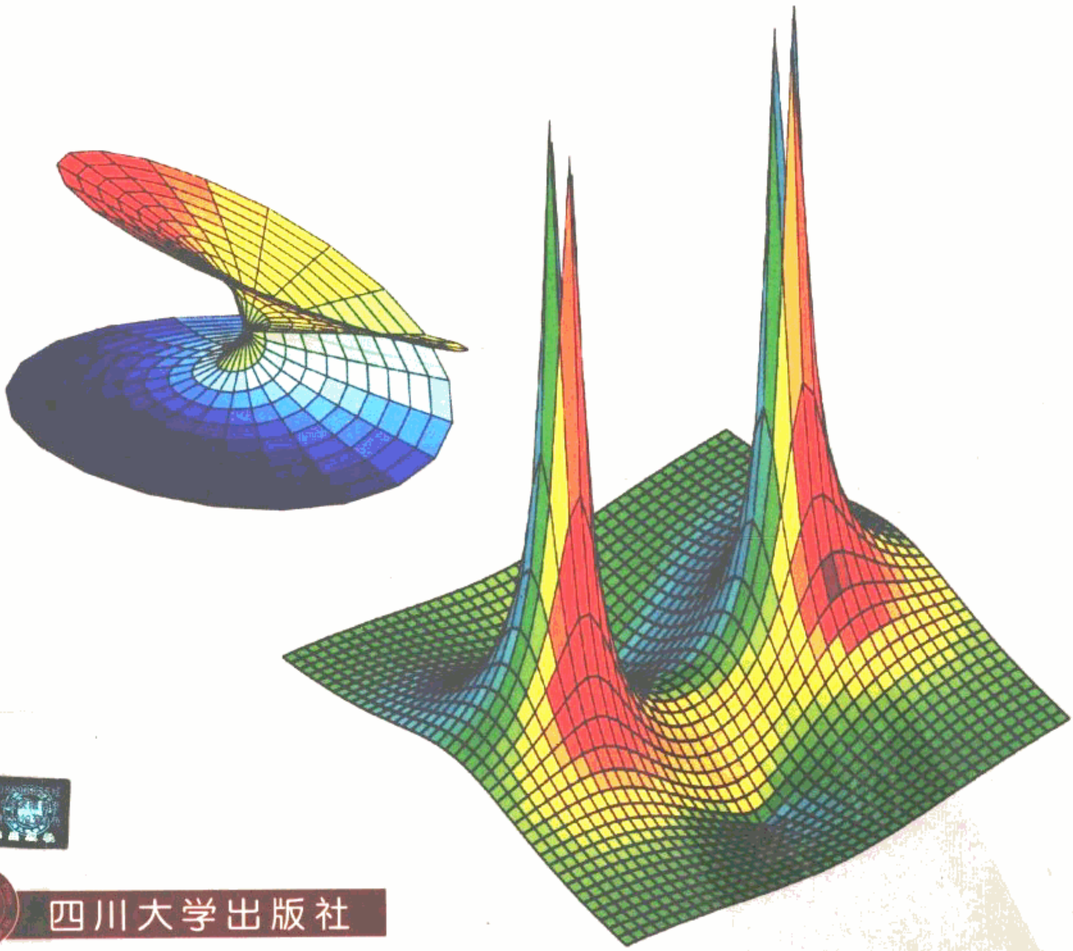
Fundamentals of Signals and Systems

宁元中 编著

确定信号与线性系统分析基础



四川大学出版社

序　言

信号与系统课程是国内外电气工程与计算机科学类各专业本科教育的主要技术基础课程之一。这本《确定信号与线性系统分析基础》是依照《四川大学电气信息学院本科教学大纲》而编写的信号与系统课程的导论。本书所讨论的主要内容：描述确定信号与线性时不变系统的基本数学方法和分析确定信号通过线性时不变系统的基本数学方法。该书适合作为信号与系统课程一学期的基本教材。

近年来，由于计算机技术与数字技术的迅速发展，信号与系统的基础理论和基本方法的应用，已经由传统的通信、测量和控制工程等领域，迅速扩大到如电力系统、电机与电器、电力电子、生物医学、经济学与社会科学等需要对信号与系统进行定性或定量分析的领域。由于信号与系统这一学科的内容极为丰富，与这些内容有关的技术又在很多科学和技术领域起着愈来愈重要的作用，因而信号与系统课程涵盖的范围一直都在扩大，在教学体系和教学内容上也出现了各不相同的安排和选择。本书作为信号与系统课程的导论，所强调的是从事任何信号处理和系统分析应必备的基础理论知识：信号与系统的基本概念、连续信号与连续系统的时域分析、连续系统的拉普拉斯变换分析、连续信号与连续系统的傅里叶分析、z 变换及离散系统的 z 变换分析、离散和连续系统的状态方程等。通过以上内容的学习将为后续课程：自动控制原理、数字信号处理、通信系统原理等奠定良好的基础。使用本书时，学生应具备微积分学和求解微分方程方面的基础知识，有进行复数运算和多项式运算的能力。电路理论、电子电路、电工测量技术的理论与实践，这些电气工程知识与计算机科学类基础知识的储备，也有助于从物理意义上深入理解本书的内容。

本书中采用数据可视化数学软件绘制了大量的插图，这些可视化数据能使信号与系统中所涉及的抽象的数学概念形象化，从而便于为学生所理解和掌握。作者也希望借此能引导读者，在学习基础理论的同时，逐步掌握使用数学软件的基本技能，尽可能地在本课程的学习过程中，使用相关软件完成本书各章所附习题。为配合四川大学电气信息学院信号与系统课程的教学，作者还编撰了本书习题的详尽解答供选用。

本书在编写过程中，承蒙四川大学电气信息学院的大力支持和鼓励，在出版过程中又得到四川大学出版社的关心和帮助，在此一并表示感谢。本书编写与出版受四川大学电气信息学院重点课程建设基金资助。

