高二 数学 SHUXUE

自主学习与水平测试

ZIZHUXUEXIYUSHUIPINGCESHI

（文科）

天津科学技术出版社

2010

高二 数学 SHUXUE

自主学习与水平测试

ZIZHUXUEXIYUSHUIPINGCESHI

（文科）

天津科学技术出版社

图书在版编目(CIP)数据

自主学习与水平测试．高二数学．文科/《自主学习与水平测试》编写组编著．—天津：天津科学技术出版社，2010

ISBN 978-7-5308-5699-4

Ⅰ.①自… Ⅱ.①自… Ⅲ.①数学课—高中—教学参考资料 Ⅳ.①G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 106275 号

责任编辑：曹　阳

责任印制：张军利

天津科学技术出版社出版

出版人：蔡　颢

天津市西康路 35 号　邮编 300051

电话(022)23332393(发行部)　23332392(市场部)　27217980(邮购部)

网址：www.tjkjcbs.com.cn

新华书店经销

唐山市润丰印务有限公司印刷

开本 787×1092　1/16　印张 12　字数 336 000

2010 年 6 月第 1 版第 1 次印刷

定价：7.00 元

前言

QIAN YAN

《自主学习与水平测试》丛书，是在认真研究普通高中课程改革方案的基础上，以教育部颁布的普通高中各学科《课程标准》和2010年唐山市普通高中新课程实验教学用书目录规定的版本为蓝本编著的，供高二年级使用。

本丛书包括数学(理科)、数学(文科)、语文、英语、物理、化学、生物(必修)、生物(选修)、政治(必修)、政治(选修)、历史(必修)、历史(选修)、地理(选修)等十三个分册，各分册设置了“专题概述”“自主学习”“学习点津”“问题探究”“水平测试”等栏目。此外，还设置了单元同步测试题，方便学生在检测学习效果时使用。

本丛书坚持以学生为本，关注学生的学、学生的“体验”，通过“自主学习”，促进学生积极思考、学会学习、学会运用。

本丛书强调教师的辅导要导在关键，导出学生的感思。通过“学习点津”“问题探究”，答疑解惑，指导学生归纳知识、总结方法，达到导与学、学与用相互渗透、相互融合、共同进步。

本丛书还注意从深化知识、训练方法、提高能力等多角度精心选编练习题，方便学生与教材同步配套使用，“水平测试”“单元测试” 栏目所选题目既注重基础性、阶段性、综合性，又注重层次性、渐进性，并增加理论联系实际、贴近学生生活的题目，充分体现针对性和实用性原则，可以进一步帮助学生巩固知识、深化知识，培养学生综合运用所学知识分析和解决实际问题的能力。

本丛书充分体现了基础教育课程改革精神，是新的教育教学理念和教学实践相结合的一次尝试，同时也浓缩了各学科教研员、一线特、高级教师的思想精华及近几年新课程教学的研究成果。在编写过程中，我们虽竭尽全力，但疏漏之处仍在所难免，恳请广大师生在使用过程中提出宝贵意见，以使我们做得更好。

丛书编委会

2010年6月

第二章　推理与证明

第三章　数系的扩充与复数的概念

第四章　框图

选 修 1-1

第一章 常用逻辑用语

本章学习命题及四种命题之间的关系、充分条件与必要条件、简单的逻辑联结词、全称量词与存在量词等基本知识．通过学习和使用常用逻辑用语，掌握常用逻辑用语的用法，纠正逻辑错误，体会运用常用逻辑用语表述数学内容的准确性、简洁性．

本章知识结构框图：

- 常用逻辑用语
  - 命题及其关系
  - 充分条件
必要条件
充要条件
  - 简单的逻辑联结词
  - 全称量词
存在量词

无论是思考还是交流，都需要正确地运用逻辑用语表达自己的思维．数学是一门逻辑性很强的学科，表达数学概念和结论、进行推理和论证，更离不开逻辑用语．学习一些常用逻辑用语，可以使我们正确理解数学概念、合理论证数学结论、准确表达数学内容．

充分条件与必要条件、简单的逻辑联结词、全称量词与存在量词等，既是表述命题的常用逻辑用语，同时它们的含义也是通过命题来体现的．因此，命题是串联本章相关知识的纽带，是学习的关键．

1.1.1 命题及其关系

自主学习

1．我们把____________________表达的，可以判断__________的陈述句叫做命题．

2．____________________的语句叫做真命题；__________________的语句叫做假命题．

3．若将原命题表示为：若 p，则 q．则它的逆命题为__________________；它的否命题为__________________；它的逆否命题为__________________．

4．四种命题真假性之间的关系是__________________．

学习点津

1．判断一个语句是不是命题，关键是看它是否符合“是陈述句”和“可以判断真假”这两个条件．

2．强调互逆命题，互否命题，互为逆否命题中：“互为”的含义．

3．四种命题真假性之间的联系可以为我们进行推理论证带来方便，例如，由于原命题与其逆否命题有相同的真假性，当直接证明一个命题为真命题有困难时，可以通过证明其逆否命题为真命题来间接地证明原命题为真．

问题探究

题型一　判断命题真假

1． 判断下列命题的真假：

(1)已知 $a,b,c,d\in\mathbf{R}$，若 $a\neq c$，或 $b\neq d$，则 $a+b\neq c+d$；

(2) $\forall x\in\mathbf{N}, x^3>x^2$；

(3)若 $m>1$，则方程 $x^2-2x+m=0$ 无实数根；

(4)存在一个三角形没有外接圆．

分析:判断为真的语句叫做真命题;判断为假的语句叫做假命题.

