



2004

全国各地



高考试题评析

主编：郝 澎

数 学



龍門書局

[www.Longmen.com.cn](http://www.Longmen.com.cn)

2004

全国各地



高考试题评析

数学

- 主 编 郝 澎  
● 编 者 雷晓莉 赵中华 刘叔才  
李志慧 张 韬 吴 鹏  
高 军

龍 門 書 局

北京

**版权所有 翻印必究**

本书封面贴有科学出版社、龙门书局激光防伪标志，  
凡无此标志者均为非法出版物。

举报电话：(010)64034160 13501151303(打假办)

邮购电话：(010)64000246

**图书在版编目(CIP)数据**

2004 年全国各地 12 套高考试题评析. 数学/郝澎主编. 北京: 龙  
门书局, 2004. 7

ISBN 7-80191-880-0

I. 2... II. 郝... III. 数学课—高中—解题—升学参考资料  
IV. G632.479

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 073038 号

责任编辑 李敬东 秦淑灵

**龙 门 书 局 出 版**

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码: 100717

<http://www.longmen.com.cn>

中国人民解放军第 1201 工厂印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

\*

2004 年 7 月第 一 版 开本: 1/16(890×1240)

2004 年 7 月第一次印刷 印张: 7 3/4

印数: 1—25 000 字数: 273 000

**定 价: 10.00 元**

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

## 前 言

为了适应全面推进素质教育的新形势,2004年全国普通高等学校招生统一考试有上海、北京、天津、重庆、辽宁、江苏、浙江、福建、湖南、湖北和广东等十一个省市自行单独组织高考命题。2004年全国全面推行3+X考试科目,其中的X,大部分省市采用了文科综合理科综合的模式,辽宁省采用了文理综合的模式,少部分省市采用单科+文理综合的模式,江苏省采用单科的模式。除了北京等六个省市仍采用旧教材考试之外,其他省市都采用了新教材考试。同时,教育部考试中心为了适应不同省市的要求,还命制了四套试题供全国不同地区选用。这样,2004年高考共出现了15套试卷,打破了全国使用一张试卷的格局。

分省命题适应了各地实施素质教育和推进高中课程改革的需要,体现了各地在教育方面实际存在的差异。分省命题并没有改变全国高等学校招生统一考试的性质。分省命题都要按照全面贯彻国家教育方针和推进素质教育的要求,统一执行教育部颁布的《考试大纲》;稳步推进考试内容的改革,特别注重对考生综合运用知识来分析问题、解决问题的能力考查,充分发挥高考命题对基础教育实施素质教育的引导作用。15套试题各有特色,但都体现了高考改革的方向,体现了考试大纲对于考生知识和能力的各方面要求,体现了各地对于全面实施素质教育的要求。研究这15套试题,认识高考命题的走向,对2005年高考复习工作具有重要指导意义。

北京市东城区高考指导研究组和名师教学研究工作室由北京市特级教师领衔,汇集了全区优秀中、青年骨干教师,在研究2004年全国15套高考试题的基础上,编写了《2004年全国各地12(14)套高考试题评析》。全书分三部分:第一部分,根据2005年全国都使用新教材的特点,从15套试题中选择了其中的12(14)套试题,供读者认识试题的全貌;第二部分,对12(14)套试题逐题进行评析,指明各题的解题思路、立意和学生易犯的错误;第三部分,结合对高考试题的评析,提出2005年各科复习建议。本丛书集中了北京市东城区名师工作室多年来对高考研究的成果,是认识2005年高考命题走向和准备高考的良师益友。

由于时间紧迫,书中难免出现疏漏,恳请读者批评指正。

# 目 录

|                                     |         |
|-------------------------------------|---------|
| 2004 年高考试题全国卷评析 .....               | ( 1 )   |
| 2004 年全国统一考试(教育部考试中心 A 卷) .....     | ( 6 )   |
| 2004 年全国统一考试(教育部考试中心 A 卷)试题解析 ..... | ( 9 )   |
| 2004 年全国统一考试(教育部考试中心 B 卷) .....     | ( 15 )  |
| 2004 年全国统一考试(教育部考试中心 B 卷)试题解析 ..... | ( 18 )  |
| 2004 年全国统一考试(教育部考试中心 C 卷) .....     | ( 24 )  |
| 2004 年全国统一考试(教育部考试中心 C 卷)试题解析 ..... | ( 27 )  |
| 2004 年全国统一考试(北京卷) .....             | ( 32 )  |
| 2004 年全国统一考试(北京卷)试题解析 .....         | ( 35 )  |
| 2004 年全国统一考试(天津卷) .....             | ( 40 )  |
| 2004 年全国统一考试(天津卷)试题解析 .....         | ( 43 )  |
| 2004 年全国统一考试(重庆卷) .....             | ( 49 )  |
| 2004 年全国统一考试(重庆卷)试题解析 .....         | ( 52 )  |
| 2004 年全国统一考试(浙江卷) .....             | ( 57 )  |
| 2004 年全国统一考试(浙江卷)试题解析 .....         | ( 60 )  |
| 2004 年全国统一考试(福建卷) .....             | ( 66 )  |
| 2004 年全国统一考试(福建卷)试题解析 .....         | ( 69 )  |
| 2004 年全国统一考试(湖北卷) .....             | ( 76 )  |
| 2004 年全国统一考试(湖北卷)试题解析 .....         | ( 79 )  |
| 2004 年全国统一考试(湖南卷) .....             | ( 85 )  |
| 2004 年全国统一考试(湖南卷)试题解析 .....         | ( 88 )  |
| 2004 年全国统一考试(广东卷) .....             | ( 94 )  |
| 2004 年全国统一考试(广东卷)试题解析 .....         | ( 97 )  |
| 2004 年全国统一考试(江苏卷) .....             | ( 103 ) |
| 2004 年全国统一考试(江苏卷)试题解析 .....         | ( 106 ) |
| 2005 年高考数学学科复习建议 .....              | ( 112 ) |