由于编著者水平有限，书中缺点错误在所难免，欢迎批评指正。

宁元中

2001 年 10 月于四川大学电气信息学院

目 录

第 1 章 信号与系统的基本概念 …… (1)
1.1 信号的基本概念 …… (1)
1.1.1 信号的分类 …… (2)
1.1.2 连续时间信号的运算 …… (3)
1.1.3 离散信号的运算 …… (5)
1.2 基本连续时间信号 …… (6)
1.2.1 单位冲激函数 …… (6)
1.2.2 复指数函数 …… (10)
1.3 连续时间信号的分解 …… (11)
1.3.1 信号的奇分量和偶分量 …… (11)
1.3.2 信号的虚分量和实分量 …… (12)
1.3.3 信号的阶跃函数分量 …… (12)
1.3.4 信号的矩形脉冲分量 …… (13)
1.4 基本离散信号 …… (13)
1.4.1 单位阶跃序列 …… (14)
1.4.2 单位样值序列 …… (14)
1.4.3 复指数序列 …… (15)
1.5 系统的基本概念 …… (17)
1.5.1 系统的分类 …… (18)
1.5.2 线性时不变系统的性质 …… (18)
1.6 线性时不变系统的输入—输出方程 …… (20)
1.6.1 连续时间系统的输入—输出方程 …… (21)
1.6.2 离散系统的输入—输出方程 …… (23)
习 题 一 …… (26)
第 2 章 连续系统的时域分析 …… (29)
2.1 常系数线性常微分方程的解 …… (29)
2.2 连续系统的零输入响应和零状态响应 …… (31)
2.3 连续系统的单位冲激响应 …… (35)
2.4 卷积积分求零状态响应 …… (38)
2.4.1 卷积积分的定义 …… (38)
2.4.2 卷积积分的性质 …… (39)
2.4.3 计算卷积积分的图示解析法 …… (42)
2.4.4 用卷积积分求系统的零状态响应 …… (44)
习 题 二 …… (47)

第 3 章 离散系统的时域分析 …… (49)
3.1 常系数线性差分方程的解 …… (50)
3.2 离散系统的零输入响应和零状态响应 …… (52)
3.2.1 离散系统的零输入响应 …… (52)
3.2.2 离散系统的零状态响应 …… (54)
3.3 离散信号的卷积和及其运算 …… (56)
3.3.1 离散信号的卷积和 …… (56)
3.3.2 离散信号卷积和的运算 …… (56)
3.4 单位样值序列响应与卷积和求零状态响应 …… (60)
3.4.1 离散系统的单位样值序列响应 …… (60)
3.4.2 用卷积和求系统的零状态响应 …… (62)
习 题 三 …… (64)
第 4 章 连续系统的拉普拉斯变换分析 …… (66)
4.1 拉普拉斯变换的定义和性质 …… (66)
4.1.1 拉普拉斯变换的定义 …… (66)
4.1.2 拉普拉斯变换的性质 …… (70)
4.2 简单信号的拉普拉斯变换 …… (71)
4.2.1 单边指数信号$e^{\alpha t}u(t)$(α 为实数)的拉氏变换 …… (71)
4.2.2 单位冲激信号$\delta(t)$的拉氏变换 …… (73)
4.3 单边拉普拉斯变换及其性质 …… (75)
4.3.1 单边拉氏变换的定义 …… (75)
4.3.2 单边拉氏变换的性质 …… (76)
4.4 部分分式展开法求拉氏反变换 …… (80)
4.4.1 单实极点 …… (81)
4.4.2 重极点 …… (82)
4.4.3 复极点 …… (83)
4.5 系统的拉普拉斯变换模型 …… (84)
4.6 连续系统的正弦稳态响应 …… (87)
习 题 四 …… (93)
第 5 章 连续信号与系统的傅里叶分析 …… (97)
5.1 傅里叶变换的定义和性质 …… (97)
5.1.1 傅里叶变换的定义 …… (97)
5.1.2 傅里叶变换的性质 …… (98)
5.2 基本信号的傅里叶变换 …… (110)
5.2.1 单位冲激信号$\delta(t)$的傅里叶变换 …… (110)
5.2.2 单位直流信号的傅里叶变换 …… (111)
5.2.3 因果性实指数信号的傅里叶变换 …… (112)
5.2.4 单位阶跃信号的傅里叶变换 …… (114)
5.2.5 因果性余弦、正弦信号的傅里叶变换 …… (115)
5.2.6 单个矩形波的傅里叶变换 …… (116)

5.3 周期信号的傅里叶级数和傅里叶变换 …… (120)
5.4 连续信号的抽样与抽样定理 …… (134)
习　题　五 …… (139)
第6章　z 变换及其在离散系统分析中的应用 …… (142)
6.1 z 变换的定义 …… (142)
6.2 常用序列的 z 变换 …… (146)
6.2.1 单位样值序列的 z 变换 …… (146)
6.2.2 单位阶跃序列的 z 变换 …… (146)
6.2.3 指数序列的 z 变换 …… (146)
6.2.4 单位斜变序列的 z 变换 …… (149)
6.2.5 单向正弦、余弦序列的 z 变换 …… (149)
6.3 z 变换的性质 …… (151)
6.3.1 线性性质 …… (151)
6.3.2 移序性质 …… (151)
6.3.3 序列指数加权性质 …… (153)
6.3.4 时域反褶性质 …… (154)
6.3.5 时域卷积和性质 …… (154)
6.3.6 z 域微分性质 …… (155)
6.3.7 初值定理 …… (157)
6.3.8 终值定理 …… (157)
6.4 z 变换的反变换 …… (158)
6.4.1 留数法 …… (158)
6.4.2 长除法（幂级数法） …… (160)
6.4.3 部分分式展开法 …… (161)
6.5 离散系统的 z 变换分析 …… (164)
6.5.1 系统差分方程模型的 z 变换解法 …… (164)
6.5.2 离散系统的系统函数与系统的因果性 …… (168)
6.5.3 离散系统系统函数的极点 …… (169)
6.5.4 离散系统的稳定性 …… (171)
6.5.5 离散系统的频率响应 …… (172)
习　题　六 …… (175)
第7章　线性时不变系统的状态方程 …… (177)
7.1 离散系统的状态方程 …… (178)
7.1.1 离散系统状态方程的时域解法 …… (179)
7.1.2 离散系统状态方程的 z 变换解法 …… (184)
7.2 连续系统的状态方程 …… (187)
7.2.1 连续系统状态方程的时域解法 …… (187)
7.2.2 连续系统状态方程的拉普拉斯变换解法 …… (192)
习　题　七 …… (197)
主要参考资料 …… (200)

第 1 章　信号与系统的基本概念

信号、系统是在当代各个科学技术领域中使用极其广泛的术语，虽然信号、系统在不同的研究范畴内可能具有不同的物理实质，但是信号总是用来承载信息，而系统总是用来处理输入信号和产生输出信号的。信号与系统这门学科所要讨论的问题是：怎样用数学方法来描述自然或人工产生的信号，以及如何用数学方法来对系统进行分析和综合。信号与系统所研究的内容是非常丰富的，其中由研究确定信号与线性时不变系统而得出的一整套理论已经非常成熟，这一理论不仅其本身具有独立性和完整性，而且对工程实践也起着不可替代的指导作用。