解:(1)为假命题,反例:$1\neq4$,或 $5\neq2$,而 $1+5=4+2$.

(2)为假命题,反例:$x=0$,$x^3>x^2$ 不成立.

(3)为真命题,因为 $m>1\Rightarrow\Delta=4-4m<0\Rightarrow$无实数根.

(4)为假命题,因为每个三角形都有唯一的外接圆.

方法与规律:加固对命题概念的理解.

【变式 1】下列四个命题中真命题为(　　)

①"若 $x+y=0$,则 x,y 互为相反数"的逆命题;

②"全等三角形的面积相等"的否命题;

③"若 $q\leqslant1$,则 $x^2+2x+q=0$ 有实根"的逆否命题;

④"不等边三角形的三个内角相等"逆命题.

A. ①②　　B. ②③

C. ①③　　D. ③④

题型二　将命题改写成"若 p,则 q"的形式

2. 将下列命题改写成"若 p,则 q"的形式,并判断真假:

(1)垂直于同一条直线的两条直线平行;

(2)负数的立方是负数;

(3)对顶角相等.

分析:若后写条件,则后写结论.

解:(1)若两条直线垂直于同一条直线,则这两条直线平行.假命题.

(2)若一个数是负数,则这个数的立方是负数.真命题.

(3)若两个角是对顶角,则这两个角相等.真命题.

方法与规律:"若 p 则 q"形式的命题是命题的一种形式而不是唯一的形式,也可写成"如果 p,那么 q","只要 p,就有 q"等形式.把命题进行改写,以便容易找到命题的条件和结论.

【变式 2】把下列命题改写成"若 p,则 q"的形式,并判定真假.

(1)负数的平方是正数.

(2)正方形的四条边相等.

(3)相切两圆的连心线经过切点.

(4)面积相等的两个三角形全等.

(5)等边三角形的三个内角相等.

题型三　四种命题的互化

3. 设原命题是"当 $c>0$ 时,若 $a>b$,则 $ac>bc$",写出它的逆命题、否命题、逆否命题,并分别判断它们的真假.

分析:四种命题形式.原命题:若 p,则 q.逆命题:若 q,则 p.否命题:若$\neg p$,则$\neg q$.逆否命题:若$\neg q$,则$\neg p$.

解:逆命题:当 $c>0$ 时,若 $ac>bc$,则 $a>b$.逆命题为真.

否命题:当 $c>0$ 时,若 $a\leqslant b$,则 $ac\leqslant bc$.否命题为真.

逆否命题:当 $c>0$ 时,若 $ac\leqslant bc$,则 $a\leqslant b$.逆否命题为真.

方法与规律:准确地作出反设(即否定结论)是非常重要的.

原结论	反设词	原结论	反设词
是	不是	至少有一个	一个也没有
都是	不都是	至多有一个	至少有两个
大于	不大于	至少有 n 个	至多有 $(n-1)$ 个
小于	大于或等于	至多有 n 个	至少有 $(n+1)$ 个
对所有 x,成立	存在某 x,不成立	对任何 x,不成立	存在某 x,成立

【变式 3】判断正误,并说明理由:

(1)若原命题是"对顶角相等",它的否命题是"对顶角不相等";

(2)若原命题是"对顶角相等",它的否命题是"不成对顶关系的两个角不相等".

题型四　利用四种命题关系证明命题的真假

4. 若 a^2 能被 2 整除,a 是整数,求证:a 也能被 2 整除.

证明:

水平测试

基础级

1. 下列语句中是命题的是(　　)

A. 周期函数的和是周期函数吗

B. $\sin 45°=1$

C. $x^2+2x-1>0$

D. 梯形是不是平面图形呢

2. 在命题"若抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 的开口向下,则 $\{x|ax^2+bx+c<0\}\neq\varnothing$"的逆命题、否命题、逆否命题中结论成立的是(　　)

A. 都真　　B. 都假

C. 否命题真　　D. 逆否命题真

3. 下列说法中正确的是(　　)

A. 一个命题的逆命题为真,则它的逆否命题一定为真

B. "$a>b$"与"$a+c>b+c$"不等价

C. "$a^2+b^2=0$,则 a,b 全为 0"的逆否命题是"若 a,b 全不为 0,则 $a^2+b^2\neq0$"

D. 一个命题的否命题为真,则它的逆命题一定为真

4. 下列命题中的真命题是(　　)

A. $\sqrt{3}$是有理数

B. $2^{\sqrt{2}}$是实数

C. e是有理数

D. $\{x|x$ 是小数$\}\subsetneqq\mathbf{R}$

5. 有下列四个命题其中真命题个数是(　　)

①若"$x+y=0$,则 x、y 互为相反数"的逆命题;

②"若 $a>b$,则 $a^2>b^2$"的逆否命题;

③"若 $x\leqslant-3$,则 $x^2+x-6>0$"的否命题;

④"若 a^b 是无理数,则 a、b 是无理数"的逆命题.

