，并分析其稳定性。



题 1－3 图

【知识要点】　系统平衡状态的判定。

【解题分析】　以 θ 角为广义坐标，写出势能的方

程，求导判断。

【解答】 如图，整个系统的势能为

$$V=\frac{1}{2}kl^2(1-\cos\theta)^2+\frac{1}{2}l\cdot my\cdot\cos\theta$$

令 $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\theta}=0$　　解得 $\theta=0°$ 或 $\theta=53.8°$

$$\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}\theta^2}=kl^2[\cos\theta(1-\cos\theta)+\sin^2\theta]-\frac{1}{2}mg\cdot l\cdot\cos\theta$$

将 $\theta=0$，$\theta=53.8°$ 代入

有：当 $\theta=0$ 时　不稳定平衡

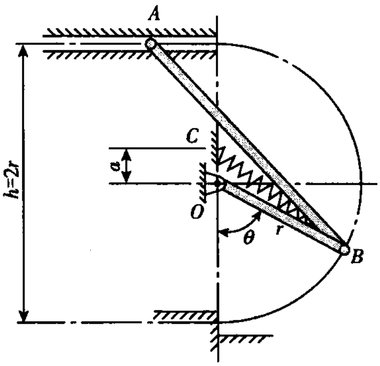
当 $\theta=53.8°$ 时　稳定平衡

1－4　图示为车库大门结构原理图。高为 h 的均质库门 AB 重量为 P，其上端 A 可沿库顶水平槽滑动，下端 B 与无重杆 OB 铰接，并由弹簧 CB 拉紧，$OB=r$，弹簧原长为 $r-a$。不计各处摩擦，问弹簧的刚度系数 k 为多大才可使库门在关闭位置处($\theta=0$)不因 B 端有微小位移干扰而自动弹起。

【知识要点】 系统平衡状态的判定。

【解题分析】 以 θ 为广义坐标建立方程，求导判断。

【解答】 以 θ 为广义坐标，则系统的势能为：



题 1－4 图

$$V=\frac{1}{2}k\cdot\Delta l^2+mgh$$

由几何关系得：

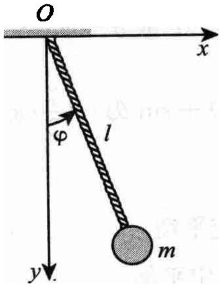
$$V=\frac{1}{2}k[\sqrt{(r\cos\theta+a)^2+(r\cdot\sin\theta)^2}-(r-a)]^2+\frac{1}{2}mg\cdot[h+r(1-\cos\theta)]$$

令　$\left.\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}\theta^2}\right|_{\theta=0}\geqslant0$

可解得：$4a^2k\leqslant P(r+a)$

$$k \leqslant \frac{P(r+a)}{4a^2}$$

1－5 应用拉格朗日方程推导单摆的运动微分方程。分别以下列参数为广义坐标:(1) 转角 φ;(2) 水平坐标 x;(3) 铅直坐标 y。



题 1－5 图

【知识要点】 拉格朗日方程的运用。

【解题分析】 本题分单自由度保守系统,选取最低位置为零势能位置,分别以 φ,x,y 为坐标,写出拉格朗日方程,即可得到单摆的运动微分方程。

【解答】 (1) 以 φ 为广义坐标,则系统

$$T = \frac{1}{2}ml^2 \cdot \dot{\varphi}^2$$

$$V = mgl(1-\cos\varphi)$$

$$L = T - V$$

代入拉格朗日方程 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial \varphi} = 0$

得运动微分方程 $l\ddot{\varphi} + g\sin\varphi = 0$

(2) 以 x 为广义坐标,约束方程

$$x^2 + y^2 = l^2$$

对上式时间求导 $2x \cdot \dot{x} + 2y \cdot \dot{y} = 0$,即 $\dot{y} = \dfrac{x}{y} \cdot \dot{x}$

则　$T=\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2)=\frac{1}{2}ml^2\cdot\frac{\dot{x}^2}{l^2-x^2}$

$V=mg(l-y)=mg(l-\sqrt{l^2-x^2})$

将　$L=T-V$ 代入拉格朗日方程得

$l^2[(l^2-x^2)\ddot{x}+x\dot{x}^2]+gx(l^2-x^2)^{\frac{3}{2}}=0$

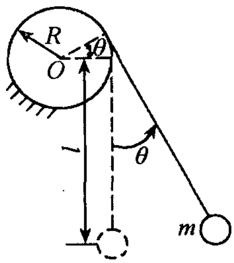
(3) 以 y 为广义坐标，同样有约束方程　$x^2+y^2=l^2$

有　$T=\frac{1}{2}ml^2\cdot\frac{\dot{y}^2}{l^2-y^2}, V=mg(l-y)$

将　$L=T-V$ 代入拉格朗日方程得

$l^2[(l^2-y^2)\cdot\ddot{y}+y\cdot\dot{y}^2]-g(l^2-y^2)^2=0$

1－6　质量为 m 的质点悬在一线上，线的另一端绕在一半径为 R 的固定圆柱体上，如图所示。设在平衡位置时，线的下垂部分长度为 l，且不计线的质量。求此摆的运动微分方程。



