高等学校独立学院教材

微积分

培优读本

马传渔　编著
南京大学金陵学院

WEIJIFEN
PEIYOUDUBEN

南京大学出版社

高等学校独立学院教材

微积分培优读本

南京大学金陵学院
马传渔　编著

南京大学出版社

内容提要

本书是南京大学金陵学院“微积分”课程的系列教材，内容包括空间解析几何、多元函数微分学、二重积分、级数和微分方程。

本书内容强调知识板块之间的有机联系，突出各类题型的归纳和剖析，综述解题的技巧、方法，有助于微积分知识的牢固掌握和解题能力的快速提升。

本书可用作大学经济管理类学生的微积分学习的参考书，也可用作高等学校独立学院的辅导教材。

图书在版编目(CIP)数据

微积分培优读本/马传渔编著. —南京：南京大学出版社，2010.5

ISBN 978-7-305-06981-9

Ⅰ. ①微… Ⅱ. ①马… Ⅲ. ①微积分 Ⅳ. ①O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 073308 号

出版发行 南京大学出版社
社　　址 南京市汉口路 22 号　　邮　　编 210093
网　　址 http://www.NjupCo.com
出 版 人 左　健

书　　名 微积分培优读本
编　　著 马传渔
责任编辑 王振义
审读编辑 胥橙庭

照　　排 南京大学印刷厂
印　　刷 南京大学印刷厂
开　　本 787×960　1/16　　印张 21.75　　字数 414千
版　　次 2010 年 5 月第 1 版　　2010 年 5 月第 1 次印刷
ISBN 978-7-305-06981-9
定　　价 39.80元

发行热线 025－83594756
电子邮件 Press@NjupCo.com
　　　　 Sales@NjupCo.com(市场部)

前　　言

南京大学金陵学院编著使用的经济管理类《微积分》上下两册自2007年5月出版至今，已被广大读者认可。随着南京大学出版社2009年10月《微积分解题集萃》一书的问世，《微积分》课程系列教材的建设日臻完善。在广大读者的企盼中，又一本系列教材《微积分培优读本》与大家见面了。

1. 根据高等学校独立学院的培养目标，对照大学经济管理类微积分课程的教材要求，制订了本书的章节目录。全书共分五章，覆盖了微积分下册的全部内容。

2. 本书按知识板块、考试题型和解题方法分为60节，每节的开头简明扼要地列出重要概念、著名定理和解题公式。通过大量题目的演示，能使广大读者熟悉各类考试题型，掌握丰富的知识内容，学会多种解题方法和技巧，为在各类考试中获胜打下扎实的基础。

3. 根据1998年5月在美国费城世界科学家大会上所提出的“21世纪教育——几何学万岁”的精神，本书强调直观明了的几何图形的描绘，强调空间想象能力的培养，强调几何方法的运用。为此，对本书第一章空间解析几何做比较详尽的训练，其内容是丰富的。

4. 本书强调可读性，内容层次分明，由浅入深，科学性强，为基本概念、基本理论和基本运算的“三基”题的训练做必要的铺垫，避免跳步，便于自学。对选入本书的近八年的考研题都经过认真的筛选和润色，这对学有余力的学生具有培优作用。

5. 本书强调微积分的经济应用以及与其他学科之间的联系。书中注明年份的题目表示它是该年的研究生考题。

本书能与读者见面，得益于南京大学金陵学院院长王殿祥教授和原院长姚天扬教授的厚爱和指导，感谢邵进副院长和教务主任王均义两位教授的指导和支持，感谢李元、马俊南、邹一峰三位主任的关心和帮助。

对金陵学院袁明霞和庄凯丽两位年青教师所做的工作表示谢意。

由于水平有限，不当之处在所难免，恳请专家、同行和读者不吝赐教。

南京大学金陵学院

马传渔

2010年2月

目　　录

第一章　空间解析几何

§1　向量的线性运算

设 AB 是 $\mathbf{R}^3$ 中一条线段，取 A 为始点，B 为终点，给出线段 AB 从 A 到 B 的一个方向，则称有向线段 AB 是一个向量(或矢量)，记作$\overrightarrow{AB}$，或用 $\boldsymbol{a}$ 表示.