A. 0　　B. 1

C. 2　　D. 3

6. 命题:"若 $a^2+b^2=0$ $(a,b\in\mathbf{R})$,则 $a=b=0$"的逆否命题是(　　)

A. 若 $a\neq b\neq0$ $(a,b\in\mathbf{R})$,则 $a^2+b^2\neq0$

B. 若 $a=b\neq0$ $(a,b\in\mathbf{R})$,则 $a^2+b^2\neq0$

C. 若 $a\neq0$,且 $b\neq0$ $(a,b\in\mathbf{R})$,则 $a^2+b^2\neq0$

D. 若 $a\neq0$,或 $b\neq0$ $(a,b\in\mathbf{R})$,则 $a^2+b^2\neq0$

7. 设原命题:若 $a+b\geqslant2$,则 a,b 中至少有一个不小于 1,则原命题与其逆命题的真假情况是(　　)

A. 原命题真,逆命题假

B. 原命题假,逆命题真

C. 原命题与逆命题均为真命题

D. 原命题与逆命题均为假命题

8. 命题:"若 $a\cdot b$ 不为零,则 a,b 都不为零"的逆否命题是________.

9. 命题"$ax^2-2ax-3>0$ 不成立"是真命题,则实数 a 的取值范围是________.

10. 下列四个命题中是真命题的是________(填上你认为正确的命题的序号).

①命题"若 $xy=1$,则 x,y 互为倒数"的逆命题;

②命题"面积相等的三角形全等"的否命题;

③命题"若 $m\leqslant1$,则 $x^2-2x+m=0$ 有实根"的逆否命题;

④命题"若 $A\cap B=B$,则 $A\subseteq B$"的逆否命题.

能力级

11. 写出下列命题的否定形式:

(1)正方形的四边相等;

(2)平方和为 0 的两个实数都为 0;

(3)若$\triangle ABC$ 是锐角三角形,则$\triangle ABC$ 的任何一个内角是锐角;

(4)若 $abc=0$,则 a,b,c 中至少有一个为 0;

(5)若$(x-1)(x-2)\neq0$,则 $x\neq1$ 且 $x\neq2$.

12. 对于下述命题,写出其命题的否定形式,并判断原命题与命题的否定形式的真假:

(1)p:$91\in(A\cap B)$(其中全集 $U=\mathbf{N}^*$,$A=\{x|x$ 是质数$\}$,$B=\{x|x$ 是正奇数$\}$).

(2)p:有一个素数是偶数;

(3)p:任意正整数都是质数或合数;

(4) p:三角形有且仅有一个外接圆.

13. 若 $a^2+b^2=c^2$,求证:a,b,c 不可能都是奇数.

1.1.2 充要条件与必要条件

自主学习

1. 一般地,如果"若 p,则 q"为真命题,即由 p 可推出 q,记作"$p\Rightarrow q$",此时我们就说 p 是 q ________,q 是 p ________.

2. 如果既有 $p\Rightarrow q$ 又有 $q\Rightarrow p$,则 p 是 q 的________,记作 $p\Leftrightarrow q$.

学习点津

1. 充分条件与必要条件是同时产生的,若"$p\Rightarrow q$",则称 p 是 q 的充分条件,q 是 p 的必要条件.形式特征是:充分在前,必要在后的充分条件,同时后是前的必要条件.

2. 如果"若 p,则 q"为假命题,那么由 p 推不出 q,记作 $p\nRightarrow q$,此时我们就说 p 不是 q 的充分条件,q 不是 p 的必要条件.

3. 如果既有 $p\Rightarrow q$ 又有 $q\Rightarrow p$,则 p 是 q 的充要条件,如果 p 是 q 的充要条件,那么 q 是 p 的充要条件,概括地说,如果 $p\Leftrightarrow q$,那么 p 与 q 互为充要条件.

问题探究

题型一 判断充分条件、必要条件、充要条件

1. 判断下列各题中,p 是 q 的什么条件(指充分而不必要,必要而不充分,充要,既不充分也不必要条件)?

(1) p:四边形对角线互相平分,q:四边形是菱形;

(2) p:$x=1$ 或 $x=2$,q:$x^2-3x+2=0$;

(3) p:在$\triangle ABC$ 中,$\angle A>\angle B$,q:$BC>AC$;

(4) p:$x>1$ q:$x^2>1$.

分析:按照充要条件的定义去判断是解决问题的关键.

解:(1)四边形对角线互相平分$\nRightarrow$四边形是菱形;四边形是菱形$\nRightarrow$四边形对角线互相平分,所以 p 是 q 的必要而不充分条件.

(2) $x=1$ 或 $x=2\Rightarrow x^2-3x+2=0$;$x^2-3x+2=0\Rightarrow x=1$ 或 $x=2$,所以 p 是 q 的充要条件.

(3)在$\triangle ABC$ 中,$\angle A>\angle B\Rightarrow BC>AC$;$BC>AC\Rightarrow\angle A>\angle B$,所以 p 是 q 的充要条件.

(4) $x>1\Rightarrow x^2>1$;$x^2>1\nRightarrow x>1$,所在 p 是 q 的充分而不必要条件.

方法与规律:(1)分析 p 是 q 的什么条件,一定要结合命题 p 与 q 所涉及的知识,进而全面分析,按定义进行判断.

(2)分析判断时,为了得到命题 p 与 q 的准确关系,有时需对命题 p 与 q 进行化简,然后再分析.