## 2004 年高考试题全国卷评析

今年全国高考数学共有 15 套试卷,其中辽宁、江苏、广东三省是文、理合卷,其他省市都是文、理分卷,这样共有 27 份试卷.对这些试卷总的印象是平和、平静、平易近人.平和是指试卷以《考试大纲》为依据,试题贴近中学教学,给人以一种似曾相识的感觉;平静是指学生和教师的总体反应,基本没有偏题、怪题,与平时的教学和高三复习相吻合;平易近人是指有的试卷尤其是考试中心命制的四份试卷给人以亲切感,多年形成的命题指导思想以及去年评价报告中的评价意见,在试卷中得到了充分的体现,使“考”和“教”这对矛盾在这四份试卷中得到了最完美的结合,是多年来不可多得的好试卷.

由于今年试卷的套数多,题目多,给总体评价带来了一定困难.为了科学地进行评价,我们把评价的依据确定为《考试大纲》,以及考试中心在多年命题过程中逐渐形成的命题原则和命题方法.下面我们从对知识内容、思想方法、能力素质的考查特点,以及文、理两卷的差异等方面,以教育部考试中心命制的四套试卷为主,进行评价分析.

### 一、对基础知识的考查特点

高考考什么?简单地讲就是考基础知识,考思想方法,考能力素质,并且这三者之间是递进的关系:

基础知识——思想方法——能力素质

是以基础知识为素材,以思想方法为核心,以能力素质为目的.今年的各套高考试卷,尤其是考试中心命制的四套试卷,给我们的印象是加强了对基础知识的考查,体现出了对基础内容考查的全面性、基础性、重要性和综合性.下面我们仅从两个方面进行阐述.

#### 1. 加强对课本内容的考查

课本是学生学习的主要工具,也应该作为考试的主要依据.高考虽然是选拔性的考试,但也必须起步于基础,近年来的高考命题改革,把突出考查能力放在了改革的首位,难免会出现顾此失彼的现象.在今年的高考试卷中我们发现,对基础知识的考查有所加强,主要体现在突出对课本内容的考查.下面我们以考试中心的 A、B、C 三套试卷为例,罗列出与课本相关的试题,通过比较可以看出命题改革的方向.

#### (1) A 卷 文科第(1)题:

设集合  $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ,  $A = \{1, 2, 3\}$ ,  $B = \{2, 5\}$ , 则  $A \cap$

$(\complement_U B) =$  ( )

A.  $\{2\}$       B.  $\{2, 3\}$       C.  $\{3\}$       D.  $\{1, 3\}$

与数学课本第一册(上)P13

例 8 设  $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ ,  $A = \{3, 4, 5\}$ ,  $B = \{4, 7,$

$8\}$ , 求  $\complement_U A, \complement_U B, (\complement_U A) \cap (\complement_U B), (\complement_U A) \cup (\complement_U B)$ .

基本相同.

#### (2) A 卷 文科第(3)题:

已知  $a, b$  均为各单位向量, 它们的夹角为  $60^\circ$ , 那么  $|a + 3b| =$  ( )

A.  $\sqrt{7}$       B.  $\sqrt{10}$       C.  $\sqrt{13}$       D. 4

与数学课本第一册(下)P119 习题 5.6

1. 已知  $|a| = 3, |b| = 4$ , 则  $a$  与  $b$  的夹角  $\theta = 150^\circ$ , 求  $a \cdot b, (a + b)^2, |a + b|$ .

基本相同.

#### (3) A 卷 文科第(4)题:

函数  $y = \sqrt{x-1} + 1 (x \geq 1)$  的反函数是 ( )

A.  $y = x^2 - 2x + 2 (x < 1)$       B.  $y = x^2 - 2x + 2 (x \geq 1)$

C.  $y = x^2 - 2x (x < 1)$       D.  $y = x^2 - 2x (x \geq 1)$

与数学课本第一册(上)P64—65 习题 2.4

1. 求下列函数的反函数: (8)  $y = \sqrt{2x-4} (x \geq 2)$

基本相同.

#### (4) A 卷 文科第(5)题:

$\left(2x^3 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^7$  的展开式中常数项是 ( )

A. 14      B. -14      C. 42      D. -42

与数学课本第二册(下 A)P110—111 习题 10.4

5. 求下列各式的二项展开式中指定各项的系数:

(2)  $\left(2x^3 - \frac{1}{2x^2}\right)^{10}$  的常数项.

基本相同.

#### (5) B 卷 文科第(1)题:

已知集合  $M = \{x | x^2 < 4\}$ ,  $N = \{x^2 | x^2 - 2x - 3 < 0\}$ , 则集合  $M \cap N =$  ( )

A.  $\{x | x < -2\}$       B.  $\{x | x > 3\}$   
C.  $\{x | -1 < x < 2\}$       D.  $\{x | 2 < x < 3\}$

与数学课本第一册(上)P21—22 习题 1.5

7. 已知  $U = \mathbf{R}$ , 且  $A = \{x^2 - 16 < 0\}$ ,  $B = \{x | x^2 - 4x + 3 \geq 0\}$ , 求: (1)  $A \cap B$ ; (2)  $A \cup B$ ; (3)  $\complement_U (A \cap B)$ ; (4)  $(\complement_U A) \cup (\complement_U B)$ .

基本相同.