向量$\overrightarrow{AB}$是既有方向又有大小的量. 其方向从始点 A 指向终点 B，其大小是线段 AB 的长，称为向量$\overrightarrow{AB}$的模(或长)，记作$|\overrightarrow{AB}|$.

若两个向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的大小相等、方向相同(即正方向一致)，则称这两个向量相等，记为 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$.

易见，若两向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 起点相同，则 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$ 的充要条件是它们的终点相互重合. 也不难看出，起点与终点分别重合的两个向量是相等的，但两个相等的向量并不要求其起点与终点分别重合. 这是因为按照向量相等的定义，向量是可以平行移动的，在这种平行移动意义下不变的向量称为自由向量. 今后如果没有特别声明，本书所指的向量是自由向量. 为此，给定向量 $\boldsymbol{a}$，在空间中可任取点 A 作为始点，构作唯一向量$\overrightarrow{AB}$，使得$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$.

1. **零向量 $\mathbf{0}$**. 若向量$\overrightarrow{AB}$的终点 B 与始点 A 重合，则称$\overrightarrow{AB}$为零向量，记作 $\mathbf{0}$，即$\overrightarrow{AA}$为零向量，零向量的模为 0，但没有确定的方向. $\mathbf{0}$ 与任何向量正交，又与任何向量平行.

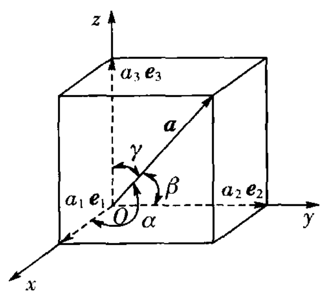
2. **单位向量**. 若$|\overrightarrow{AB}|=1$，则称$\overrightarrow{AB}$为单位向量.

$\forall \boldsymbol{a}\neq\mathbf{0}$，单位向量$\boldsymbol{a}_0=\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$与 $\boldsymbol{a}$ 方向相同，而$-\boldsymbol{a}_0=-\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$与 $\boldsymbol{a}$ 方向相反.

3. **反向量**. 称 $-\boldsymbol{a}$ 为 $\boldsymbol{a}$ 的反向量. $-\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的模相等，但方向相反.

$$-\boldsymbol{a}=(-1)\cdot\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\mathbf{0}.$$

4. **基向量**. 如图所示



直角坐标系 $Oxyz$ 又可记作$[O;\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3]$，称 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ 为三个基向量. $|\boldsymbol{e}_1|=|\boldsymbol{e}_2|=|\boldsymbol{e}_3|=1$，$\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ 构成右手系，两两互相垂直，并且

(1)$\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_1=\boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{e}_2=\boldsymbol{e}_3\cdot\boldsymbol{e}_3=1,\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2=\boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{e}_3=\boldsymbol{e}_3\cdot\boldsymbol{e}_1=0$,简记作

$$\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_j=\delta_{ij}=\begin{cases}1, i=j,\\0, i\neq j.\end{cases}$$

(2)$\boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{e}_1=\boldsymbol{e}_2\times\boldsymbol{e}_2=\boldsymbol{e}_3\times\boldsymbol{e}_3=\boldsymbol{0}$;

$\boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{e}_2=\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_2\times\boldsymbol{e}_3=\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_3\times\boldsymbol{e}_1=\boldsymbol{e}_2$.

5. **位移向量.** 设 $P_0(x_0,y_0,z_0)$,$P(x,y,z)$,则称$\overrightarrow{P_0P}$为位移向量. 当 P_0 为原点 O 时,称$\overrightarrow{OP}$为点 P 的位置向量或向径.

$$\overrightarrow{P_0P}=(x-x_0,y-y_0,z-z_0),\overrightarrow{OP}=(x,y,z).$$

6. **共线向量.**

(1)若 $AB/\!/CD$,则称向量$\overrightarrow{AB}$和$\overrightarrow{CD}$平行,或共线,记作$\overrightarrow{AB}/\!/\overrightarrow{CD}$.

(2)设 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$,则 $\forall\boldsymbol{r}$,向量 $\boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{a}$ 共线当且仅当存在唯一的实数 λ,使得 $\boldsymbol{r}=\lambda\boldsymbol{a}$.

(3)设 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)$,$\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,b_3)$,则 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$ 当且仅当$\dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_2}{b_2}=\dfrac{a_3}{b_3}$.