题 1－6 图

【知识要点】　拉格朗日方程求运动微分方程。

【解题分析】　本题为单自由度保守体系，选 θ 为广义坐标，列出系统的动能和势能，代入拉氏方程，可得到微分方程。

【解答】　选取 $\theta=0$ 为系统的零势能位置。θ 为广义坐标，

$T=\frac{1}{2}m(l+R\theta)^2\dot{\theta}^2$

$V=mg[(l+R\sin\theta)-(l+R\theta)\cos\theta]$

将拉格朗日函数

$L=T-V$

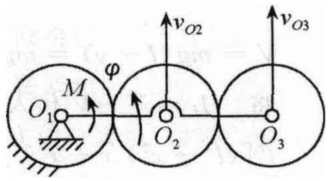
代入拉格朗日方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right)-\frac{\partial L}{\partial\theta}=0$$

得运动微分方程

$(l+R\theta)\ddot{\theta}+R\dot{\theta}^2+g\sin\theta=0$

1－7　在图示行星齿轮机构中，以 O_1 为轴的不动轮，其半径为 r。全机构在同一水平面内。设两动轮为均质圆盘，半径为 r 质量为 m。如作用在曲柄 O_1O_2 上的力偶之矩为 M，不计曲柄的质量，求曲柄的角加速度。



题 1－7 图

【知识要点】　非保守系统的拉格朗日方程。

【解题分析】　本题为单自由度非保守系统，选杆的转角 φ 为广义坐标，分别列出每个轮的角速度表达式，写出动能，代入拉氏方程。

【解答】　如图，系统的拉格朗日方程为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}}\right)-\frac{\partial T}{\partial\varphi}=Q_\varphi$$

其中

$$T=\frac{1}{2}mv_{O_2}^2+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}mr^2\cdot\omega_2^2+\frac{1}{2}mv_{O_3}^2=11m\omega^2r^2 \tag{1}$$

广义力　$Q_\varphi=M$

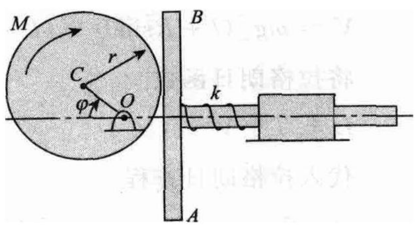
轮子的角速度和速度为

$$\omega=\dot{\varphi}^2, v_{O_2}=\omega\cdot 2r, v_{O_3}=\omega\cdot 4r, \omega_2=2\omega, \omega_3=0$$

代入(1)式，得

$$\alpha=\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=\frac{M}{22mr^2}$$

1－8　图示机构，偏心轮是均质圆盘，其半径为 r，质量为 m，偏心距 $OC=\frac{r}{2}$。在外力偶 M 作用下圆盘绕轴 O 转动。刚度系数为 k 的弹簧压着托板 AB，使它保持与偏心轮接触。当角 φ 为零时，弹簧未变形。设托板及其导杆的总质量也是 m，不计摩擦，求圆盘转动的微分方



题 1－8 图

程。又，当 $\varphi = 90°$ 时，如 $M = \frac{9}{4}kr^2$，这时托板的加速度为多大？

【知识要点】 拉格朗日方程。

【解题分析】 以弹簧原长位置为零势能位置，分别列出系统动能、势能和拉氏函数。代入拉氏方程即得微分方程。

【解答】 以弹簧形变量 x 和转过角度 φ 为广义坐标，其动能与势能分别为

$$T = \frac{1}{2}JW^2 + \frac{1}{2}mV^2 = M \cdot \varphi + \frac{1}{2}m\left(\frac{1}{2}r\sqrt{\frac{2M\varphi}{J}} \cdot \sin\varphi\right)^2$$

$$V = mg \cdot \frac{r}{2} \cdot \sin\varphi + \frac{1}{2}k \cdot x^2 = mg \cdot \frac{r}{2} \cdot \sin\varphi + \frac{1}{2}k\left[\frac{r}{2}(1-\cos\varphi)\right]^2$$

把 $L = T - V$ 代入拉氏方程 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \varphi}\right) - \frac{\partial L}{2\varphi} = 0$

得运动微分方程 $2mr^2(3 + \sin2\varphi) \cdot \ddot{\varphi} + mr^2\dot{\varphi}^2 \cdot \sin2\varphi + 2kr^2(1 - \cos\varphi) \cdot \sin\varphi + 4mg \cdot r \cdot \cos\varphi = 8M$