1.1　信号的基本概念

信号是信息存在的形式，信号也是传递和记录信息的工具。而我们通常所说的消息，实际上是已经知道了的信息。在一般情况下，信号是带有消息的一种物理量，如：电、光、声、位移、速度、加速度、力、温度和颜色等。若消息寄寓于随时间变化而变化的电压或电流中，那么这种带有消息的电压或电流就称为电信号。如果以时间为横坐标，以电压或电流为纵坐标，便可得到一种随时间变化的信号图形或称为波形。由于电信号便于测量、传送和加工，所以对于非电信号的处理，往往是先将它转换为电信号后再进行处理。

信号的数学模型可以是单个独立变量或多个独立变量的函数。时间是我们最常用的独立变量之一，如：图 1.1.1 所示鸟鸣声的时域(a)和频域(b)波形图，其幅值就是时间的一元函数(或称为 1—D 信号)。又如：在静止图片上色彩的位置是空间的二元函数(或称为 2—D 信号)；而活动图片就需要用位置和时间来共同表征其变化规律，因此它是一个 3—D 信号。

本书主要以一元函数表示的信号为讨论对象，这是研究多元信号的基础。应该注意到，在射电天文学、医疗图形学和地震测量学等领域所涉及到的信号，一般说来都是某些独立变量的多元函数。

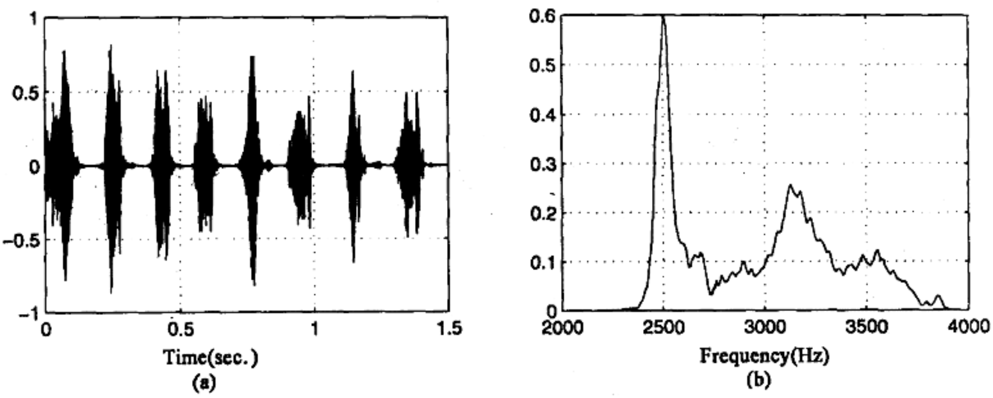


图 1.1.1　鸟鸣声的时域(a)频域(b)波形图

1.1.1 信号的分类

1.1.1.1 确定信号与随机信号

确定信号的变化规律是预先可以知道的。例如:在电路理论课程中广泛使用的正弦信号和指数信号等,它们在每一确定的时刻都有一个确定的函数值与之对应,而且这个确定的值是可以预先知道的。它们的时域特性、频率特性、能量和功率特性等也是可以预先确定的。但是就实际信号而言,它们在一定程度上都是随机的,因为我们不能预先知道在未来的时间里它们将如何变化。试想,如果通讯系统中传输的信号都是确定信号,那么受信者就不可能获得什么新的消息,这样的通讯也就失掉了任何意义。通常我们谈到的所谓干扰和噪声也是一类典型的随机信号。对于随机信号应采用概率统计的方法来进行描述。在后续的章节中将要讨论的信号都是确定信号。

1.1.1.2 连续信号与离散信号

当信号被描写为独立变量的函数时,如果独立变量的定义域是一个实数集,即独立变量在实数轴上是连续取值的,那么就称该信号为连续信号。例如:电流信号是时间 t 的连续函数记为 $i(t)$。图 1.1.2(a)为一连续信号的波形图。如果独立变量的定义域是一个整数集,即独立变量只能取值为正整数、负整数以及零,则称该信号为离散信号。一维的离散信号是一个序列,若将只能取值为正整数、负整数以及零的独立变量记为 k(k 就是这个序列的序号),那么一维的离散信号就记为 $f[k]$。图 1.1.2(b)为一离散信号的波形图。

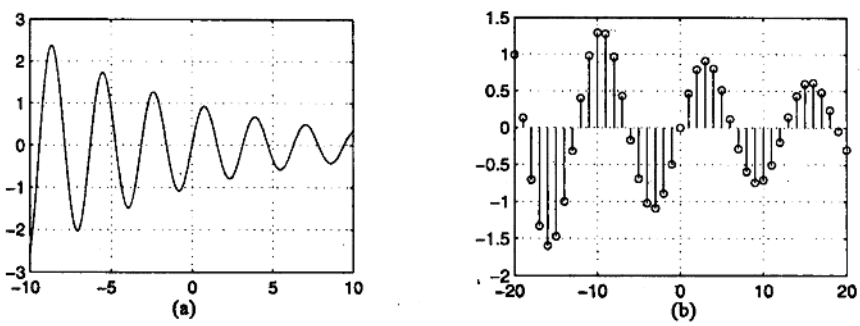


图 1.1.2 连续信号(a)与离散信号(b)的波形图

连续信号的函数值 $f(t)$可以是连续的也可以是离散的。所谓模拟信号是指独立变量时间 t 和函数值$f(t)$都连续取值的信号。离散信号的函数值 $f[k]$同样可以是连续的也可以是离散的。抽样信号是函数值 $f[k]$连续取值的离散信号,数字信号是函数值 $f[k]$被限定为只取某些离散值的离散信号。在表示离散信号的图中,离散信号的波形原本只是一系列的点,图中的一条条细垂线是用来标明函数 $f[k]$取值的大小和序号的对应关系的。

1.1.1.3 周期信号与非周期信号

如果连续时间信号 $f(t)$对所有的 t 都有$f(t)=f(t+T)$,那么连续时间信号 $f(t)$就是一个周期信号,而满足上式的最小的时间间隔 T 就是周期信号$f(t)$的周期。周期信号的波形是以一定的时间间隔不断重复且无始无终的,正弦信号就是最常用的周期信号之一。如果离散信号 $f[k]$对所有的 k 都有$f[k]=f[k+N]$,那么离散信号 $f[k]$就是一个周期信号,而满足上式的最小的序号间隔 N 就是周期信号$f[k]$的周期。

1.1.1.4　能量信号与功率信号

以电信号 $f(t)$ 为例，不论它表示的是电压信号还是电流信号，它加在 1Ω 的电阻上的总能量 W（简称信号能量）均应为

$$W=\int_{-\infty}^{\infty}f^2(t)\mathrm{d}t \tag{1.1.1}$$

信号 $f(t)$ 加在 1Ω 的电阻上的平均功率定义为

$$P=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f^2(t)\mathrm{d}t \tag{1.1.2}$$