#### (6) B 卷 理科第(2)题:

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 + 4x - 5} =$  ( )

A.  $\frac{1}{2}$       B. 1      C.  $\frac{2}{5}$       D.  $\frac{1}{4}$

与数学课本第三册(选修 II)P91 习题 2.5

1. 求下列极限: (9)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - 1}$

基本相同.

(7)B 卷 文科第(2)题:

函数  $y = \frac{1}{x+5} (x \neq -5)$  的反函数是 ( )

A.  $y = \frac{1}{x} - 5 (x \neq 0)$

B.  $y = x + 5 (x \in \mathbf{R})$

C.  $y = \frac{1}{x} + 5 (x \neq 0)$

D.  $y = x - 5 (x \in \mathbf{R})$

与数学课本第一册(上)P64 习题 2.4

1. 求下列函数的反函数:

(4)  $y = 1 - \frac{2}{x+3} (x \in \mathbf{R}, \text{且 } x \neq -3)$

基本相同.

(8)B 卷 文科第(3)题:

曲线  $y = x^3 - 3x^2 + 1$  在点  $(1, -1)$  处的切线方程为 ( )

A.  $y = 3x - 4$

B.  $y = -3x + 2$

C.  $y = -4x + 3$

D.  $y = 4x - 5$

与数学课本第三册(选修 I)P64 习题 2.4

5. 求曲线  $y = x^3 - 3x^2 + 1$  在点  $P(2, -3)$  处的切线的方程.

基本相同.

(9)B 卷 文科第(8)题:

已知点  $A(1, 2)$ 、 $B(3, 1)$ , 则线段  $AB$  的垂直平分线的方程是 ( )

A.  $4x + 2y = 5$

B.  $4x - 2y = 5$

C.  $x + 2y = 5$

D.  $x - 2y = 5$

与数学课本第二册(上)P53—54 习题 7.3

5. 已知两点  $A(7, -4)$ 、 $B(-5, 6)$ , 求线段  $AB$  的垂直平分线的方程.

基本相同.

(10)B 卷 文、理科第(14)题:

设  $x, y$  满足约束条件  $\begin{cases} x \geq 0, \\ x \geq y, \\ 2x - y \leq 1, \end{cases}$  则  $z = 3x + 2y$  的最大值是 \_\_\_\_\_.

C 卷 文、理科第(16)题:

设  $x, y$  满足约束条件  $\begin{cases} x + y \leq 1, \\ y \leq x, \\ y \geq 0, \end{cases}$  则  $z = 2x + y$  的最大值是 \_\_\_\_\_.

与数学课本第二册(上)P64 练习

1. (1) 求  $z = 2x + y$  的最大值, 使式中的  $x, y$  满足约束条件

$$\begin{cases} y \leq x, \\ x + y \leq 1, \\ y \geq -1. \end{cases}$$

基本相同.

(11)C 卷 文科第(1)题:

已知全集  $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ , 集合  $M = \{0, 3, 5\}$ ,  $N = \{1, 4, 5\}$ , 则集合  $M \cap (\complement_U N) =$  ( )

A.  $\{5\}$

B.  $\{0, 3\}$

C.  $\{0, 2, 3, 5\}$

D.  $\{0, 1, 3, 4, 5\}$

与数学课本第一册(上)P40—41

例 1 (4) 如果  $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ,  $M = \{1, 3, 4\}$ ,  $N = \{2, 4, 5\}$ , 那么  $(\complement_S M) \cap (\complement_S N)$  等于 ( )

A.  $\emptyset$

B.  $\{1, 3\}$

C.  $\{4\}$

D.  $\{2, 5\}$

基本相同.

(12)C 卷 理科第(3)题:

过点  $(-1, 3)$  且垂直于直线  $x - 2y + 3 = 0$  的直线方程为 ( )

A.  $2x + y - 1 = 0$

B.  $2x + y - 5 = 0$

C.  $x + 2y - 5 = 0$

D.  $x - 2y + 7 = 0$

与数学课本第二册(上)P47 练习

2. 求过点  $A(2, 3)$  且分别适合下列条件的直线的方程:

(1) 平行于直线  $2x + y - 5 = 0$

(2) 垂直于直线  $x - y - 2 = 0$

基本相同.

(13)C 卷 理科第(5)题:

不等式  $\frac{x(x+2)}{x-3} < 0$  的解集为 ( )

A.  $\{x | x < -2, \text{或 } 0 < x < 3\}$

B.  $\{x | -2 < x < 0, \text{或 } x > 3\}$

C.  $\{x | x < -2, \text{或 } x > 0\}$

D.  $\{x | x < 0, \text{或 } x > 3\}$

与数学课本第二册(上)P19—20 习题 6.4

3. 解下列不等式: (1)  $\frac{x^2 - 2x - 35}{x - 2} < 0$ ; (2)  $\frac{x}{x^2 - 8x + 15} > 2$ .

基本相同.

(14)C 卷 文科第(8)题:

已知圆  $C$  的半径为 2, 圆心在  $x$  轴的正半轴上, 直线  $3x + 4y + 4 = 0$  与圆  $C$  相切, 则圆  $C$  的方程为 ( )

A.  $x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$

B.  $x^2 + y^2 + 4x = 0$

C.  $x^2 + y^2 + 2x - 3 = 0$

D.  $x^2 + y^2 - 4x = 0$

与数学课本第二册(上)P81—82 习题 7.7

2. 求下列条件所确定的圆的方程:

(2) 过点  $A(3, 2)$ , 圆心在直线  $y = 2x$  上, 与直线  $y = 2x + 5$  相切.

基本相同.