7. **共面向量.**

(1)若三个向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 取共同始点,而终点位于同一个平面上,则称 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 为共面向量.

(2)设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 不共线,则 $\forall\boldsymbol{r}$,向量 $\boldsymbol{r}$ 与 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 共面当且仅当存在唯一的一组实数 λ,μ,使得

$$\boldsymbol{r}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}.$$

通常称 $\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}$ 是向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的线性组合,λ,μ 为组合系数. 当 $\lambda=\mu=1$ 时,得向量加法 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$;当 $\lambda=1,\mu=-1$ 时,得向量减法 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$;当 $\mu=0$ 时,得数乘向量 $\lambda\boldsymbol{a}$.

(3)设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 为三个不共面向量,则 $\forall\boldsymbol{r}$,必存在唯一的一组实数 λ,μ,ν,使得

$$\boldsymbol{r}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}+\nu\boldsymbol{c}.$$

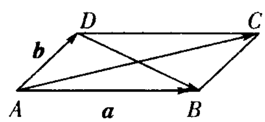
(4)$\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}=(\lambda a_1+\mu b_1,\lambda a_2+\mu b_2,\lambda a_3+\mu b_3)$.

7. 对向量$\overrightarrow{AB}$,恒有:

(1)$\forall P,\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{PB}$;

(2)$\forall Q,\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{QB}-\overrightarrow{QA}$.

8. 如图所示,在$\square ABCD$ 中,对角线向量:



$$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},$$
$$\overrightarrow{DB}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}.$$

9. 设向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ 的夹角分别为 α,β,γ，称 α,β,γ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向角. 方向角的余弦 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦.

$$\begin{cases}\cos\alpha=\dfrac{a_1}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}},\\ \cos\beta=\dfrac{a_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}},\\ \cos\gamma=\dfrac{a_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}}.\end{cases}$$

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1.$$

$$\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|(\cos\alpha\boldsymbol{e}_1+\cos\beta\boldsymbol{e}_2+\cos\gamma\boldsymbol{e}_3).$$

$$\boldsymbol{a}_0=\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma).$$

【题 1】 向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 满足什么几何性质时，以下各式成立？

(1) $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$；　　(2) $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|>|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$；

(3) $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|<|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$；　　(4) $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$.

【解】 (1) $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 中有一个为 $\boldsymbol{0}$ 或 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 正交；

(2) $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 之间的夹角为锐角；

(3) $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 之间的夹角为钝角；

(4) $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线且方向相同.

【题 2】 计算下列各题.

(1)求点 $A(1,2,-1)$ 关于 Ox 轴的对称点.

(2)求点 $A(1,2,-1)$ 关于 yOz 坐标平面的对称点.

(3)求点 $A(1,2,-1)$ 关于原点的对称点.

(4)求点 $A(1,2,-1)$ 到 Oy 轴的距离.

(5)求点 $A(1,2,-1)$ 到 yOz 平面的距离.

(6)求 x 轴上的点，使它到点 $B(-3,2,-2)$ 的距离为 3.

(7)求 $A(1,2,-1)$ 到 $B(-3,2,-2)$ 的距离.

(8)求 $A(1,2,-1)$ 与 $B(-3,2,-2)$ 两点连线段的中点坐标.

【解】 (1)$(1,-2,1)$. (2)$(-1,2,-1)$. (3)$(-1,-2,1)$. (4)$\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$. (5)1.

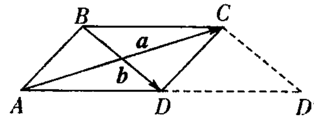
(6)因 $(x+3)^2+2^2+2^2=3^2$，即 $(x+3)^2=1$，得 $x+3=\pm1$.

故 $(-2,0,0)$ 或 $(-4,0,0)$ 为所求.

(7) $\sqrt{4^2+0^2+1^2}=\sqrt{17}$.

(8) $\left(\dfrac{1+(-3)}{2},\dfrac{2+2}{2},\dfrac{-1-2}{2}\right)=\left(-1,2,-\dfrac{3}{2}\right)$.

