数学分析解题指南

（下　册）

毛羽辉　蒋国芳
郑英元　杨庆中　编著

华东师范大学数学系

一九八五年九月

数学分析解题指南

下　　册

毛羽辉　　蒋国芳

编

郑英元　　杨庆中

华东师范大学数学系

目　　录

第十一章　数项级数

（一）解题指导

1． 按定义，数项级数是归结为一类数列极限问题来讨论。当且仅当数项级数的部分和极限存在时，和式 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 才有实际上的含义。

判别级数收敛性的方法，在本章主要有两种：一是研究部分和极限，另一是应用柯西准则（如11，1，6和阿贝尔判别法等）．对部分和的研究也有两个途径：一个是先求出部分和表达式，接着研究它的极限的存在性。如果收敛，这时还同时得到它的和数（如11．1．1和11．B．1（2）、（3）等），另一个途径则是通过对部分和估计式的讨论来判断它的敛散性，如正项级数的比较原则和由它导出的一些判别法（见§2习题）。

今后在第十四章和第十五章，还将由函数的展开式来获得某些数项级数的收敛性并求得它的和数。

11．B．1（2）和11．B．1（3）这两题分别介绍两种常见的求部分和表达式方法，可供读者解题时参考。

2． 对正项级数收敛性考察，通常是先试用比式判别法鉴别，如果不能获得答案，则考虑用根式判别法。如仍不能获得答案，那就要考虑其他较为复杂的方法了。或寻求已知敛散性的级数，应用比较原则来判定。但是也不是什么题都按此程序进行，如级数的项是n的某种指数形式。如正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^{-n-(-1)^n}$，就应先用根式判别法试一试，它由于

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to}\sqrt[n]{2^{-n-(-1)^n}}=\lim_{n\to\infty}2^{-1-\frac{(-1)^n}{n}}$$

$= \frac{1}{2} < 1$

得原级数收敛。但若用比式判别法，则由于$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 2^{-1+2(-1)^n}$

及 $\frac{u_{2n+2}}{u_{2n+1}} = \frac{1}{8} < 1$ ，$\frac{u_{2n+1}}{u_{2n}} = 2 > 1$

而无法判断其敛散性。

11.B.2 题给出正项级数的对数判别法，它比根式判别更有效。有关练习见11.B.3 各题

3．11.1.8给出一种并项方法以判断正项级数的收敛性，也称为"柯西凝聚判别法"。可用于收敛较慢的级数，如11.A.7。在11.A.1证明中也用到这个方法。11.B.6 是11.1.8的推广形式。

4.凡能用莱布尼兹判别法确定其收敛的交错级数也一定能用狄利克雷判别法检验，但应要求用莱伯尼兹判别法。如11.3.1，11.3.7和11.3.8。11.B.5是莱伯尼兹判别法的一般形式。

5．在讨论一般项级数的收敛性时，不能套用正项级数的一些结论。如在11.2.4中，如果对收敛级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$，删去正项这一条件，则 $\sum_{n=1}^{\infty} a^2_n$就不一定收敛，

例如$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \sqrt{\frac{1}{n}}$是收敛的，

但 $\sum_{n=1}^{\infty} \left((-1)^{n-1} \sqrt{\frac{1}{n}}\right)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 却是发散级数。

（二）习题解答（或提示）

11.1.1　验证下列级数的收敛性，并求其和数：

（1）　$\frac{1}{1 \cdot 6} + \frac{1}{6 \cdot 11} + \frac{1}{11 \cdot 16} +$

$$\cdots+\frac{1}{(5n-4)(5n+1)}+\cdots; +$$

(2) $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}\right)$

$$+\cdots+\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}\right)+\cdots;$$

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$;

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n})$。

解 (1) 因为 $\frac{1}{(5n-4)(5n+1)}$

$$=\frac{1}{5}\left(\frac{1}{5n-4}-\frac{1}{5n+1}\right)，所以$$

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(5k-4)(5k-1)}$$

$$=\frac{1}{5}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{5k-4}-\frac{1}{5k+1}\right)$$

$$=\frac{1}{5}\left(1-\frac{1}{5n+1}\right)$$

因而

$$\lim_{n\to\infty}s_n=\lim_{n\leftarrow\infty}\frac{1}{5}\left(1-\frac{1}{5n+1}\right)=\frac{1}{5}$$

得原级数收敛，其和数为$\frac{1}{5}$。

(2) 由于几何级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=1$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}=\frac{1}{2}$ 根据课本§1定理2得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}$$
$$=\frac{3}{2}$$