(15)C 卷 文、理科第(13)题:

$\left(x - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^8$  展开式中  $x^5$  的系数为 \_\_\_\_\_.

与数学课本第二册(下 A)P110—111 习题 10.4

5. 求下列各式的二项展开式中指定各项的系数:

(1)  $\left(1 - \frac{1}{2x}\right)^{10}$  的含  $\frac{1}{x^5}$  的项.

基本相同.

我们在三套六份试卷中找出了 15 道与课本中练习题、习题

基本相同的试题,平均每份有2.5道,所占比例较前些年有所增大.除此之外,还有一些试题是课本内例、习题改编或重组的,可称为课本类型题,由于篇幅所限我们就不一一列举了.我们认为,高考毕竟是选拔性考试,在高考试卷中课本题或课本类型题所占的比例不可能很大,但这种命题思路与方法对中学数学教学的导向作用却是难以估量的.

## 2. 加强对新增内容的考查

使用新大纲、新教材,参加新课程卷高考的省市,今年占了绝大多数,因此,在新课程卷的命制过程,加强对新增内容的考查是必然的趋势.教育部考试中心的四套试卷中有三套是新课程卷,在各省市自主命题的试卷中,除北京市外都是新课程卷.不过考试中心命制新课程卷已有四年的经验,今年是第五年,而自主命题的省市今年都是第一年.给我们的感觉是,对新增内容的考查在前几年命题的基础上有所发展,体现出全面、重点、新颖、综合的特点.

新教材与旧教材相比,增加了一些新内容,主要是简易逻辑,平面向量,空间向量,线性规划,概率与统计,极限与导数等.其中简易逻辑属于基本语言,基本关系的内容,一般是不应单独命题考查的,在今年全国的各套试卷中也有考查的,如福建卷文科第(3)题:考查的就是复合命题的真假.

平面向量属于工具性内容,在高考试卷中既使用选择题、填空题考查,也使用解答题考查,今年也不例外.使用选择题、填空题往往考查平面向量的基本概念和基本运算,使用解答题往往与解析几何相结合,以体现平面向量的工具性.在全国各套新课程卷中几乎都有一个小题考查平面向量的内容.不过考试中心的三套新课程卷中所考查的四个试题最具代表性.平面向量与解析几何的综合解答题,在考试中心的三套新课程卷中的二套都是这种模式,与近几年的命题思路保持了一致.

简单的线性规划,是解析几何中直线和圆一章中新增加的内容,具有一定的实际应用价值,但在前几年的新课程卷中却从来没有考查过.今年在高考中心命制的试卷中,B卷、C卷的文理科都命制了一道简单线性规划的题,B卷文科第(14)题,C卷文科第(16)题.这两个试题要求都比较低,属于课本的基本要求.今年开始增加对简单线性规划的考查,也说明对新增内容的考查向纵深发展.

概率、统计的内容在前几年的新课程卷中几乎每年都考,并且使用三种题型.在一份试卷中往往是一道填空题,一道解答题.试题所涉及的知识内容几乎包括了必修内容的概率和选修内容的概率与统计中可以不使用计算器进行考查的全部内容.从今年各卷对这部分内容的考查来看,基本保持了稳定.全国A卷理科第(11)题是选择题,考查的是等可能事件的概率;第(18)题是解答题,考查的是随机变量的概率分布和它的期望.全国B卷理科第(13)题是填空题,考查的是随机变量的概率分布;第(18)题是解答题,考查的是相互独立事件和互斥事件的概率.全国C卷理科只考查了一道解答题,第(19)题考查的是离散型随机变量的分布列和数学期望.

极限与导数的内容是新增内容的又一个重点.在前几年的高考试卷中,突出考查了导数的几何意义及导数的应用,也采用

一个解答题,一个选择题、填空题的方式进行.其中选择题、填空题以考查基本方法和基本应用为主,而解答题则重点体现导数的工具性,用导数的方法研究函数的单调性和最大最小值,确定切线的方程等.在今年的各套试卷中,这些考查的基本思路没有改变,也体现出了相对的稳定.全国A卷理科第(19)题是给出函数解析式且解析式中含有参数,求单调区间的试题,属于导数的基本应用类型.全国B卷理科第(22)题是求函数的最大值以及不等式的证明,求最大值仍属于导数的基本应用.全国C卷理科第(18)题是给出函数解析式且解析式中不含有参数,求最大值和最小值,也是导数的基本应用.

## 二、对思想方法的考查特点

数学思想方法是数学知识在更高层次上的抽象和概括,它蕴含于数学知识的发生、发展和应用的过程之中.

通过多年高考命题的实践与总结,提炼出了中学数学中较为重要的数学思想和方法,并进行了系统归纳与层次划分.现在被大家公认的是以下三个层次的数学思想和方法.

第一层次是数学的一般方法.它是指在解决数学问题时所使用的常规方法,如配方法、换元法、待定系数法、数学归纳法等,也包括在解决某些具体问题时所使用的更具体的方法,如代入法、比较法、割补法、构造法、解析法等等.

第二层次是思维方法.它主要是指逻辑学中的方法.这些方法不仅适用于数学内容,而且更具一般性,在数学教学中经常起作用,在高考中经常考查的,如分析法、综合法、归纳法、演绎法、观察法、试验法、特殊化方法等等.

第三层次也是最高层次的是数学思想方法.数学思想方法是对数学知识最高层次的概括与提炼,是适用于中学数学全部内容的通法.它主要包括数形结合的思想、分类讨论的思想、函数与方程的思想,归纳与转化的思想.