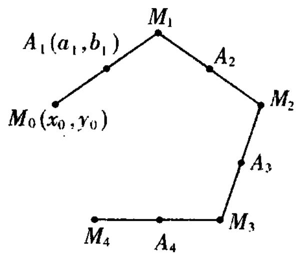
【题 3】 已知平行四边形 $ABCD$ 的对角线向量 $\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{BD}=\boldsymbol{b}$. 试把平行四边形 $ABCD$ 四边的向量用 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 表示.



【解】 如图所示，$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD'}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$；

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}&=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DB}\\&=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})-\boldsymbol{b}\\&=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}).\end{aligned}$$

【题 4】 设 A_1,A_2,A_3,A_4 为任意指定的四点，任取一点 M_0，自点 M_0 依次作四点 M_1,M_2,M_3,M_4，使 M_i 和 M_{i-1} 关于 $A_i(i=1,2,3,4)$ 对称. 求证：向量 $\overrightarrow{M_0M_4}$ 与点 M_0 的选择无关.



【解】 设 $A_i(a_i,b_i)(i=1,2,3,4)$，又 $M_0(x_0,y_0)$，则由中点公式，知 $M_1(2a_1-x_0,2b_1-y_0)$.

又 $A_2(a_2,b_2)$，故 $M_2(2a_2-2a_1+x_0,2b_2-2b_1+y_0)$.

同样，由 $A_3(a_3,b_3)$，

知 $M_3(2a_3-2a_2+2a_1-x_0,2b_3-2b_2+2b_1-y_0)$.

再由 $A_4(a_4,b_4)$，

得 $M_4(2a_4-2a_3+2a_2-2a_1+x_0,2b_4-2b_3+2b_2-2b_1+y_0)$.

因此，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{M_0M_4}&=(2a_4-2a_3+2a_2-2a_1,2b_4-2b_3+2b_2-2b_1)\\&=2(a_4-a_3+a_2-a_1,b_4-b_3+b_2-b_1).\end{aligned}$$

由此表达式，知 $\overrightarrow{M_0M_4}$ 不依赖于 x_0,y_0，故与点 M_0 的选择无关.

【题 5】 已知 $\boldsymbol{a}=5\boldsymbol{e}_1-2\boldsymbol{e}_2+4\boldsymbol{e}_3$，求方向角 α,β,γ.

【解】 因 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{5^2+(-2)^2+4^2}=3\sqrt{5}$，

故　$\cos\alpha=\frac{5}{3\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{3}$，$\cos\beta=\frac{-2}{3\sqrt{5}}=-\frac{2\sqrt{5}}{15}$，$\cos\gamma=\frac{4}{3\sqrt{5}}=\frac{4\sqrt{5}}{15}$.

于是，$\alpha=\arccos\frac{\sqrt{5}}{3}$，$\beta=\arccos\left(-\frac{2\sqrt{5}}{15}\right)$，$\gamma=\arccos\frac{4\sqrt{5}}{15}$.

【题 6】 指出下列方程或方程组在平面直角坐标系与空间直角坐标系中各表示什么图形？

(1)$x=2$；　　(2)$x+y=1$；

(3)$\begin{cases}x=2,\\y=1;\end{cases}$　　(4)$xy=0$.

【解】 (1)平面直角坐标系中，$x=2$ 代表平行于 Oy 轴的一条直线；

空间直角坐标系中，$x=2$ 代表平行于 yOz 平面的一个平面.

(2)平面直角坐标系中，$x+y=1$ 代表一条直线；

空间直角坐标系中，$x+y=1$ 代表平行于 Oz 轴的一个平面.

(3)平面直角坐标系中，$\begin{cases}x=2,\\y=1\end{cases}$代表点(2,1)；

空间直角坐标系中，$\begin{cases}x=2,\\y=1\end{cases}$代表平行于 Oz 轴的一条直线.

(4)平面直角坐标系中，$xy=0$ 代表 Ox 轴或 Oy 轴；

空间直角坐标系中，$xy=0$ 代表 yOz 平面或 zOx 平面.

§2　向量的内积、外积和混合积

1. **向量的内积**(点乘、数量积).

(1)两个非零向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的内积，定义为一个数，记为$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$.

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta,$$

其中 $\theta=(\boldsymbol{a}\hat{,}\boldsymbol{b})$是两个向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 之间的夹角，$0\leqslant\theta\leqslant\pi$.

(2)当 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0},\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$时，

$$\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|}.$$

(3)内积的坐标表示.