托板加速度 $a = r \cdot \alpha = r \cdot \ddot{\varphi}$

当 $\varphi = 90°$ 时 $\ddot{\varphi} = \frac{k}{m}$ 　$a = \frac{k \cdot r}{m}$

1－9 已知图示曲线为旋轮线，其方程为

$x = R(\theta - \sin\theta), y = R(1 - \cos\theta)$

一小环 M 在重力作用下沿该光滑曲线运动，求小环的运动微分方程。

【知识要点】 拉格朗日方程求运动微分方程。

【解题分析】 本题为单自由度保守系统，选 θ 为广义坐标，分别给出动能和势能的表达式，写出拉格朗日方程，得到小环的运动和微分方程。

【解答】 选取 $\theta = 0$ 时为零势能位置，则系统

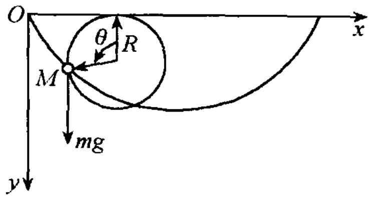
动能

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = mR^2\dot{\theta}^2(1 - \cos\theta)$$

势能 $T = -mgy = -mgR(1 - \cos\theta)$

将 $L = T - V$ 代入拉氏方程即得到小环的运动微分方程，

$$(1-\cos\theta)\cdot\ddot{\theta}+\frac{1}{2}\sin\theta\cdot\dot{\theta}^2-\frac{g}{2R}\cdot\sin\theta=0$$



题 1－9 图

1－10　均质杆 AB 长为 l、质量为 m，借助其端 A 销子沿斜面滑下，斜面升角为 θ，不计销子质量和摩擦，求杆的运动微分方程。又设杆当 $\varphi=0$ 时由静止开始运动，求开始运动时斜面受到的压力。

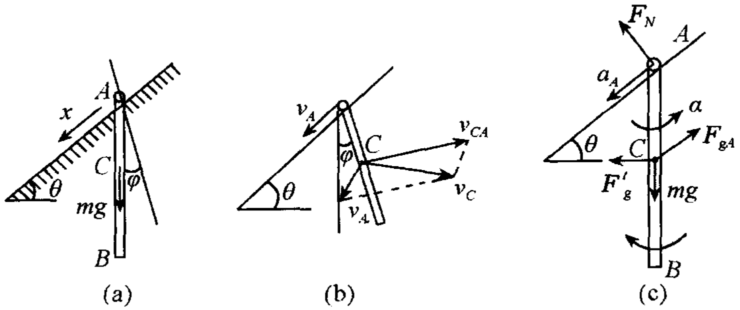
【知识要点】　拉格朗日方程的运用。

【解题分析】　本题属两个自由度的系统，分别列出系统动能表达式，代入拉格朗日方程，求解；利用加速度分析，求法向反力。

【解答】　选取 x 和 φ 为广义坐标，如图(a)，则广义力和动能分别为

$$Q_x=mg\sin\theta,Q_\varphi=-mg\,\frac{l}{2}\cdot\sin\varphi$$

$$T=\frac{1}{2}mv_C^2+\frac{1}{2}J_C\,\dot{\varphi}^2$$



题 1－10 图

如图(b)有　$\boldsymbol{v}_C=\boldsymbol{v}_A+\boldsymbol{v}_{CA}$，$J_C=\dfrac{1}{12}ml^2$

可得动能

$$T=\frac{1}{2}m\left[\frac{1}{4}l^2\,\dot{\varphi}^2+\dot{x}^2-l\,\dot{\varphi}\,\dot{x}\cos(\theta-\varphi)\right]+\frac{1}{24}ml^2\,\dot{\varphi}^2$$

代入拉格朗日方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_i}=Q_i \quad i=x,\varphi$$

得　$2\ddot{x}-l\cos(\theta-\varphi)\cdot\ddot{\varphi}-l\sin(\theta-\varphi)\dot{\varphi}^2=2g\sin\theta$　(1)

$3\cos(\theta-\varphi)\ddot{x}-2l\ddot{\varphi}-3g\sin\varphi=0$　(2)

当 $t=0$ 时，$\varphi=0$，由(1)(2)得

$$\ddot{x}=\frac{4g\sin\theta}{1+3\sin^2\theta},\ddot{\varphi}=\frac{3g\sin\theta}{l(1+3\sin^2\theta)}$$

由动静法求法向反力，如图(c)

$$F_{gA}=ma_A=m\frac{4g\sin\theta}{1+3\sin^2\theta}$$

$$F_g^t=ma_{CA}^t=m\alpha\frac{l}{2}=m\frac{3g\sin2\theta}{2(1+3\sin^2\theta)}$$

$$M_g=J_C\alpha=\frac{mgl\sin2\theta}{4(1+3\sin^2\theta)}$$

列平衡方程

$$\sum M_C=0:F_N\cdot\sin\theta\frac{l}{2}-M_g=0$$

解得　$F_N=\dfrac{mg\cos\theta}{1+3\sin^2\theta}$

1－11　车厢的振动可以简化为支承于两个弹簧上的物体在铅垂面内的振动，如图所示。设支承于弹簧上的车厢质量为 m，相对于质心 C 的转动惯量为 $m\rho^2$，两弹簧的刚度系数分别为 k_1 和 k_2，质心距前后两轮轴的距离分别为 l_1 和 l_2。试列出车厢振动的微分方程。

【知识要点】　弹性系统的拉格朗日方程。

【解题分析】　选取广义坐标 z、φ，列出广义动能和广义力，代入拉氏方程即得微分方程。