数学思想方法是适用于中学数学全部内容的通法,是高考考查的核心.在今年的各套试卷中能体现出突出重点,重在通性通法,淡化特殊技巧的特点.由于篇幅的限制,下面我们以考试中心的三套试卷为例,重点分析试卷中所考查的重要数学思想和方法.

### 1. 数形结合的思想

数形结合的思想是考查的一大重点,在试卷中往往突出使用选择题、填空题进行考查.对数形结合思想的考查,一般可划分为给图考图和无图考图两种类型,当然无图考图的类型要求得更高一些.在今年考试中心命制的三套试卷中,没有一题是给图考图的,都是无图考图的题,可以说明对数形结合思想的考查有所加强.考试中心A卷理科第(8)题,是抛物线与直线位置关系的试题,求的是直线斜率的取值范围,应该使用画图的方法来解决.只要在坐标系中正确画出 $y^2=8x$ 的图象,并且在抛物线上标出一到准线的距离为 $p$ 的点,此点坐标为 $(2,4)$ ,再过 $(-2,0)$ 点作直线,便可以直观判断出正确的答案.考试中心A卷理科第(13)题,是解绝对值不等式的填空题,应优选考虑用构造函数,画函数图象的方法来解决.只要令 $y_1=|x+2|$ , $y_2=|x|$ ,在同一坐标系内画出两个函数的图象,便可以由图象直观求解.

### 2. 函数与方程的思想

函数与方程的思想也是考查的重点,其中函数的思想在以函数内容为主线的试题中,当然会得到充分的体现,在其他问题中,尤其是取值范围的问题,往往要构造函数,利用函数的概念与性质来解.我们认为,其中所体现的正是函数思想的精髓.考试中心 A 卷理科第(21)题,是解析几何综合题,第(I)问是求双曲线 C 的离心率  $e$  的取值范围.解答时,当求出参数  $a$  的取值范围  $0 < a < \sqrt{2}$  且  $a \neq 1$  之后,再求  $e$  的取值范围时,实际就是求函数  $e = \sqrt{\frac{1}{a^2} + 1}$  在自变量  $0 < a < \sqrt{2}$  且  $a \neq 1$  时,函数的值域.考试中心 B 卷理科第(21)题也是解析几何的综合题,第(II)问是求当  $\lambda \in [4, 9]$  时,直线  $l$  在  $y$  轴上截距的变化范围.解答时,求出  $l$  在  $y$  轴上的截距为  $\frac{2\sqrt{\lambda}}{\lambda-1}$  或  $-\frac{2\sqrt{\lambda}}{\lambda-1}$  之后,如何由  $\lambda$  的取值范围求上式的取值范围,也需构造函数.令  $b = \frac{2\sqrt{\lambda}}{\lambda-1} = \frac{2}{\sqrt{\lambda}+1} + \frac{2}{\lambda-1}$ . 由于  $\frac{2}{\sqrt{\lambda}+1}$  和  $\frac{2}{\lambda-1}$  在  $[4, 9]$  上都是减函数,则它们的和也是减函数,即  $b = \frac{2\sqrt{\lambda}}{\lambda-1}$  是  $[4, 9]$  上的减函数,由此便可求得  $\lambda$  的取值范围.这是构造函数,利用函数的单调性来求函数的取值范围,是函数思想的重要体现.

方程思想在计算型试题中有明显体现,在三角恒等变形及求值问题中体现得更为明显.考试中心 C 卷理科第(11)题是正、余弦定理解三角形的有关问题,只要由已知条件和余弦定理列出关于  $a, b, c$  的三个方程,然后解方程消去  $a, c$  即可求出  $b$  的值.考试中心 B 卷理科第(17)题是在三角形中用三角函数公式进行证明和计算的试题,第(I)问证明时,将  $\sin(A+B) = \frac{3}{5}$ ,  $\sin(A-B) = \frac{1}{5}$  分别用和差角公式展开,得到以  $\sin A \cos B$  和  $\cos A \sin B$  为元的二元一次方程组,解这个方程组便可以求出  $\sin A \cos B$  和  $\cos A \sin B$  的值,这是方程思想和换元法的集中体现.第(II)问,已知  $AB$  的长求  $AB$  边上的高,用直接法来求有一定的困难,利用关系  $AB = AD + DB = \frac{CD}{\tan A} + \frac{CD}{\tan B}$ , 构造了一个关于未知量  $CD$  的方程,由于  $AB = 3$ , 于是只要将  $\tan A$  和  $\tan B$  的值求出,便可解方程求出  $CD$ . 而在求  $\tan A$  和  $\tan B$  值的过程中,是由  $\tan(A+B) = -\frac{3}{4}$  及  $\tan A = 2\tan B$  组成的方程组解出的  $\tan A$  和  $\tan B$ . 可以说,本题是方程思想和换元法的最佳体现,是三角计算题中不可多得的好题.

### 3. 分类讨论的思想

分类讨论的思想在高考中常考不衰,每年必有试题考查.对分类讨论思想的考查,可以是对所给条件进行分类研究,比较典型的是排列、组合问题.在今天的试卷中,考试中心 B 卷理科第(12)题,就是典型的这类问题. A 卷理科第(12)题,是求最小值问题,由已知所给的三个方程可以解出  $a, b, c$  的值,再确定  $ab + bc + ca$  的最小值时,可以把  $a, b, c$  的不同取值分别代入并进行比较大小,由此求出最小值.这其中体现的也是分类的思想.用解答题形式考查分类讨论的思想,往往是对含有参数字母的讨论.考试中心 A 卷第(19)题是利用导数求函数的单调区间,当

求得  $f'(x) = (2x + ax^2)e^{ax}$  后,研究导数的正负时,实际就是解含有参数的不等式,针对  $a$  的取值范围进行分类讨论.