这样，如果某信号的总能量为有限值而平均功率为零，就称该信号为能量信号；如果信号的总能量为无限大而平均功率为有限值，就称其为功率信号。在考察的时间间隔无限大的情况下，周期信号一般都能满足功率信号的定义。而存在于无限时间内的非周期信号，则可能是能量信号、功率信号或者是非能量非功率信号。

1.1.1.5　实信号与复信号

如果信号等于它的共轭函数，那么它就是一个实信号；如果信号不等于它的共轭函数，那么它就是一个复信号。虽然实际的信号都是独立变量的实函数，但是为了简化运算，也常常利用复信号的实函数部分或虚函数部分来表示实际信号，复指数函数是使用最广泛的一类复信号。连续时间的复指数信号可以表示为 $f(t)=\mathrm{e}^{st}$，其中 s 为复数；序列的复指数信号可以表示为 $f[k]=z^k$，其中 z 为复数。为了表示出这两种复指数信号的波形，可以选择作出其幅值和辐角的图形，或作出其实函数部分和虚函数部分的图形。例如：设 $s=\mathrm{j}\pi/8$ 和 $z=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi/8}$，那么 $f(t)=\mathrm{e}^{st}$ 和 $f[k]=z^k$ 的实函数部分则分别为

$$\mathrm{Re}\{f(t)\}=\mathrm{Re}\{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\pi}{8}t}\}=\cos(\frac{\pi}{8}t)$$

$$\mathrm{Re}\{f[k]\}=\mathrm{Re}\{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\pi}{8}k}\}=\cos(\frac{\pi}{8}k)$$

它们实函数部分的波形如图 1.1.3(a) 和 (b) 所示。

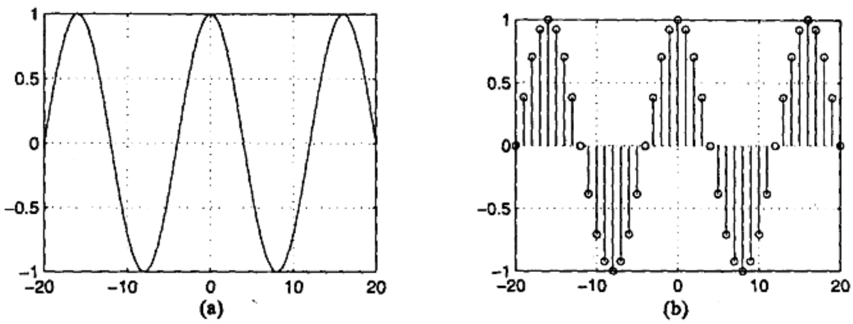


图 1.1.3　复指数信号实函数部分的波形图

1.1.2　连续时间信号的运算

1.1.2.1　移位运算

信号 $f(t)$ 的移位运算是将信号 $f(t)$ 中的独立变量 t 用变量 $t+t_0$ 替换后，在原坐标下产生一个新函数 $f(t+t_0)$ 的运算过程。由于函数 $f(t+t_0)$ 在 $t=-t_0$ 时的值，与 $f(t)$ 在 $t=0$

时的值相等,据此可以逐点绘出 $f(t+t_0)$ 的波形,其结果表明:如果 $t_0>0$,信号 $f(t+t_0)$ 的波形就将是 $f(t)$ 沿时间轴向左移动 t_0 后所得到的波形;而信号 $f(t-t_0)$ 的波形就是将 $f(t)$ 沿时间轴向右移动 t_0 后所得到的波形。

1.1.2.2 反褶运算

信号 $f(t)$ 的反褶运算是将信号 $f(t)$ 中的独立变量 t 用变量 $-t$ 替换后,在原坐标下产生一个新函数 $f(-t)$ 的运算过程。可以把连续时间信号的反褶运算看做是把过去的时间与未来的时间相互调换的结果。经过反褶运算后的信号其波形与原信号是以纵轴为对称的。

1.1.2.3 尺度变换运算

信号 $f(t)$ 中的独立变量 t 用变量 αt 替换后,在原坐标下产生一个新函数 $f(\alpha t)$ 的运算过程,称为信号的尺度变换运算。独立变量 t 用变量 αt 替换后,原来时间轴上的标尺将被压缩或扩展。设 α 为正实数,那么当 $\alpha>1$ 时,信号 $f(\alpha t)$ 的波形将是信号 $f(t)$ 沿时间轴在标尺上缩小了 α 倍后的波形;而当 $\alpha<1$ 时,信号 $f(\alpha t)$ 的波形将是信号 $f(t)$ 沿时间轴在标尺上扩展了 $(1/\alpha)$ 倍后的波形。

将信号 $f(t)$ 中的独立变量 t 替换为变量 $\alpha t+t_0$ 可获得信号 $f(\alpha t+t_0)$。当 $\alpha>0$ 时,信号 $f(\alpha t+t_0)$ 的波形可由原信号 $f(t)$ 经过移位和尺度变换的综合运算来获得;而当 $\alpha<0$ 时,则需经过移位、反褶和尺度变换的综合运算才能获得。

例 1.1.1

已知:信号 $f(t)$ 的波形如图 1.1.4(a)所示。

求:信号 $f(-2t+6)$ 的波形。

解:信号 $f(-2t+6)$ 是信号 $f(t)$ 经过反褶、尺度变换(压缩)和移位运算的结果。要从 $f(t)$ 求得 $f(-2t+6)$ 的波形必须经过上述三种运算,然而这三种运算的先后次序是可以任意组合的,因此在实际操作中有六种不同的顺序可供选择。下面将按反褶—移位—尺度变换的顺序来求解。