【变式 1】"$a=2$"是"直线 $ax+2y=0$ 平行直线 $x+y=1$"的(　　)

A. 充分而不必要条件

B. 必要而不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

题型二 充分条件、必要条件、充要条件之间的关系的应用

2. 设 A 是 B 的充分而不必要条件,C 是 B 的必

要而不充分条件，D 是 C 充要条件，问 D 是 A 的什么条件？

分析：本题考查充分条件、必要条件、充要条件之间的关系，关键是能够将其用符号语言表达出来．

解：因为 A 是 B 的充分而不必要条件，即 $A\Rightarrow B$ 且 $B\nRightarrow A$；C 是 B 的必要而不充分条件，即 $C\nRightarrow B$ 且 $B\Rightarrow C$；D 是 C 充要条件，即 $D\Leftrightarrow C$，则有 $A\Rightarrow D$ 且 $D\nRightarrow A$，所以 D 是 A 的必要不充分条件．

$$\boxed{\begin{array}{l} A\Rightarrow B\Rightarrow C\Leftrightarrow D \\ \nLeftarrow \quad \nLeftarrow \end{array}}$$

方法与规律：作出如上的关系图像，凭图观察关系明确，但一定注意不要弄错箭头推出的方向．

[变式 2]试证明一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 有一正根和一负根的充要条件是 $ac<0$.

题型三　充要条件的证明

3. 已知 a,b 是实数，求证 $a^4-b^4-2b^2=1$ 成立的充要条件是 $a^2-b^2=1$.

分析：证明充分条件，就是从 $a^2-b^2=1$ 出发，证 $a^4-b^4-2b^2=1$ 成立；证明必要条件，就是从 $a^4-b^4-2b^2=1$ 入手，证 $a^2-b^2=1$ 成立．

证明：(1)充分性，若 $a^2-b^2=1$ 成立，则 $a^4-b^4-2b^2=(a^2+b^2)(a^2-b^2)-2b^2=a^2+b^2-2b^2=a^2-b^2=1$ 所以 $a^2-b^2=1$ 是 $a^4-b^4-2b^2=1$ 的充分条件．

(2)必要性，若 $a^4-b^4-2b^2=1$ 成立，则 $a^4-(b^2+1)^2=0$ 即 $(a^2+b^2+1)(a^2+b^2-1)=0$，因为 a,b 为实数，所以 $(a^2+b^2+1)\neq0$，所以 $a^2+b^2-1=0$，即 $a^2-b^2=1$.

综上可知，$a^4-b^4-2b^2=1$ 成立的充要条件是 $a^2-b^2=1$.

方法与规律：证明充要条件，先证明由条件推出结论，再证明由结论推出条件，两者缺一不可．

[变式 3]求圆 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 经过原点的充要条件．

题型四　充分条件、必要条件、充要条件的求解与应用

4. 求关于 x 的方程 $ax^2+2x+1=0$ 至少有一个负的实数根的充要条件．

解：

水平测试

基础级

1. 设命题甲：$0<x<5$，命题乙：$|x-2|<3$，则命题甲是乙的(　　)

A. 充分而不必要条件

B. 必要而不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

2. 已知集合 M、N，则 $M\cap N=N$ 的充要条件是(　　)

A. $M\subseteq N$　　　B. $M\subsetneqq N$

C. $M=N$　　　D. $M\supseteq N$

3. 设 a、$b\in\mathbf{R}$，那么 $ab=0$ 的充要条件是(　　)

A. $a=0$ 且 $b=0$　　　B. $a=0$ 或 $b\neq0$

C. $a=0$ 或 $b=0$　　　B. $a\neq0$ 且 $b=0$

4. 关于 x 的方程以 $ax^2+bx+c=0$ 有一个根为 1 的充要条件是__________.

5. (2006·安徽)设 a、$b\in\mathbf{R}$，已知命题 p：$a=b$；命题 q：$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\leqslant\frac{a^2+b^2}{2}$，则 p 是 q 成立的(　　)

A. 必要而不充分条件

B. 充分而不必要条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

6. 设集合 $U=\{(x,y)\mid x\in\mathbf{R},y\in\mathbf{R}\}$，$A=\{(x,y)\mid 2x-y+m>0\}$，$B=\{(x,y)\mid x+y-n\leqslant0\}$，那么点 $P(2,3)\in A\cap(\complement_U B)$的充要条件是(　　)

A. $m>-1,n<5$

B. $m<-1,n<5$

C. $m>-1,n>5$

D. $m<-1,n>5$

7. 对任意实数 a、b、c，在下列命题中，真命题是(　　)

A. “$ac>bc$”是“$a>b$”的必要条件

B. “$ac=bc$”是“$a=b$”的必要条件

C. “$ac>bc$”是“$a>b$”的充分条件

D. “$ac=bc$”是“$a=b$”充分条件

8. (2006·湖南)“$a=1$”是“函数 $f(x)=|x-a|$ 在区间 $[1,+\infty)$ 上为增函数”的(　　)

A. 充分而不必要条件

B. 必要而不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

9. 设集合 A、B 是全集 U 的两个子集，则 $A\subsetneqq B$ 是 $(\complement_U A)\cup B=U$ 的________条件．