### 4. 等价转化的思想

可以认为,解答所有的数学问题,都体现出转化的思想,都是由复杂到简单,由已知到未知的转化.不过我们所说的等价转化,往往是将一类数学问题转化为另一类问题,转化后使数学问题模型化、常规化,有助于问题的解决.全国高考 B 卷第(7)题是与球有关的计算问题,第一步应将“ $A, B, C$  三点都在球面上,且每两点间的球面距离均为  $\frac{\pi}{2}$ ”转化为“ $\angle AOB = \angle AOC = \angle BOC = 90^\circ$ ”,进一步转化为“ $OA, OB, OC$  两两互相垂直”最终将此问题转化为“求一个侧棱两两互相垂直且都等 1 的三棱锥底面上的高”的问题.这道题体现出来的等价转化思想十分明显.

### 三、对能力素质的考查特点

高考命题内容与形式的改革把加强对能力的考查,突出能力立意命题作为改革的重点.数学科的命题在考查创新能力和应用意识方面进行了大胆的摸索并取得了宝贵的经验.我们觉得命题改革应循序渐进,稳步发展,在今天的命题中对能力素质的考查体现了基本稳定的特点,尤其是考试中心的四套试卷,体现得更为明显.给我们的感觉是,前几年的改革成果在今天的试卷中有充分的体现,可以将这些成果巩固几年后,再从其他角度创新,这种改革创新的思路与处理办法是十分可取的.

#### 1. 对综合能力的考查

用综合题考查考生的能力素质是高考数学题的特色之一.所谓综合题,往往涉及众多的数学知识,用到常规的数学方法,体现重要的数学思想,它是将知识、方法与能力有机地融为一体.这种综合题往往有一定的难度,并非所有的考生都会做.试卷的最后一两个解答题一般都是这种类型题.在今年考试中心命制的三套试卷中,给我们的感觉是,与往年相比综合程度有所下降,一般考生都能读懂题,都能做几步,但深入下去却比较困难,我们觉得这种命题思路是可取的,对中学数学教学是有利的,应该坚持下去.

#### 2. 对创新能力的考查

对创新能力的考查是高考命题的改革趋势,前几年在这方面已经进行了大胆的探索,并取得了宝贵的经验.2002 年文科试卷中的最后一题,是三角形剪拼的试题,以考查学生动手动脑的能力,以及研究性学习的能力,试题很有新意.2003 年的一道填空题考查了类比平面几何的结论,猜想空间图形的相应性质,体现了对类比创新思维的考查.这些都体现了高考试题在考查创新能力上的亮点,不过根据去年命题工作的反馈与评价,在今天的试卷中已有较明显的反应,显得今年的试卷平和了许多.我们在考试中心命制的三套试卷中没有发现突出考查创新能力的新题型,我们觉得这种处理也是得当的.改革的步子不要迈得太大,不能一年一个亮点,将改革的成果稳定一个阶段是必要.

#### 3. 对应用意识的考查

考查应用意识也是高考命题改革的方向之一,这些年来也进行了大量探索.从解答题到选择题、填空题;从一般应用问题

到真实性应用问题;从传统内容到新增内容等等,可以说改革已取得不小的进展.纵观今年的高考,考试中心的三套试卷给我们的印象仍以平稳为主基调,在三套试卷中除了各有一个以选择题、填空题形式考查排列、组合、概率的小应用题外,都还各有一个以考查概率、统计知识为主的解答题的应用题.这几个应用题文字短小,易于读懂,转化的过程比较简单,转化成的数学问题又是最基本的.因此,这种类型的应用问题难度不大,对中学数学教学会起到很好的导向作用.

四、文、理两卷的差异

由于考生和教学内容的特殊性,在各学科试卷中只有数学分为文、理两卷.为了保证数学成绩在文科考生总成绩中的权重,降低文科试卷的难度,加大文、理两卷的差异,是势在必行的.近几年来,“减少相同题,减少姊妹题,增加不同题”的“两减一增加”的命题措施已经初见成效.在今年考试中心的三套试卷中,每套中的文、理两卷都有明显的差异,体现了降低文科卷难

度的决心和具体做法,应该是自主命题的省市必须仿效的.我们将考试中心三套试卷中文、理两科命题的主要差异列表如下:

| 卷类  | 题型  | 相同题个数 | 姊妹题个数 | 不同题个数 |
|-----|-----|-------|-------|-------|
| A 卷 | 选择题 | 10    | 0     | 2     |
|     | 填空题 | 2     | 0     | 2     |
|     | 解答题 | 3     | 0     | 3     |
| B 卷 | 选择题 | 7     | 0     | 5     |
|     | 填空题 | 2     | 0     | 2     |
|     | 解答题 | 4     | 0     | 2     |
| C 卷 | 选择题 | 5     | 1     | 6     |
|     | 填空题 | 3     | 0     | 1     |
|     | 解答题 | 3     | 1     | 2     |

## 2004 年全国统一考试(教育部考试中心 A 卷)

## 参考公式:

①如果事件  $A, B$  互斥,那么

$$P(A+B)=P(A)+P(B)$$

②如果事件  $A, B$  相互独立,那么

$$P(A \cdot B)=P(A) \cdot P(B)$$

③如果事件  $A$  在一次试验中发生的概率是  $P$ ,那么  $n$  次独立重复试验中恰好发生  $k$  次的概率

$$P_n(k)=C_n^k P^k (1-P)^{n-k}$$

④球的表面积公式

$$S=4\pi R^2 \quad (\text{其中 } R \text{ 表示球的半径})$$

⑤球的体积公式

$$V=\frac{4}{3}\pi R^3 \quad (\text{其中 } R \text{ 表示球的半径})$$

一、选择题:本大题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1.  $(1-i)^2 \cdot i =$  ( )