（3）因为 $\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{2}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)-\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)\right]$$

所以 $S_n=\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k(k+1)(k+2)}$

$$=\frac{1}{2}\left[\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)\right.$$
$$\left.-\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)\right]$$
$$=\frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{1}{n+1}\right)-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}\right)\right]$$

因而 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\dfrac{1}{4}$，故原级数收敛，且和数等于$\dfrac{1}{4}$。

（4） 由于

$$Sn=\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k+2}-2\sqrt{k+1}+\sqrt{k})$$
$$=\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k+2}-\sqrt{k+1})-\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k+1}-\sqrt{(k)}$$
$$=\sqrt{n+2}-\sqrt{2}-\sqrt{n+1}+1$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}Sn=\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}+1-\sqrt{2})=1-\sqrt{2}$

故原级数收敛，且和数等于 $1-\sqrt{2}$。

11.1.2　已知级数部分和 $S_n=\frac{n+1}{n}$，写出这个级数。

解　设级数为

$$u_1+u_2+\cdots+\cdots+u_n+\cdots$$

则　$u_1=S_1=\frac{1+1}{1}=2$，

$$u_n=S_n-S_{n-1}=\frac{n+1}{n}-\frac{(n-1)+1}{n-1}=\frac{-1}{n(n-1)},$$

$(n=2，3，\cdots)$。所以这个级数为 $2-\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(n-1)}$

11.1.3　证明：若数列 $\{a_n\}$ 收敛于a，

则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n-a_{n+1})=a_1-a$。

证　级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n-a_{n+1})$ 的部分和

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}(a_k-a_{k+1})=a_1-a_n。$$

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，所以

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}(a_1-a_n)=a_1-a。$$

11.1.4　证明：若数列 $\{b_n\}$ 有 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\infty$，则

（1）　级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(b_{n+1}-b_n)$ 发散；

（2）　当 $b_n\neq0$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{b_n}-\frac{1}{b_{n+1}}\right)=\frac{1}{b_1}$

証 （1）由于 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}(b_{k+1}-b_k)$

$=\lim\limits_{n\to\infty}(b_{n+1}-b_1)=\infty$，故级数

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(b_{n+1}-b_n)$ 发散。

（2）由于 $\lim\limits_{n\to\infty} Sn = \lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}\left(\frac{1}{b_k}-\frac{1}{b_{k+1}}\right)$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{b_1}-\frac{1}{b_{n+1}}\right)=\frac{1}{b_1}$ 即得所证。

11.1.5 应用第3，4题(即11.1.3和11.1.4)的结果求下列级数的和：

（1） $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(\alpha+n-1)(\alpha+n)}\ (\alpha\neq 0)$；

（2） $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2n+1}{n(n+1)}$；

（3） $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{(n^2+1)[(n+1)^2+1]}$.

解 （1）由于

$$\frac{1}{(\alpha+n-1)(\alpha+n)}=\frac{1}{\alpha+n-1}-\frac{1}{\alpha+n}$$

及 $a_n=\frac{1}{\alpha+n-1}\to 0\ (n\to\infty)$，$a_1=\frac{1}{\alpha}$.

根据11.1.3的结论得

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(\alpha+n-1)(\alpha+n)}$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\alpha+n-1}-\frac{1}{\alpha+n}\right)=\frac{1}{\alpha}$$

（2） 由于

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2n+1}{n(n+1)} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{n+1}}{n}-\frac{(-1)^{n+2}}{n+1}\right)$$

及 $a_n=\frac{(-1^{n+1})}{n}\to 0\ (n\to\infty)$，$a_1=1$，根据11.1.3的结论得

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2n+1}{n(n+1)}=a_1=1$$

（3） 由于

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{(n^2+1)[(n+1)^2+1]}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2+1}-\frac{1}{(n+1)^2+1}\right)$$

及$b_n=n^2+1\to\infty\ (n\to\infty)$，根据11.1.4(2)的结果得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{(n^2+1)[(n+1)^2+1]}=\frac{1}{b_1}=\frac{1}{2}$$

11.1.6 应用柯西准则判别下列级数的敛散性：

（1） $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2^n}{2^n}$；　　（2） $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}n^2}{2n^2+1}$；

（3） $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$；　　（4） $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+n^2}}$。