10. 直线 $ax+2y+3a=0$ 和直线 $3x+(a-1)y=a-7$ 平行且不重合的充要条件为________．

11. $x\geqslant 0$ 是 $x^2\leqslant x$ 的________条件．

12. 如图 1-1-1 所示的电路图中，闭合开关 A 是灯泡 B 亮的什么条件：

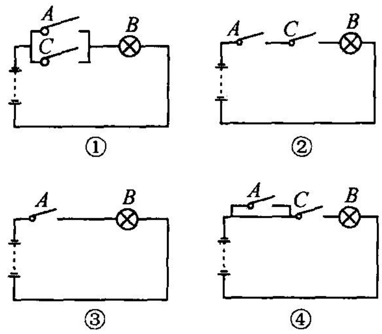

图 1-1-1

(1)如图①所示，开关 A 闭合是灯泡 B 亮的________条件；

(2)如图②所示，开关 A 闭合是灯泡 B 亮的________条件；

(3)如图③所示，开关 A 闭合是灯泡 B 亮的________条件；

(4)如图④所示，开关 A 闭合是灯泡 B 亮的________条件．

能力级

13. 设 a、b、c 为 $\triangle ABC$ 中 $\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 的对边，求证 $x^2+2ax+b^2=0$ 与 $x^2+2cx-b^2=0$ 有公共根的充要条件是 $\angle A=90°$．

14. 求方程 $x^2+kx+1=0$ 与 $x^2+x+k=0$ 有一个公共实根的充要条件．

1.1.3 简单的逻辑联结词

自主学习

1. 逻辑联结词有________________．

2. 简单命题是________________．

3. 复合命题是________________．

学习点津

1. 一般地，用逻辑联结词“且”把命题 p 和命题 q 联结起来，就得到一个新命题，记作________，读作：________．规定：当 p、q 都是真命题时，$p\wedge q$ 是________命题；当 p、q 两个命题中有一个是假命题时，$p\wedge q$ 是________命题．

2. 一般地，用逻辑联结词“或”把命题 p 和命题 q 联结起来，就得到一个新命题，记作：________，读作：________．规定：当 p、q 两个命题中有一个是真命题时，$p\vee q$ 是________命题；当 p、q 都是假命题时，$p\vee q$ 是________命题．

3. 一般地，对一个命题 p 全盘否定，就得到一个新命题，记作________，读作：________．若 p 是真命题，则 $\neg p$ 必是________命题；若 p 是假命

题,则$\neg p$必是__________命题.

真值表

p	q	p且q	p或q
真	真	真	真
真	假	假	真
假	真	假	真
假	假	假	假

问题探究

题型一　复合命题拆成简单命题

1. 指出下列命题的构成形式及构成它的简单命题:

(1)24既是8的倍数也是6的倍数;

(2)小李是篮球运动员或跳高运动员;

(3)平行线不相交;

(4)小张是学生,小王也是学生.

分析:找逻辑联结词的近义词.

解:(1)p且q,p:24既是8的倍数,q:24是6的倍数;

(2)p或q,p:小李是篮球运动员,q:小李是跳高运动员;

(3)平行线不相交,非p,p:平行线相交;

(4)p且q,p:小张是学生,q:小王是学生.

方法与规律:判断复合命题真假的步骤如下:

(1)写出构成复合命题的简单命题p与q;

(2)判断p、q的真假;

(3)由真值表判断真假.

[变式1]分别指出由下列各组命题构成的"p或q","p且q","非p"形成的复合命题的真假.

(1)p:$2+2=5$,q:$3>2$;

(2)p:9是质数,q:8是12的约数;

(3)p:$1\in\{1,2\}$,q:$\{1\}$是$\{1,2\}$子集;

题型二　逻辑联结词的应用

2. 已知:p:方程$x^2+mx+1=0$有两个不等的负实根;q:方程$4x^2+4(m-2)x+1=0$无实数根.若p或q为真,p且q为假,求m的取值范围.

解:由p:$\Delta=m^2-4>0$,$m>0$,解得$m>2$.

q:$\Delta=16(m-2)^2-16=16(m^2-4m+3)<0$,解得$1<m<3$.

因为p或q真,p且q假,

所以p为真,q为假;或p为假,q为真.

所以$\begin{cases}m>2\\m\leqslant1,或\ m\geqslant3\end{cases}$或$\begin{cases}m\leqslant2,\\1<m<3.\end{cases}$

解得$m\geqslant3$或$1<m\leqslant2$.

方法与规律:命题$p\wedge q$的真假判断方法:全真为真,有假即假.

命题$p\vee q$的真假判断方法:有真即真,全假为假.

命题P与$\neg p$的真假关系:真假相反.

[变式2]已知命题p:$|x^2-x|\geqslant6$,q:$x\in\mathbf{Z}$,若"p或q"与"非q"同时为假命题,求x的值.

题型三　综合应用

3. 在一次模拟射击游戏中,小李连续射击了两次,设命题p:"第一次射击中靶",命题q:"第二次射击中靶",试用,p、q及逻辑联结词"或""且""非"表示下列命题:

(1)两次射击均中靶;

(2)两次射击至少有一次中靶.