- A.
- $2-2i$
- B.
- $2+2i$
- C.
- $-2$
- D.
- $2$

2. 已知函数  $f(x)=\lg \frac{1-x}{1+x}$ ,若  $f(a)=b$ ,则  $f(-a)=$  ( )

- A.
- $b$
- B.
- $-b$
- C.
- $\frac{1}{b}$
- D.
- $-\frac{1}{b}$

3. 已知  $a, b$  均为单位向量,它们的夹角为  $60^\circ$ ,那么  $|a+3b| =$  ( )

- A.
- $\sqrt{7}$
- B.
- $\sqrt{10}$
- C.
- $\sqrt{13}$
- D.
- $4$

4. 函数  $y=\sqrt{x-1}+1(x \geq 1)$  的反函数是 ( )

- A.
- $y=x^2-2x+2(x < 1)$
- 
- B.
- $y=x^2-2x+2(x \geq 1)$
- 
- C.
- $y=x^2-2x(x < 1)$
- 
- D.
- $y=x^2-2x(x \geq 1)$

5.  $\left(2x^3 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^7$  的展开式中常数项是 ( )

- A. 14 B. -14 C. 42 D. -42

6. 设  $A, B, I$  均为非空集合,且满足  $A \subseteq B \subseteq I$ ,则下列各式中错误的是 ( )

- A.
- $(\complement_I A) \cup B = I$
- 
- B.
- $(\complement_I A) \cup (\complement_I B) = I$
- 
- C.
- $A \cap (\complement_I B) = \emptyset$
- 
- D.
- $(\complement_I A) \cap (\complement_I B) = \complement_I B$

7. 椭圆  $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$  的两个焦点为  $F_1, F_2$ ,过  $F_1$  作垂直于  $x$  轴的直线与椭圆相交,一个交点为  $P$ ,则  $|\overrightarrow{PF_2}| =$  ( )

- A.
- $\frac{\sqrt{3}}{2}$
- B.
- $\sqrt{3}$
- C.
- $\frac{7}{2}$
- D. 4

8. 设抛物线  $y^2=8x$  的准线与  $x$  轴交于点  $Q$ ,若过点  $Q$  的直线  $l$  与抛物线有公共点,则直线  $l$  的斜率的取值范围是 ( )

- A.
- $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$
- B.
- $[-2, 2]$
- 
- C.
- $[-1, 1]$
- D.
- $[-4, 4]$

9. 为了得到函数  $y=\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$  的图象,可以将函数  $y=\cos 2x$  的图象 ( )

- A. 向右平移
- $\frac{\pi}{6}$
- 个单位长度
- 
- B. 向右平移
- $\frac{\pi}{3}$
- 个单位长度
- 
- C. 向左平移
- $\frac{\pi}{6}$
- 个单位长度
- 
- D. 向左平移
- $\frac{\pi}{3}$
- 个单位长度

10. 已知正四面体  $ABCD$  的表面积为  $S$ ,其四个面的中心分别为  $E, F, G, H$ . 设四面体  $EFGH$  的表面积为  $T$ ,则  $\frac{T}{S}$  等于 ( )

- A.
- $\frac{1}{9}$
- B.
- $\frac{4}{9}$
- C.
- $\frac{1}{4}$
- D.
- $\frac{1}{3}$

11. 从数字 1, 2, 3, 4, 5 中,随机抽取 3 个数字(允许重复)组成一个三位数,其各位数字之和等于 9 的概率为 ( )

- A.
- $\frac{13}{125}$
- B.
- $\frac{16}{125}$
- C.
- $\frac{18}{125}$
- D.
- $\frac{19}{125}$

12. 已知  $a^2+b^2=1, b^2+c^2=2, c^2+a^2=2$ ,则  $ab+bc+ca$  的最小值为 ( )

- A.
- $\sqrt{3}-\frac{1}{2}$
- B.
- $\frac{1}{2}-\sqrt{3}$
- 
- C.
- $-\frac{1}{2}-\sqrt{3}$
- D.
- $\frac{1}{2}+\sqrt{3}$

二、填空题:本大题共 4 小题,每小题 4 分,共 16 分.把答案填在题中横线上.

13. 不等式  $|x+2| \geq |x|$  的解集是  $[-2, +\infty)$ 14. 由动点  $P$  向圆  $x^2+y^2=1$  引两条切线  $PA, PB$ ,切点分别为  $A, B, \angle APB=60^\circ$ ,则动点  $P$  的轨迹方程为  $x^2+y^2=4$ 15. 已知数列  $\{a_n\}$  满足  $a_1=1, a_n=a_1+2a_2+3a_3+\cdots+(n-1)a_{n-1}(n \geq 2)$ ,则  $\{a_n\}$  的通项  $a_n =$   $\begin{cases} 1, & n=1, \\ \frac{1}{n}, & n \geq 2. \end{cases}$ 16. 已知  $a, b$  为不垂直的异面直线,  $\alpha$  是一个平面,则  $a, b$  在  $\alpha$  上的射影有可能是

- ①两条平行直线 ②两条互相垂直的直线 ③同一条直线
- 
- ④一条直线及其外一点

在上面结论中,正确结论的编号是 ①②④ (写出所有正确结论的编号).

三、解答题:本大题共 6 小题,共 74 分.解答应写出文字说明,证明过程或演算步骤.

17. (本小题满分 12 分)

求函数  $f(x) = \frac{\sin^4 x + \cos^4 x + \sin^2 x \cos^2 x}{2 - \sin 2x}$  的最小正周期、最大值和最小值.