设 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)$，$\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,b_3)$，则

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3.$$

当 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}$ 时，记 $\boldsymbol{a}^2=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}$，则

$$\boldsymbol{a}^2=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2=a_1^2+a_2^2+a_3^2,$$

故

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}.$$

(4)向量的内积运算满足：

(ⅰ)$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$；　(交换律)

(ⅱ)$(\alpha\boldsymbol{a})\cdot(\beta\boldsymbol{b})=\alpha\beta(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$，$\alpha,\beta$ 为实数；

(ⅲ)$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$.　(分配律)

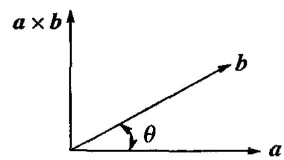
(5)$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\mathrm{Proj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}$.

$$\mathrm{Proj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}_0.$$

其中 $\boldsymbol{a}_0=\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$.

2. **向量的外积**(叉乘、向量积).

(1)两个向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的外积定义为一个向量，记为$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$.



其模为

$$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|\sin\theta,0\leqslant\theta\leqslant\pi.$$

$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 的方向既垂直于 $\boldsymbol{a}$，又垂直于 $\boldsymbol{b}$，且使 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 成右手系的方向(见图).

(2)$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$的数值等于以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为邻边的平行四边形的面积.

(3)外积的坐标表示.

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}&=(a_1,a_2,a_3)\\&\quad\times(b_1,b_2,b_3)\\&=\left(\begin{vmatrix}a_2&a_3\\b_2&b_3\end{vmatrix},-\begin{vmatrix}a_1&a_3\\b_1&b_3\end{vmatrix},\begin{vmatrix}a_1&a_2\\b_1&b_2\end{vmatrix}\right)\\&=(a_2b_3-a_3b_2,a_3b_1-a_1b_3,a_1b_2-a_2b_1).\end{aligned}$$

在向量外积的坐标表达式中，把 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的坐标排成两行，顺次去掉第 1 列、第 2 列、第 3 列，可得三个二阶行列式，三个二阶行列式的值就是 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 的三个坐标，但特别提醒：第二个行列式前面有一个负号，千万别丢.

(4)向量的外积运算满足：

(ⅰ)$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$；　　(反交换律)

(ⅱ)$(\alpha\boldsymbol{a})\times(\beta\boldsymbol{b})=\alpha\beta(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$($\alpha,\beta$ 为实数)；

(ⅲ)$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$.　　(分配律)

3. **混合积.**

(1)已知三个向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{c}$，称数量$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$ 为三个向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 的混合积，记作$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$，即$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$.

(2)$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{a})=(\boldsymbol{c},\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$.

(3)混合积的坐标表示. 若 $\boldsymbol{c}=(c_1,c_2,c_3)$，则

$$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})=(a_2b_3-a_3b_2)c_1+(a_3b_1-a_1b_3)c_2+(a_1b_2-a_2b_1)c_3.$$

4. **双重外积.**

(1)已知三个向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$，则向量$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}$ 和 $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$称为三个向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 的双重外积.

(2)$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{a}$.

记忆方法：双重外积是中间的向量 $\boldsymbol{b}$ 乘以余下的两个向量的内积，减去括号中余下的另一个向量 $\boldsymbol{a}$ 乘以另外两个向量 $\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{c}$ 的内积.

(3)$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}$.

$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$通常不成立.

(4)拉格朗日恒等式.

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d})-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{d})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}).$$

5. **向量没有除法运算.**

(1)设 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$,则由 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$,不能推出 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$.

(2)设 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$,则由 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$,不能推出 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$.

【题 1】 已知$\overrightarrow{AB}=(2,5,1)$,$\overrightarrow{AC}=(-3,2,2)$.求$\triangle ABC$的三条边长及$\angle A$的大小.

【解】 $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{2^2+5^2+1^2}=\sqrt{30}$,$|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{(-3)^2+2^2+2^2}=\sqrt{17}$.

因为$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}=(-2,-5,-1)+(-3,2,2)=(-5,-3,1)$,

所以$|\overrightarrow{BC}|=\sqrt{(-5)^2+(-3)^2+1^2}=\sqrt{35}$.

因此,$\triangle ABC$的三条边长分别为$\sqrt{30}$,$\sqrt{17}$和$\sqrt{35}$.