(1)反褶:将 $f(t)$ 中的 t 用 $-t$ 替换后,得到 $f(-t)$ 的波形如图 1.1.4(b)所示。

(2)移位:将 $f(-t)$ 中的 $-t$ 用 $-t+6$ 替换后,得到 $f(-t+6)$ 的波形如图 1.1.4(c)所示。

(3)尺度变换:将 $f(-t+6)$ 中的 $-t+6$ 用 $-2t+6$ 替换后,得到 $f(-2t+6)$ 的波形如图 1.1.4(d)所示。

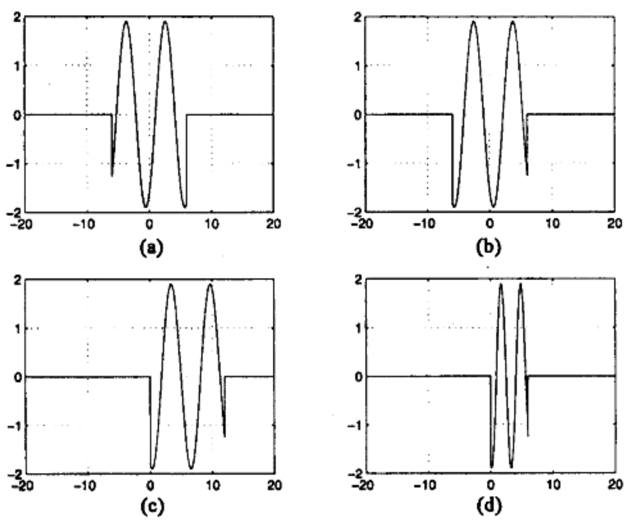


图 1.1.4 按反褶—移位—尺度变换的顺序得到 $f(-2t+6)$ 的波形图

1.1.2.4　微分运算

信号 $f(t)$ 的微分运算定义为 $\frac{df(t)}{dt}$。信号 $f(t)$ 的微分为 $f(t)$ 在 $(-\infty,\infty)$ 内各个瞬时的斜率。如果信号在某一时刻不连续，则该信号在这一时刻的斜率将趋于无穷大。

1.1.2.5　积分运算

信号 $f(t)$ 的积分运算定义为 $\int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau$。信号 $f(t)$ 的积分为曲线 $f(t)$ 在 $[-\infty,t]$ 内与横轴所夹的面积；积分 $\int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau$ 是独立变量 t 的连续函数。在信号 $f(t)$ 的跳变点处积分 $\int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau$ 的值是连续的。应该注意，尽管 $f(t)$ 在有的时刻可能会取值为零，但在此时刻其积分函数的值并不一定也为零。

连续时间信号除自身可以进行上述各种运算外，信号与信号之间还可以进行相加、相减和相乘等运算。例如：有 $f(t)=f_1(t)\pm f_2(t)$，则 $f(t)$ 在某一时刻 t_0 的取值 $f(t_0)$，应由信号 $f_1(t)$ 及信号 $f_2(t)$ 在同一时刻 t_0 的值相加（相减）来确定，即 $f(t_0)=f_1(t_0)\pm f_2(t_0)$。如：有 $f(t)=f_1(t)f_2(t)$，则 $f(t)$ 在某一时刻 t_0 的取值 $f(t_0)$，应由信号 $f_1(t)$ 及信号 $f_2(t)$ 在同一时刻 t_0 的值相乘来确定，即 $f(t_0)=f_1(t_0)f_2(t_0)$。此外，信号与信号之间的卷积积分运算，也广泛地应用在信号与系统的研究中，利用卷积积分可以使许多抽象的数值计算具有直观的几何意义，它在本课程中也占有极其重要的地位，在后续的章节中将对卷积积分进行专门介绍。

1.1.3　离散信号的运算

离散信号的运算与连续时间信号的运算是相类似的。对离散信号也可以进行移位、反褶和尺度变换等运算。离散信号的差分、求和运算与连续时间信号的微分、积分运算是相对应的。

1.1.3.1　移位运算

序列 $f[k]$ 的移位运算是将信号 $f[k]$ 中的独立变量 k 用变量 $k+k_0$ 替换后，在原坐标下产生一个新函数 $f[k+k_0]$ 的运算过程。当 $k_0>0$ 时，序列 $f[k+k_0]$ 在 $k=-k_0$ 时的值就是原序列 $f[k]$ 在 $k=0$ 时的值，由此可知 $f[k+k_0]$ 的图形就是 $f[k]$ 的图形沿 k 轴左移 k_0 个序号的结果，因此也把 $f[k+k_0]$ 称为序列 $f[k]$ 左移 k_0 位的运算；同理，序列 $f[k-k_0]$ 的图形就是 $f[k]$ 的图形沿 k 轴右移 k_0 个序号的结果，因此也把 $f[k-k_0]$ 称为序列 $f[k]$ 右移 k_0 位的运算。

1.1.3.2　反褶运算

序列 $f[k]$ 的反褶运算是将信号 $f[k]$ 中的独立变量 k 用变量 $-k$ 替换后，在原坐标下产生一个新函数 $f[-k]$ 的运算过程。可以把序列的反褶运算看成是将序列排列的正反方向相互调换的结果。经过反褶运算后的序列其波形与原信号是以纵轴为对称的。

1.1.3.3　尺度变换运算

序列 $f[k]$ 中的独立变量 k 用变量 nk（设 n 为整数）替换后，在原坐标下产生一个新函数 $f[nk]$ 的运算过程，称为序列的尺度变换运算。例如：

若 $f[k]=\{\cdots,f[-4],f[-3],f[-2],f[-1],f[0],f[1],f[2],f[3],f[4],\cdots\}$，则

$f[2k]=\{\cdots,f[-4],f[-2],f[0],f[2],f[4],\cdots\}$。若将 $f[2k]$ 记为 $g[k]$，则有：$\cdots$，$g[-2]=f[-4],g[-1]=f[-2],g[0]=f[0],g[1]=f[2],g[2]=f[4],\cdots$。

例 1.1.2

已知：信号 $f[k]$ 的波形如图 1.1.5(a)所示。

求：信号 $f[2k+2]$ 的波形。

解：信号 $f[k]$ 经过移位运算得到 $f[k+2]$ 的波形，如图 1.1.5(b)所示。再进行尺度变换运算最后获得 $f[2k+2]$ 的波形，如图 1.1.5(c)所示。

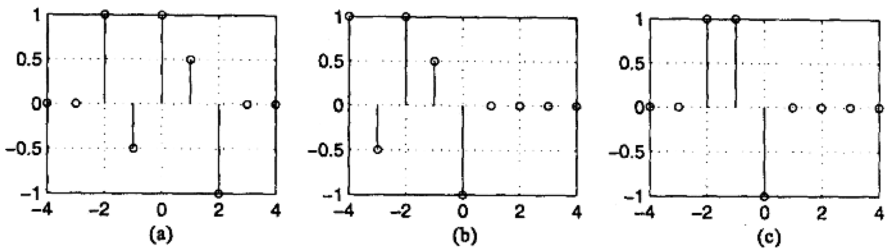


图 1.1.5 按移位—尺度变换的顺序得到 $f[2k+2]$ 的波形

1.1.3.4 差分运算

序列 $f[k]$ 的差分运算定义为

一阶差分 $\Delta f[k]=f[k+1]-f[k]$

二阶差分
$$\begin{aligned}\Delta^2 f[k]&=\Delta f[k+1]-\Delta f[k]\\&=\{f[k+2]-f[k+1]\}-\{f[k+1]-f[k]\}\\&=f[k+2]-2f[k+1]+f[k]\end{aligned}$$