解 （1）由于

$$\left|u_{m+1}+u_{m+2}+\cdots+u_{m+p}\right|$$

$$\leqslant\left|\frac{\sin 2^{m+1}}{2^{m+1}}+\frac{\sin 2^{m+2}}{2^{m+2}}+\cdots+\frac{\sin 2^{m+p}}{2^{m+p}}\right|$$

$$\leqslant\frac{1}{2^{m+1}}+\frac{1}{2^{m+2}}+\cdots+\frac{1}{2^{m+p}}$$

$$=\frac{1}{2^{m}}\left(1-\frac{1}{2^{p}}\right)<\frac{1}{2^{m}}$$

故对任给$\varepsilon>0$，取$N=\left[\frac{-\ln\varepsilon}{\ln 2}\right]$，使得当$m>N$及任何自然数中$p$，都有

$$\left|u_{m+1}+u_{m+2}+\cdots+u_{m+p}\right|<\frac{1}{2^{m}}<\varepsilon$$

由课本§1定理1′得级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2^{n}}{2^{n}}$收敛。

注 求解本题时，读者可参阅习题2.3.3(1)。

(2) 由于对任何自然数n，都有

$$\left|u_{n}\right|=\left|\frac{(-1)^{n-1}n^{2}}{2n^{2}+1}\right|=\left|\frac{n^{2}}{2n^{2}+1}\right|\geqslant\frac{n^{2}}{2n^{2}+n^{2}}=\frac{1}{3}$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}u_{n}\neq 0$，根据课本§1定理1推论原级数发散。

(3) 提示对任何自然数m及p，应用下述不等式即可证得原级数收敛

$$\left|u_{m+1}+u_{m+2}+\cdots+u_{m+p}\right|$$

$$=\left|\frac{(-1)^{m+1}}{m+1}+\cdots+\frac{(-1)^{m+p}}{m+p}\right|$$

$$=\left|\frac{1}{m+1}-\frac{1}{m+2}+\cdots+(-1)^{p-1}\frac{1}{m+p}\right|$$

$$< \begin{cases} \dfrac{1}{m+1}-\left(\dfrac{1}{m+2}-\dfrac{1}{m+3}\right) \\ -\cdots-\left(\dfrac{1}{m+p-2}-\dfrac{1}{m+p-1}\right)-\dfrac{1}{m+p}, \\ p\text{为偶数。} \\ \dfrac{1}{m+1}-\left(\dfrac{1}{m+2}-\dfrac{1}{m+3}\right) \\ -\cdots-\left(\dfrac{1}{m+p-1}-\dfrac{1}{m+p}\right),\ p\text{为奇数。} \end{cases}$$

$$< \frac{1}{m+1}$$

（4）提示：对任何自然数m，应用下述不等式即可推得原级数发散。

$$|u_{m+1}+\cdots+u_{2m}|$$

$$=\left|\frac{1}{\sqrt{(m+1)+(m+1)^2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{(2m)+(2m)^2}}\right|$$

$$\geqslant \frac{1}{\sqrt{2(m+1)^2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{2(2m)^2}}$$

$$\geqslant \frac{1}{\sqrt{2}}m\frac{1}{2m}=\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

11.1.7 证明：级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛的充要条件是：任给正数$\varepsilon$，存在某自然数$N$，对一切$n>N$总有

$$|u_N+u_{N+1}+\cdots+u_n|<\varepsilon$$

证 必要性 因为级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，由柯西准则对任给的

$\varepsilon < 0$，总存在某自然数N，当$n > m \geqslant N$时，都有

$$|u_{m+1}+u_{m+2}+\cdots+u_n| < \varepsilon$$

那么当$m=N$，$n>m$时当然也成立。

充分性　由已知条件，对任给正数$\varepsilon/2$，存在自然数N，对一切$n>m>N$时，有

$$|u_N+u_{N+1}+\cdots+u_n| < \frac{\varepsilon}{2},$$

$$|u_N+u_{N+1}+\cdots+u_m| < \frac{\varepsilon}{2}$$

因而也有

$$\begin{aligned}&|u_m+u_{m+1}+\cdots+u_n|\\ &=|(u_N+u_{N+1}+\cdots+u_n)-(u_N+u_{N+1}+\cdots+u_m)|\\ &\leqslant|u_N+u_{N+1}+\cdots+u_n|+|u_N+u_{N+1}+\cdots+u_m|\\ &<\varepsilon/2+\varepsilon/2=q\end{aligned}$$