解:

水平测试

基础级

1. 以下说法正确的是(　　)

A. 命题p为真时,命题"$p\wedge q$"一定为真

B. 命题"$p\wedge q$",为真时,命题p一定为真

C. 命题"$p\wedge q$"为假时,命题p一定为假

D. 命题p为假时,命题"$p\wedge q$"不一定为假

2. 下列命题中,真命题的个数是(　　)个

①$1\leqslant1$;

②集合A是$A\cap B$的子集,或是$A\cup B$的子集;

③周长相等的两个三角形全等,或面积相等的两个三角形全等.

A. 0　　　　B. 1

C. 2　　D. 3

3. 命题“有两个内角是 $45°$ 的三角形是等腰直角三角形”的结构形式是(　　)

A. $p\vee q$　　B. $p\wedge q$

C. $\neg p$　　D. 以上都不对

4. 对于命题 p:$A\cap\varnothing=\varnothing$，命题 q:$A\cup\varnothing=A$，下列说法正确的是(　　)

A. $p\wedge q$ 为假　　B. $p\vee q$ 为假

C. $\neg p$ 为真　　D. $\neg p$ 为假

5. “$p\vee q$ 为假命题”是“$\neg p$ 为真命题”的(　　)

A. 充分而不必要条件

B. 必要而不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

6. 给出下列命题：①10＞0，或 10＝0；②10＞0，且 10＝0；③10 不小于 0. 其中真命题的序号是________.

7. 由命题 p:“3 是 6 的约数”，命题 q:“3 是 12 的约数”构成的“$p\wedge q$”形式的命题是________________.

8. 已知命题 p:方程 $x^2-2x-3=0$ 有两个不相等的实数根，则 $\neg p$:________.

9. 分别用“$p\wedge q$”“$p\vee q$”“$\neg p$”填空：

(1)命题“非空集合 $A\cap B$ 中的元素既是 A 的元素，也是 B 的元素”是________形式；

(2)命题“非空集合 $A\cup B$ 中的元素是 A 的元素，或是 B 的元素”是________形式；

(3)命题“非空集合 $\complement_U A$ 中的元素不是 A 的元素”是________形式.

能力级

10. 用逻辑联结词表示下列式子：

(1)$x=\pm 2$；

(2)$\begin{cases}x=3,\\y=-1;\end{cases}$

(3)$xy=0$.

11. 判断下列命题的真假，并说明理由：

(1)$p\wedge q$，其中 p:对角线互相垂直的四边形是菱形，q:对角线互相平分的四边形是菱形；

(2)$p\vee q$，其中 p:不等式 $(x-3)(x+3)>0$ 与不等式组 $\begin{cases}x-3>0,\\x+3>0\end{cases}$ 的解集相同，q:若 $a>0$，则 $a\sqrt{a}\geqslant 0$.

12. 已知 p:不等式 $|x-1|>m-1$ 的解集为 $\mathbf{R}$，q:$f(x)=-(5-2m)^x$ 是减函数．若 $p\vee q$ 为真命题，且 $p\wedge q$ 为假命题，求实数 m 的取值范围．

1.1.4 全称量词与存在量词

自主学习

1. 短语“对所有的”，“对任意一个”在逻辑中通常叫做全称量词，并用符号“$\forall$”表示，含有全称量词的命题，叫做全称命题．

全称命题“对 M 中任意一个 x，有 $p(x)$ 成立”可用符号简记为________，读作“________”.

2. 短语“存在一个”，“至少有一个”在逻辑中通常叫做存在量词，并用符号“$\exists$”表示，含有存在量词

的命题，叫做特称命题．

特称命题“存在 M 中的一个 x_0，使 $p(x_0)$ 成立”可用符号简记为________，读作“________”．

3. 一般地，对于含有一个量词的全称命题的否定，有下面的结论：

全称命题 p：$\forall A\in M, p(x)$．

它的否定 $\neg p$：________．

全称命题的否定是特称命题．

4. 一般地，对于含有一个量词的特称命题的否定，有下面的结论：

特称命题 p：$\exists x_0\in M, p(x_0)$．

它的否定 $\neg p$：________．

特称命题的否定是全称命题.

学习点津

1. 全称命题“对 M 中任意一个 x，有 $p(x)$ 成立”可用符号简记为 $\forall x\in M, p(x)$；所陈述的性质是某集合中元素都具有的性质；它的一般形式：

$$\left.\begin{matrix}\text{所有的}\\\text{任意的}\end{matrix}\right\}\text{有(无)}p$$

2. 特称命题“存在 M 中的一个 x_0，使 $p(x_0)$ 成立”可用符号简记为 $\exists x_0\in M, p(x_0)$；所陈述的性质是指某集合中部分元素具有的性质；它的一般形式：

$$\left.\begin{matrix}\text{存在着}\\\text{至少有一个}\\\text{有的}\end{matrix}\right\}\text{有(无)}p$$

3. 全称命题与特称命题的否定

全称命题的否定是特称命题，特称命题的否定是全称命题．

问题探究

题型一　判断全称命题、特称命题的真假

1. 判断下列命题是全称命题还是特称命题，并判断真假：

(1)所有的正整数都是有理数；

(2)有的向量方向不确定；

(3)$\forall x\in\mathbf{R}, x^2\geqslant 1$；

(4)$\exists x_0\in\mathbf{N}, x_0^3<x_0^2$.

分析：全称命题是指含有全称量词的命题，特称命题是指含有特称量词的命题．判断全称命题和特称命题的真假可以利用全称命题和特称命题的特点.