同理，可以按照上述定义写出序列 $f[k]$ 的任意阶差分来。序列的差分运算类似于连续时间信号的微分运算。

1.1.3.5 求和运算

序列的求和运算类似于连续时间信号的积分运算。序列 $f[k]$ 的求和运算可表示为 $\sum_{i=-\infty}^{k} f[i]$，经过求和后所得的新序列仍然是独立变量 k 的函数。

序列除自身可以进行上述各种运算外，离散信号之间也可以进行相加、相减和相乘等运算。另外，离散信号之间还有一种称为卷积和的运算，这种运算与连续时间信号间的卷积积分运算是相对应的。

1.2 基本连续时间信号

本节将着重介绍两种十分重要的连续时间信号：单位冲激信号和复指数信号。这两种信号是构成几乎所有连续时间信号的基本单元。将这两种信号作为系统的输入时，其输出能反映出系统的许多基本特性。

1.2.1 单位冲激函数

单位冲激函数 $\delta(t)$ 定义为

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t)\mathrm{d}t = f(0) \tag{1.2.1}$$

式中，$f(t)$在原点处连续。单位冲激函数不是依靠函数的取值来定义的，而是由单位冲激函数与$f(t)$乘积的积分值来规定的。在通常意义下，如果$y(x)$是独立变量x的函数，那么当x在其变化范围内任意取一个数值时，函数$y(x)$则按照一定的规律总有一个值和它对应。由于单位冲激函数$\delta(t)$的定义域与值域都是函数域，所以它不是通常意义下定义的函数。若令定义式中的$f(t)=1$，则可证明单位冲激函数$\delta(t)$的面积为 1。单位冲激函数$\delta(t)$的图形一般用一段带有箭头的实线来表示，如图 1.2.1 所示。图中实线旁边圆括号内的数字 1 表示它的面积或称为冲激函数的"强度"。

当$\delta(t)$移位到任意时刻t_0时，移位后的单位冲激函数$\delta(t-t_0)$定义为

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-t_0)\mathrm{d}t = f(t_0) \tag{1.2.2}$$

式中，$f(t)$在t_0点处连续。

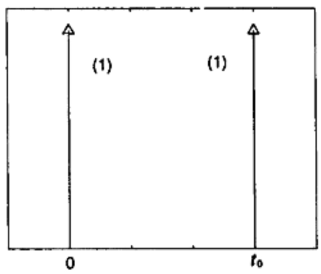


图 1.2.1　单位冲激函数$\delta(t)$和移位后的单位冲激函数$\delta(t-t_0)$

单位冲激函数$\delta(t)$是从实际信号中抽象出来的一个数学模型，它常常用以表示某一瞬间出现的物理量，比如：电压源直接对电容充电时，接通瞬间的充电电流等。

由单位冲激函数$\delta(t)$的定义可知：单位冲激函数$\delta(t)$与在原点连续的函数$f(t)$的乘积，是强度为$f(0)$的冲激函数$f(0)\delta(t)$；移位后的单位冲激函数$\delta(t-t_0)$与在t_0点处连续的函数$f(t)$的乘积，是强度为$f(t_0)$的冲激函数$f(t_0)\delta(t-t_0)$。

单位冲激函数$\delta(t)$进行尺度变换后与原函数存在下述关系

$$\delta(\alpha t)=\frac{1}{|\alpha|}\delta(t) \qquad (\alpha\neq 0) \tag{1.2.3}$$

这是因为

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t)\mathrm{d}t = f(0)$$

而对于积分

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(\alpha t)\mathrm{d}t$$

令$\tau=\alpha t$，当$\alpha>0$时，上式为

$$\int_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{\tau}{\alpha}\right)\delta(\tau)\mathrm{d}\left(\frac{\tau}{\alpha}\right) = \frac{f(0)}{\alpha} = \frac{f(0)}{|\alpha|}$$

当 $\alpha<0$ 时，则有

$$\int_{\infty}^{-\infty} f(\frac{\tau}{\alpha})\delta(\tau)\mathrm{d}(\frac{\tau}{\alpha}) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\frac{\tau}{\alpha})\delta(\tau)\mathrm{d}(\frac{\tau}{|\alpha|}) = \frac{f(0)}{|\alpha|}$$

所以 $\delta(\alpha t)=\frac{1}{|\alpha|}\delta(t)$，$(\alpha\neq0)$。当 $\alpha=-1$ 时，有 $\delta(-t)=\delta(t)$，所以单位冲激函数为偶函数。

单位冲激函数 $\delta(t)$ 的积分称为单位阶跃函数 $u(t)$

$$u(t)=\int_{-\infty}^{t}\delta(t)\mathrm{d}t \tag{1.2.4}$$

该定义也可表述为

$$u(t)=\begin{cases}1 & t>0\\ 0 & t<0\end{cases}$$

移位后的单位冲激函数 $\delta(t-t_0)$ 的积分则是移位后的单位阶跃函数 $u(t-t_0)$

$$u(t-t_0)=\int_{-\infty}^{t}\delta(t-t_0)\mathrm{d}t \tag{1.2.5}$$

上式也可表述为

$$u(t-t_0)=\begin{cases}1 & t>t_0\\ 0 & t<t_0\end{cases}$$

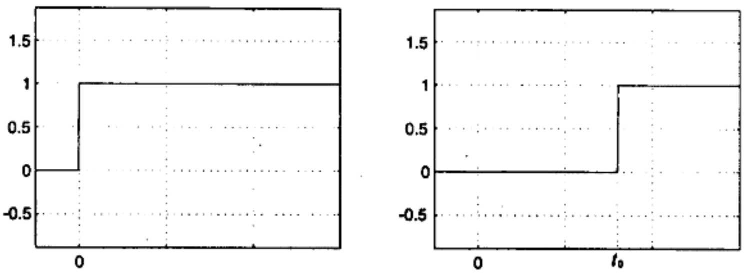


图 1.2.2　单位阶跃函数 $u(t)$ 和移位后的单位阶跃函数 $u(t-t_0)$

它们的波形如图 1.2.2 所示。

单位阶跃函数 $u(t)$ 的微分等于单位冲激函数 $\delta(t)$。因为单位阶跃函数 $u(t)$ 是不连续的，在通常情况下这类函数的微分并不存在，但对 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u(t)$ 却有

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u(t)\mathrm{d}t &= f(t)u(t)\Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} u(t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(t)\mathrm{d}t\\ &= f(\infty)-\int_{0}^{\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(t)\mathrm{d}t\\ &= f(0)\end{aligned}$$

按单位冲激函数 $\delta(t)$ 的定义，可知

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u(t)=\delta(t) \tag{1.2.6}$$