由级数收敛的柯西准则得级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛。

11.1.8　举例说明：若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$对每一个自然数p满足条件

$$\lim_{n\to\infty}(u_n+u_{n+1}+\cdots+_{n+p})=0$$

则这级数不一定收敛。

解　以调和级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$为例，虽然对每一个自然数p都有

$$0<\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{n+p}<\frac{p}{n}\to 0\,(n\to\infty)$$

但它是发散的（见课本下册第4页）。

11.2.1　应用比较原则判别下列级数的敛散性：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+a^2}$;　(2) $\sum_{n=1}^{\infty}2^n\sin\frac{\pi}{3^n}$;

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{1+n^2}}$;　(4) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^n}$;

(5) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)$;

(6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$;

(7) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(a^{\frac{1}{n}}+a^{-\frac{1}{n}}-2\right)$, $(a>0)$;

(8) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$.

解　(1) 对任何自然数n，都有$\frac{1}{n^2+a^2}<\frac{1}{n^2}$，而级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$是收敛，由比较原则知道原级数是收敛的。

(2) 因为$\lim_{n\to\infty}2^n\sin\frac{\pi}{3^n}\Big/2^n\frac{\pi}{3^n}=1>0$，而几何级数$\sum_{n=1}^{\infty}\pi\left(\frac{2}{3}\right)^n$收敛，由比较原则的推论得原级数敛。

(3) 因为$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+n^2}}\Big/\frac{1}{n}=1>0$，而调和级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散，由比较原则的推论得原级数发散。

注　本题也可利用不等式$\frac{1}{\sqrt{1+n^2}}>\frac{1}{\sqrt{1+2n+n^2}}$

$=\frac{1}{1+n}>\frac{1}{2n}$推得。

（4）当$n\geqslant 8$时总有$2<\ln n$，因而有$\frac{1}{(\ln n)^n}<\frac{1}{2^n}$，

因为$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$是收敛级数，由比较原则得原级数也收敛。

（5）由于$\lim_{n\to\infty}\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)\Big/\left(\frac{1}{2n}\right)^2$

$=\lim_{n\to\infty}\sin^2\frac{1}{2n}\Big/\left(\frac{1}{2n}\right)^2=1>0$，而级数

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n}\right)^2$收敛，所以级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)$也收敛。

（6）由于$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}\Big/\frac{1}{n}=1>0$和$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$是发散级数，依比较原则原级数也发散。

（7）因为$\left(a^{\frac{1}{n}}+a^{-\frac{1}{n}}-2\right)$

$=\left(a^{\frac{1}{n}}-1\right)^2a^{-\frac{1}{n}}$，由罗比塔法则

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}}=\ln a$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^{\frac{1}{n}}+a^{-\frac{1}{n}}-2}{\frac{1}{n^2}}$$

$$=\lim_{n\to\infty} a^{-\frac{1}{n}}\left(\frac{a^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}\right)^2$$

$$=(\ln a)^2$$

故由级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛，得原级数也收敛。

（8） 因为 $(\ln n)^{\ln n}=n^{\ln\ln n}$ 和当n充分大时有 $\ln\ln n>2$，故当n充分大时应有 $(\ln n)^{\ln n}>n^2$ 或 $\frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}<\frac{1}{n^2}$。由于级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛和比较原则性判断得原级数也收敛。

11.2.2 用比式判别法或根式判别法鉴定下列级数的敛散性：

（1） $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{n!}$；

（2） $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)!}{10^n}$；

（3） $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$；

（4） $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$；　　（5） $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}$

（6） $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{b}{a_n}\right)^n$，(其中 $a_n\to a(n\to\infty)$；a_n，

$a, b>0$，且$a \neq b$)

（1） 应用比式判别法，由于

$$\lim_{n \to \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \to \infty} \frac{2n+1}{n+1} = 2 > 1$$

故原级数发散。

（2） 应用比式判别法，由于 $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} =$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n+2}{10} = \infty$$。故原级数发散。

（3） 应用根式判别法，由于

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \to \infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} < 1$$

故原级数收敛。

（4） 应用比式判别法，由于

$$\lim_{n \to \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{e} < 1$$

故原级数收敛。

（5） 提示：本题可仿照（3）或（4）的方法，判得原级数收敛。

（6） 应用根式判别法，因为

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \to \infty} \frac{b}{a_n} = \frac{b}{a}$$

故当时$a>b$时，原级数收敛。而当$a<b$时，原级数发散。

11.2.3 证明定理2的推论2：设正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$，存在某自然数$N_0$，对一切$n>N_0$，有$u_n \neq 0$，