由于$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=(2,5,1)\cdot(-3,2,2)=-6+10+2=6$,

所以

$$\cos\angle A=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|}=\frac{6}{\sqrt{30}\cdot\sqrt{17}}=\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{85}}.$$

因此

$$\angle A=\arccos\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{85}}.$$

【题 2】 计算下列各题.

(1)设 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{e}_1-3\boldsymbol{e}_2-2\boldsymbol{e}_3$,$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3$.求 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$,$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{e}_1$.

(2)设 $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{e}_1-3\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3$,$\boldsymbol{b}=-3\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2+2\boldsymbol{e}_3$,$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_2+3\boldsymbol{e}_3$.求$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$,$(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{a})$和$(\boldsymbol{c},\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$.

(3)设$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=1$,求$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a})$.

【解】 (1)
$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}&=(1,-3,-2)\cdot(1,1,1)=1\times1+(-3)\times1+(-2)\times1\\&=-4.\\ \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}&=(1,-3,-2)\times(1,1,1)\\&=\left(\begin{vmatrix}-3&-2\\1&1\end{vmatrix},-\begin{vmatrix}1&-2\\1&1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1&-3\\1&1\end{vmatrix}\right)\\&=(-1,-3,4).\\ (\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{e}_1&=(-1,-3,4)\cdot(1,0,0)=-1.\end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}&=(2,-3,1)\times(-3,1,2)\\&=\left(\begin{vmatrix}-3&1\\1&2\end{vmatrix},-\begin{vmatrix}2&1\\-3&2\end{vmatrix},\begin{vmatrix}2&-3\\-3&1\end{vmatrix}\right)\\&=(-7,-7,-7)=-7(1,1,1).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}&=-7(1,1,1)\cdot(1,2,3)=-7\times(1\times1+1\times2+1\times3)\\&=-42.\end{aligned}$$

因此

$$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{a})=(\boldsymbol{c},\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=-42.$$

(3)题设条件即为$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})=1$.

$$\begin{aligned}\text{原式}&=[\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})+\boldsymbol{b}\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})]\cdot(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a})\\&=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a})\\&=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}+(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{c}+(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{c}+\\&\quad(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a}\\&=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}+(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a}\\&=2(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})=2.\end{aligned}$$

【题 3】 证明下列各题.

(1)设向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 满足 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$. 证明:

(ⅰ)$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}=-\frac{1}{2}(|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2+|\boldsymbol{c}|^2)$;

(ⅱ)$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}$.

(2)试证:$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2\cdot\boldsymbol{b}^2-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2$.

(3)试证:拉格朗日恒等式

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d})-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{d})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}).$$

【解】 (1)(ⅰ)$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$ 两边用 $\boldsymbol{a}$ 作内积,得

$$\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=0. \quad ①$$

类似地,用 $\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{c}$ 分别作内积,得

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=0, \quad ②$$

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}^2=0. \quad ③$$

由①②③三式相加,得

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}=-\frac{1}{2}(|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2+|\boldsymbol{c}|^2).$$

(ⅱ)$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$ 两边用 $\boldsymbol{a}$ 作外积,得

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}.$$

因 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$,故

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}.$$

即

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}. \quad ④$$

同理,$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$ 两边用 $\boldsymbol{b}$ 作外积,得

$$\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}.$$

即

$$\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}. \quad ⑤$$

由④⑤,知

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}.$$

(2)**方法一** 利用双重外积公式.

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})^2&=(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=(\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b},\boldsymbol{a})\\&=\big(\boldsymbol{b}\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\big)\cdot\boldsymbol{a}=\big(\boldsymbol{b}^2\boldsymbol{a}-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a})\boldsymbol{b}\big)\cdot\boldsymbol{a}\\&=\boldsymbol{a}^2\cdot\boldsymbol{b}^2-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2.\end{aligned}$$

方法二 若 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 中有一个为 $\mathbf{0}$,结论显然成立.由于

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})^2&=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|^2=|\boldsymbol{a}|^2\cdot|\boldsymbol{b}|^2\sin^2(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})\\&=|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2\big(1-\cos^2(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})\big)\\&=|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2-|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2\cos^2(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})\\&=\boldsymbol{a}^2\cdot\boldsymbol{b}^2-\big(|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})\big)^2\\&=\boldsymbol{a}^2\cdot\boldsymbol{b}^2-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2.\end{aligned}$$