单位阶跃函数 $u(t)$ 的积分称为单位斜变函数

$$R(t)=\int_{-\infty}^{t}u(t)\mathrm{d}t=\int_{0}^{t}\mathrm{d}t=tu(t) \tag{1.2.7}$$

或写为

$$R(t)=\begin{cases} t & t>0 \\ 0 & t<0 \end{cases}$$

而单位阶跃函数 $u(t)$是单位斜变函数 $R(t)=tu(t)$对时间的微分

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}R(t)=u(t) \tag{1.2.8}$$

若把单位斜变函数的非零起始点由原点移位至 t_0 点，就得到移位后的单位斜变函数

$$R(t-t_0)=(t-t_0)u(t-t_0)$$

或记为

$$R(t-t_0)=\begin{cases} t-t_0 & t>t_0 \\ 0 & t<t_0 \end{cases}$$

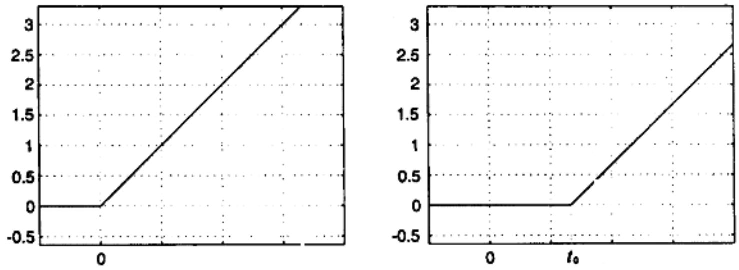


图 1.2.3　单位斜变函数 $R(t)$和移位后的单位斜变函数 $R(t-t_0)$

单位斜变函数和移位后的单位斜变函数的波形可用图 1.2.3 表示。

由单位阶跃函数和单位斜变函数的线性组合，可以形成一些常用的波形。例如：高度为 1，宽度为 τ，以纵轴为对称的矩形脉冲 $P_\tau(t)=u(t+\frac{\tau}{2})-u(t-\frac{\tau}{2})$；高为 τ，底为 2τ，以纵轴为对称的等边三角形脉冲 $T_{2\tau}(t)=(t+\tau)u(t+\tau)-2tu(t)+(t-\tau)u(t-\tau)$等，如图 1.2.4 所示。

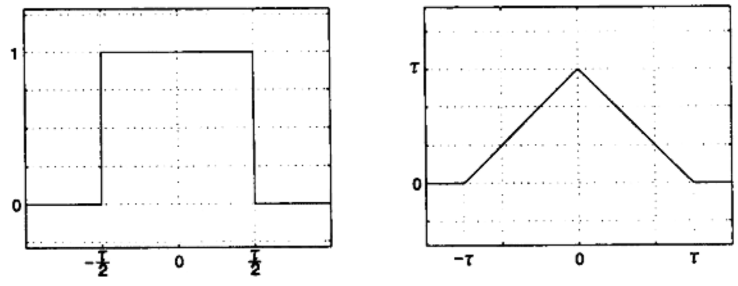


图 1.2.4　矩形脉冲和等边三角形脉冲

1.2.2 复指数函数

连续时间的复指数函数具有如下形式

$$f(t)=Ce^{st} \tag{1.2.9}$$

式中，C和s均为复数。如果把C写为极坐标形式$C=|C|e^{j\theta}$，而将s写为直角坐标形式$s=\sigma+j\omega$，那么

(1)如果 C 为实数，s 也为实数($s=\sigma$)，则称

$$f(t)=Ce^{\sigma t}$$

为实指数信号。当 $\sigma<0$ 时，$f(t)$将随 t 增加而按指数函数规律衰减。当 $\sigma>0$ 时，$f(t)$将在 t 增加时按指数函数规律发散。当 $\sigma=0$ 时，$f(t)$为常数 C。

(2)如果 C 为复数，s 为纯虚数($s=j\omega$)，则称

$$f(t)=|C|e^{j(\omega t+\theta)}$$

为虚指数信号。虚指数信号是一个周期信号，虚指数函数的周期为满足 $f(t)=f(t+T)$，即

$$|C|e^{j(\omega t+\theta)}=|C|e^{j[\omega(t+T)+\theta]}$$

式中，T 的最小值 $2\pi/\omega$。虚指数函数的实函数部分和虚函数部分为

$$\mathrm{Re}\{f(t)\}=|C|\cos(\omega t+\theta)$$

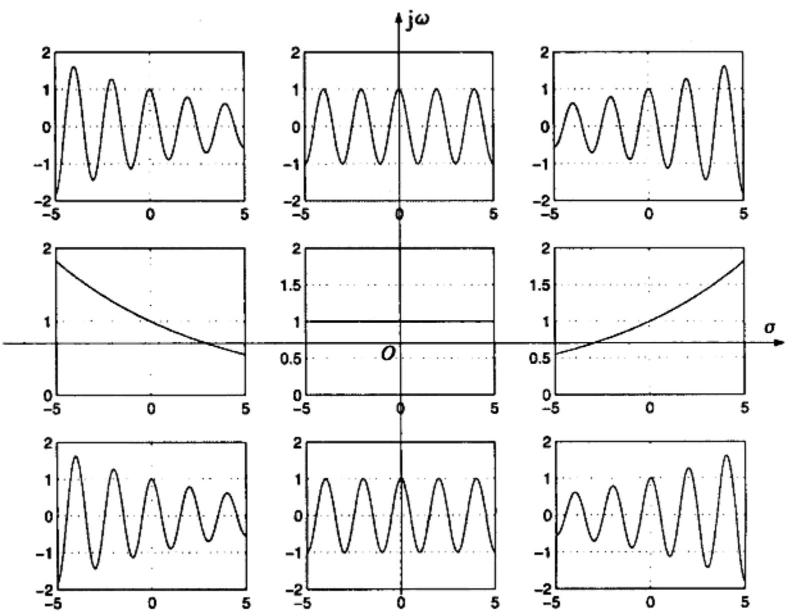
$$\mathrm{Im}\{f(t)\}=|C|\sin(\omega t+\theta)$$

它们都是周期为 $2\pi/\omega$ 的正弦波。

正弦、余弦信号是最常用的基本函数，用欧拉公式可以将正弦和余弦信号分别表示为同频率的虚指数函数的线性组合

$$|C|\sin(\omega t+\theta)=|C|\left[\frac{e^{j(\omega t+\theta)}-e^{-j(\omega t+\theta)}}{2j}\right]$$

$$|C|\cos(\omega t+\theta)=|C|\left[\frac{e^{j(\omega t+\theta)}+e^{-j(\omega t+\theta)}}{2}\right]$$



(a)