解：(1)(3)是全称命题，(2)(4)是特称命题.

(1)是真命题，因为有理数包括正整数.

(2)是真命题，因为零向量方向是不确定的．

(3)是假命题，因为 $\exists 0\in\mathbf{R}, 0^2<1$.

(4)是假命题，因为当 $x=0$ 或 1 时，$x^3=x^2$；当 $x>1$ 时，$x^3-x^2=x^2(x-1)>0$，即 $x^3>x^2$．所以 $\forall x\in\mathbf{N}, x^3\geqslant x^2$.

方法与规律：在数学中，命题“若 $p(x)$，则 $q(x)$”应理解为，它是关于某集合 M 的一切元素 x 的全称命题，例如：若 $\frac{x}{4}>3$，则 $x>12$，通常的意思是：$\forall x\in\mathbf{R}$，若 $\frac{x}{4}>3$，则 $x>12$.

[变式 1]判断下列命题是不是全称命题或特称命题．并判断真假．

(1)$\exists x, x-2\leqslant 0$；

(2)矩形的对角线垂直平分；

(3)凡三角形两边之和大于第三边；

(4)有些质数是奇数．

题型二　含有一个量词的命题的否定

2. 写出下列命题 p 的否定 $\neg p$，并判断它们的真假：

(1)不论 m 取何实数，方程 $x^2+x-m=0$ 必有实数根；

(2)若直线 $l\perp$ 平面 α，则 $\forall m\subset\alpha, l\perp m$；

(3)$\exists x_0\in\mathbf{R}, x_0^2+2x_0+3\leqslant 0$；

(4)有的四边形四个内角全相等.

分析：在明确命题的条件与结论的前提下，否定一个命题就是否定这个命题的结论. 对于含一个量词的全称命题或特称命题，还需要改变其中的全称量词或特称量词，即相应的全称量词变为存在量词、存在量词变为全称量词.

解：(1)$\neg p$：存在一个实数 m_0，使方程 $x^2+x-m_0=0$ 没有实数根.

由 $\Delta=1+4m<0$，得 $m<-\frac{1}{4}$，故 $\neg p$ 为真命题，从而 p 为假命题．

(2)$\neg p$：若直线 $l\perp$ 平面 α，则 $\exists m\subset\alpha$，l 和 m 不垂直．

由直线与平面垂直的定义可知，p 为真命题，所以 $\neg p$ 为假命题．

(3)$\neg p$：$\forall x\in\mathbf{R}, x^2+2x+3>0$.

因为 $\forall x\in \boldsymbol{R}, x^2+2x+3=(x+1)^2+2>0$，所以 $\neg p$ 为真命题，从而 p 为假命题.

(4) $\neg p$：所有四边形的四个内角不全相等.

因为正方形的四个内角相等，所以 p 为真命题，从而 $\neg p$ 为假命题.

方法与规律：若命题为真，则命题的否定一定为假，可借助于它来判断命题否定的真假，这也是判断我们对命题进行的否定是否正确的依据.

[变式 2]写出下列命题的否定，并判断真假：

(1)一切分数都是有理数；

(2)有些三角形是锐角三角形；

(3) $\forall x\in \mathbf{R}; 2x+4\geqslant 0$；

(4) $\exists x\in \mathbf{R}; x^2+x=x+2$.

题型三 利用全称命题、特称命题求字母取值范围

3. 为了使下列 $q(x)$ 为真命题，求 x 的取值范围.

(1) $q(x): x^2-2x-3>0$；

(2) $q(x): \dfrac{x-7}{x+5}<0$.

解：

水平测试

基础级

1. 下列命题中为全称命题的是(　　)

A. 有些圆内接三角形是等腰三角形

B. 存在一个实数与它的相反数的和不为零

C. 所有矩形都有外接圆

D. 过直线外一点有一条直线和已知直线平行

2. 下列全称命题中真命题的个数是(　　)

①个位是 0 的整数，可以被 3 整除；

②角平分线上的任意一点到这个角的两边的距离相等；

③ $\forall x\in \mathbf{Z}, 2x^2+1$ 为奇数.

A. 0　　B. 1

C. 2　　D. 3

3. 下列特称命题中假命题的个数是(　　)

① $\exists x\in \mathbf{R}, x\leqslant 0$；

②有的菱形是正方形；

③至少有一个整数，它既不是合数，也不是素数.

A. 0　　B. 1

C. 2　　D. 3

4. 命题“任意一个偶函数的图像关于 y 轴对称”的否定是(　　)

A. 任意一个偶函数的图像不关于 y 轴对称

B. 任意一个不是偶函数的函数图像关于 y 轴对称

C. 存在一个偶函数的图像关于 y 轴对称

D. 存在一个偶函数的图像不关于 y 轴对称

5. 命题“存在一个三角形，内角和不等于 180°”的否定为(　　)

A. 存在一个三角形，内角和等于 180°

B. 所有三角形，内角和都等于 180°

C. 所有三角形，内角和都不等于 180°

D. 所有三角形，内角和不等于 180°

6. 命题“$\forall x\in \mathbf{R}, x^2-x+1>0$”的否定是________________.

7. “任意一个三角形都没有外接圆”的否定是________________.

8. “$\exists x\in \mathbf{R}, x^2+x<0$”的否定是________________.