(3)因为混合积$(\vec{A},\vec{B},\vec{C})=(\vec{A}\times\vec{B})\cdot\vec{C}$,又

$$(\vec{A},\vec{B},\vec{C})=(\vec{B},\vec{C},\vec{A})=(\vec{C},\vec{A},\vec{B}).$$

所以

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})&=(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})=(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d},\boldsymbol{a})\\&=\big(\boldsymbol{b}\times(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})\big)\cdot\boldsymbol{a}\\&=\big((\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d})\boldsymbol{c}-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{d}\big)\cdot\boldsymbol{a}\\&=(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d})(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})(\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{a})\\&=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d})-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{d})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}).\end{aligned}$$

【题 4】 计算下列各题.

(1)设 $\boldsymbol{a}=(2,-3,1)$,$\boldsymbol{b}=(1,-1,3)$,$\boldsymbol{c}=(1,-2,0)$.求$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}$.

(2)设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 均为非零向量,且 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$,计算:$\boldsymbol{a}\times\{\boldsymbol{a}\times[\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})]\}$.

【解】 (1)**方法一**

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}&=(2,-3,1)\times(1,-1,3)\\&=\left(\begin{vmatrix}-3&1\\-1&3\end{vmatrix},-\begin{vmatrix}2&1\\1&3\end{vmatrix},\begin{vmatrix}2&-3\\1&-1\end{vmatrix}\right)\\&=(-8,-5,1).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}&=(-8,-5,1)\times(1,-2,0)\\&=\left(\begin{vmatrix}-5&1\\-2&0\end{vmatrix},-\begin{vmatrix}-8&1\\1&0\end{vmatrix},\begin{vmatrix}-8&-5\\1&-2\end{vmatrix}\right)\\&=(2,1,21).\end{aligned}$$

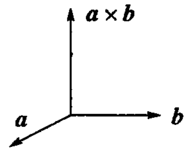
方法二　利用双重外积公式：

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{a}.$$

因 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=8,\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=3$，故

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}&=8(1,-1,3)-3(2,-3,1)\\&=(2,1,21).\end{aligned}$$

(2)**方法一**　根据两个向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 外积 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 的定义，知$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{a},(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{b}$. 今 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，故 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 是三个两两互相垂直的向量(见图).



依外积右手系方向的定义，知向量 $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$的方向为$-\boldsymbol{b}$的方向，又

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})|&=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|\sin(\boldsymbol{a}\hat{,}\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\\&=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|\sin90^\circ=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|\\&=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\sin(\boldsymbol{a}\hat{,}\boldsymbol{b})\\&=|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|\sin90^\circ\\&=|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|.\end{aligned}$$

所以

$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=-|\boldsymbol{a}|^2\boldsymbol{b}.$$

因此

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\times\{\boldsymbol{a}\times[\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})]\}&=\boldsymbol{a}\times\{\boldsymbol{a}\times[-|\boldsymbol{a}|^2\boldsymbol{b}]\}\\&=-|\boldsymbol{a}|^2[\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})]\\&=-|\boldsymbol{a}|^2\cdot(-|\boldsymbol{a}|^2\boldsymbol{b})\\&=|\boldsymbol{a}|^4\boldsymbol{b}.\end{aligned}$$

方法二　利用双重外积公式.

由
$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c},$$
知

$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{a}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a})\boldsymbol{b}.$$

因 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，故 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，于是

$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a})\boldsymbol{b}=-|\boldsymbol{a}|^2\boldsymbol{b}.$$

于是

$$\begin{aligned}\text{原式}&=\boldsymbol{a}\times[\boldsymbol{a}\times(-|\boldsymbol{a}|^2\boldsymbol{b})]=-|\boldsymbol{a}|^2\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\\&=-|\boldsymbol{a}|^2(-|\boldsymbol{a}|^2\boldsymbol{b})=|\boldsymbol{a}|^4\boldsymbol{b}.\end{aligned}$$

【题 5】　设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 均为非零向量. 试问：

(1)$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$ 是否等价？

(2)$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$ 是否等价？

【解】　(1)若 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$，则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$ 成立.

反之，若 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$，即$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=0$.