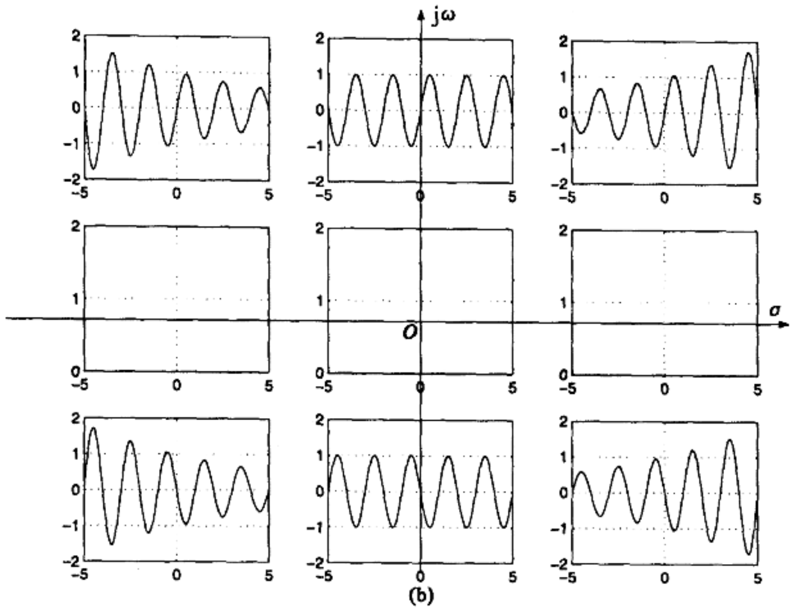


图1.2.5 复指数函数的实函数部分(a)与虚函数部分(b)

(3)如果 C 为复数，s 的实部和虚部均不为零($s=\sigma+\mathrm{j}\omega$)，则有

$$\begin{aligned} f(t) &= |C|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}\mathrm{e}^{(\sigma+\mathrm{j}\omega)t} \\ &= |C|\mathrm{e}^{\sigma t}[\cos(\omega t+\theta)+\mathrm{j}\sin(\omega t+\theta)] \end{aligned} \tag{1.2.10}$$

复指数函数 $f(t)$ 的实函数部分和虚函数部分分别为

$$\mathrm{Re}\{f(t)\}=|C|\mathrm{e}^{\sigma t}\cos(\omega t+\theta)$$

$$\mathrm{Im}\{f(t)\}=|C|\mathrm{e}^{\sigma t}\sin(\omega t+\theta)$$

它们是具有相同振荡频率的非周期性实信号。当 $\sigma<0$ 时，它们的幅值将随时间 t 的增加而按指数规律减小；当 $\sigma>0$ 时，随着时间 t 的增加，它们的幅值将按指数函数规律增大。

图1.2.5所示为当 C 为正实数时，s 在各种不同取值的情况下，复指数函数的实函数部分的波形(a)和虚函数部分的波形(b)。

1.3 连续时间信号的分解

采用适当的方式将已知信号分解为一些基本信号分量之和，对于研究信号本身的特性以及对信号进行传输和处理都具有十分重要的意义。

1.3.1 信号的奇分量和偶分量

如果信号 $f(t)$ 等于一个奇函数与一个偶函数之和，那么这个奇函数 $f_o(t)$ 则称为信号 $f(t)$ 的奇分量，偶函数 $f_e(t)$ 则称为信号 $f(t)$ 的偶分量。

原信号 $f(t)$ 可以写为

$$f(t)=f_o(t)+f_e(t)$$

而原信号 $f(-t)$ 的反褶可以写为

$$f(-t)=f_o(-t)+f_e(-t)=-f_o(t)+f_e(t)$$

所以，信号的奇、偶分量可由信号 $f(t)$ 及其经过反褶运算后的信号 $f(-t)$ 确定

$$\begin{aligned} f_o(t)&=\frac{f(t)-f(-t)}{2} \\ f_e(t)&=\frac{f(t)+f(-t)}{2} \end{aligned} \tag{1.3.1}$$

1.3.2 信号的虚分量和实分量

虽然现实存在的信号都是在实数域定义的信号，但在信号与系统的学习和实践中，常常借助于复函数信号来研究某些实函数信号的问题。如果一个复函数 $f(t)$ 可以写为

$$f(t)=f_r(t)+\mathrm{j}f_i(t)$$

那么，则称 $f_r(t)$ 为复函数 $f(t)$ 的实分量，称 $\mathrm{j}f_i(t)$ 为复函数 $f(t)$ 的虚分量。复函数 $f(t)$ 的共轭复函数 $\overset{*}{f}(t)$ 为

$$\overset{*}{f}(t)=f_r(t)-\mathrm{j}f_i(t)$$

所以，复函数 $f(t)$ 的实分量和虚分量可由复函数 $f(t)$ 和它的共轭复函数 $\overset{*}{f}(t)$ 确定

$$\begin{aligned} f_r(t)&=\frac{f(t)+\overset{*}{f}(t)}{2} \\ \mathrm{j}f_i(t)&=\frac{f(t)-\overset{*}{f}(t)}{2} \end{aligned} \tag{1.3.2}$$

1.3.3 信号的阶跃函数分量

信号 $f(t)$ 可以分解为不同时刻出现的、高度极低的阶跃信号之和。被分解的信号 $f(t)$ 如图 1.3.1 所示，若将 0 至时刻 t 的任意时段平均分成 n 等分，每等分为 $\Delta\tau=t/n$，那么信号就可用相等时间间隔出现的、不同高度的阶跃信号之和近似表示为

$$\begin{aligned} f(t)\approx{}& f(0)u(t)+[f(\Delta\tau)-f(0)]u(t-\Delta\tau)+[f(2\Delta\tau)-f(\Delta\tau)]u(t-2\Delta\tau)+ \\ & [f(3\Delta\tau)-f(2\Delta\tau)]u(t-3\Delta\tau)+\cdots+\{f(n\Delta\tau)-f[(n-1)\Delta\tau]\}u(t-n\Delta\tau) \\ ={}& f(0)u(t)+\sum_{\tau=\Delta\tau}^{n\Delta\tau}[f(\tau)-f(\tau-\Delta\tau)]u(t-\tau) \\ ={}& f(0)u(t)+\sum_{\tau=\Delta\tau}^{n\Delta\tau}\left[\frac{f(\tau)-f(\tau-\Delta\tau)}{\Delta\tau}\right]u(t-\tau)\Delta\tau \end{aligned}$$

当 $n\to\infty$，$\Delta\tau\to0$ 时，那么上式右端的极限应为信号 $f(t)$，即

$$f(t)=f(0)u(t)+\int_0^t\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(t)\right]u(t-\tau)\mathrm{d}\tau \tag{1.3.3}$$