9. “存在实数 m，使关于 x 的方程 $x^2+mx+1=0$ 有实数根”的否定是________________.

10. 用符号“$\forall$”、“$\exists$”表达下列命题：

(1)实数的平方大于等于零；

(2)存在一个实数 x，使 $x^3>x^2$；

(3)存在一对实数对，使 $2x+3y+3<0$ 成立；

(4)勾股定理.

能力级

11. 用符号"∀"与"∃"表示含有量词的命题 p：已知二次函数 $f(x)=a(x^2+1)+b(x+1)$，则存在实数 a,b，使不等式 $x\leqslant f(x)\leqslant\frac{1}{2}(x^2+1)$ 对任意实数 x 恒成立.

12. 判断下列命题是全称命题还是特称命题，并判断其真假：

(1)对数函数都是单调函数；

(2)至少有一个整数，它既能被 2 整除又能被 5 整除；

(3) $\exists x\in\{x|x\in\mathbf{Z}\}$，$\log_2 x>0$.

13. 设函数 $f(x)=x^2-2x-m$：

(1)若 $\forall x\in[-1,2]$，$f(x)\geqslant0$，求 m 的取值范围；

(2)若 $\exists x\in[-1,2]$，$f(x)\geqslant0$，求 m 的取值范围.

单元测试题

一、选择题

1. 下列四个命题中，真命题是(　　)

A. 若 $x+8>0$，则 $x>-3$

B. 若 $q>1$，则方程 $x^2+2x+q=0$ 没有实数根

C. 矩形的对角线互相垂直且平分

D. 相似三角形一定是全等三角形

2. 在$\triangle ABC$中，$\sin A=\sin B$ 是$\triangle ABC$为等腰三角形的(　　)

A. 充分而不必要条件

B. 必要而不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

3. 命题"$\exists\{a_n\}$，使$\{a_n\}$既是等差数列又是等比数列"是(　　)

A. 特称命题并且是假命题

B. 全称命题并且是假命题

C. 特称命题并且是真命题

D. 全称命题并且是真命题

4. 已知 p:$x+y\neq 3$，q:$x\neq 1$ 或 $y\neq 2$，则 p 是 q 的(　　)

A. 充分而不必要条件

B. 必要而不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

5. 若"$p\wedge q$"与"$(\neg p)\vee q$"均为假命题，则(　　)

A. p 真 q 假　　B. p 假 q 真

C. p 与 q 均真　　D. p 与 q 均假

6. 已知 p 是 r 的充分而不必要条件，q 是 r 的充分条件，s 是 r 的必要条件，q 是 s 的必要条件，则 s 是 q 的(　　)

A. 充分而不必要条件

B. 必要而不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

7. 设 p，q 是两个命题，则"$p\wedge q$"为假命题是"$p\vee q$"为假命题的(　　)

A. 充分而不必要条件

B. 必要而不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

8. 平面 $\alpha//$平面 β 的一个充分条件是(　　)

A. 存在一条直线 a，$a//\alpha$，$a//\beta$

B. 存在一条直线 a，$a\subset\alpha$，$a//\beta$

C. 存在两条平行直线 a，b，$a\subset\alpha$，$b\subset\beta$，$a//\beta$，$b//\alpha$

D. 存在两条异面直线 a，b，$a\subset\alpha$，$b\subset\beta$，$a//\beta$，$b//\alpha$

9. $\forall a,b,c\in\mathbf{R}$，下列命题中真命题的个数是(　　)

①"$a=b$"是"$ac=bc$"的充要条件；

②"$a+5$ 是无理数"是"a 是无理数"的充要条件；

③"$a>b$"是"$a^2>b^2$"的充分条件；

④"$a<5$"是"$a<3$"的必要条件．

A. 1　　B. 2

C. 3　　D. 4

10. 已知命题 p：$\exists x\in\mathbf{R}$，使 $\tan x=1$，命题 q：若 $f(x)=\log_2 x$，则 $f(|x|)$是偶函数．则下列结论中正确的是(　　)

①命题"$p\wedge q$"是真命题；

②命题"$p\wedge(\neg q)$"是假命题；

③命题"$(\neg p)\vee q$"是真命题；

④命题"$(\neg p)\wedge(\neg q)$"是假命题．

A. ②③　　B. ①②④

C. ①③④　　D. ①②③④

二、填空题

11. 命题"$\exists x\in\mathbf{R}$，$x\leqslant 1$ 或 $x^2>4$"的否定是__________．

12. 命题"$\forall x\in\mathbf{Z}$，$2x+1$ 是整数"的逆命题是__________．

13. 已知 p:$mx^2+1>0$ 的解集是 $\mathbf{R}$，q:$\log_m x$ 是减函数．若 $p\wedge q$ 为真，则 m 的范围是__________．

14. $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 是两个不共线的向量 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{e}_1+k\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{b}=k\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2$，则 $\boldsymbol{a}//\boldsymbol{b}$ 的充要条件是__________．

15. 设 $f(x)=\log_2(x+\sqrt{x^2+1})$，则"$\forall a,b\in\mathbf{R}$，$a+b\geqslant 0$"是"$f(a)+f(b)\geqslant 0$"的__________条件．

16. 设有一组圆 C_k：$(x-k+1)^2+(y-3k)^2=2k^4$　$(k\in\mathbf{N}^*)$，则下列四个命题中真命题的序号是