18. (本小题满分 12 分)

一接待中心有 A、B、C、D 四部热线电话. 已知某一时刻电话 A、B 占线的概率均为 0.5, 电话 C、D 占线的概率均为 0.4, 各部电话是否占线相互之间没有影响. 假设该时刻有  $\xi$  部电话占线, 试求随机变量  $\xi$  的概率分布和它的期望.

19. (本小题满分 12 分)

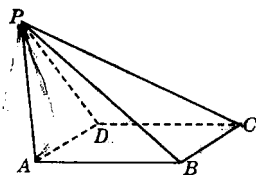
已知  $a \in \mathbb{R}$ , 求函数  $f(x) = x^2 e^{ax}$  的单调区间.

20. (本小题满分 12 分)

如图, 已知四棱锥  $P-ABCD$ ,  $PB \perp AD$ , 侧面  $PAD$  为边长等于 2 的正三角形, 底面  $ABCD$  为菱形, 侧面  $PAD$  与底面  $ABCD$  所成的二面角为  $120^\circ$ .

(I) 求点  $P$  到平面  $ABCD$  的距离;

(II) 求面  $APB$  与面  $CPB$  所成二面角的大小.



21. (本小题满分 12 分)

设双曲线  $C: \frac{x^2}{a^2} - y^2 = 1 (a > 0)$  与直线  $l: x + y = 1$  相交于两个不同的点  $A, B$ .

(I) 求双曲线  $C$  的离心率  $e$  的取值范围;

(II) 设直线  $l$  与  $y$  轴的交点为  $P$ , 且  $\overrightarrow{PA} = \frac{5}{12} \overrightarrow{PB}$ , 求  $a$  的值.

22. (本小题满分 14 分)

已知数列  $\{a_n\}$  中  $a_1 = 1$ , 且

$$a_{2k} = a_{2k-1} + (-1)^k,$$

$$a_{2k+1} = a_{2k} + 3^k,$$

其中  $k = 1, 2, 3, \dots$ .

(I) 求  $a_3, a_5$ ;

(II) 求  $\{a_n\}$  的通项公式.

$$a_2 = a_1 + (-1)^1 = 1 - 1 = 0$$

$$a_3 = a_2 + 3^1 = 0 + 3 = 3$$

$$a_4 = a_3 + (-1)^2 = 3 + 1 = 4$$

$$a_5 = a_4 + 3^2 = 4 + 9 = 13$$

## 2004 年全国统一考试(教育部考试中心 A 卷)试题解析

### 1.【答案】 D

思路分析: 由于  $i^2 = -1$ , 得  $(1-i)^2 = -2i$ , 即  $(1-i)^2 \cdot i = -2i^2 = 2$ .

【评析】 本题主要涉及的知识内容有数的扩充, 复数的概念, 复数的代数运算.

### 2.【答案】 B

思路分析 1: 由已知  $f(a)$ , 求  $f(-a)$  的这种模式, 可知, 本题在寻求  $f(x)$  与  $f(-x)$  的关系. 通过如下计算, 知  $f(x) + f(-x) = \lg \frac{1-x}{1+x} + \lg \frac{1+x}{1-x} = \lg 1 = 0$ , 即  $f(x)$  是奇函数, 故  $f(-a) = -b$ .

思路分析 2: 本题也可采取特值法. 令  $a = \frac{1}{2}$ , 则  $f\left(\frac{1}{2}\right) = \lg \frac{1}{3} = b$ , 因此  $f\left(-\frac{1}{2}\right) = \lg 3 = -b$ , 故选 B.

【评析】 本题主要涉及的知识内容有函数的奇偶性, 对数的运算性质.

在解题过程中使用了转化的数学思想方法和特值法.

### 3.【答案】 C

思路分析 1: 要求一个向量的模, 在非坐标形式的时候, 常采用先求这个向量自身的数量积, 再求这个向量的模(原因是向量自身的数量积就是这个向量模的平方). 因为  $|a+3b|^2 = (a+3b) \cdot (a+3b) = a^2 + 6a \cdot b + 9b^2 = 1 + 6 \times \frac{1}{2} + 9 = 13$ , 所以  $|a+3b| = \sqrt{13}$ .

思路分析 2: 采用向量加法的平行四边形法则, 如图 1-1,  $AD = |a|$ ,  $AB = |3b|$ ,  $AC = |a+3b|$ , 在由余弦定理, 可知  $AC^2 = BC^2 + AB^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos 120^\circ = 13$ , 即  $AC = \sqrt{13}$ .

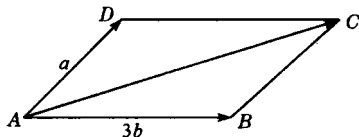


图 1-1

【评析】 本题主要涉及的知识内容有向量数量积的概念、性质及向量的模与向量数量积的关系, 向量及其加法的几何意义.

在解题过程中使用了等价转化, 数形结合的数学思想方法.

### 4.【答案】 B

思路分析 1: 利用互为反函数定义域与值域的关系解题. 由于原函数的定义域是  $x \geq 1$ , 知反函数的值域是  $y \geq 1$ , 故可排除 C、D. 又由原函数的值域  $y \geq 1$ , 则知反函数的定义域是  $x \geq 1$ , 可排除 A.

思路分析 2: 利用互为反函数的图象特点解题. 由于原函数的图象过点  $(1, 1)$ , 则反函数的图象过点  $(1, 1)$ , 代入四个选项, 可排除 A、C、D.

思路分析 3: 直接法. 由  $y = \sqrt{x-1} + 1 (x \geq 1)$ , 解得  $x = 1 + (y-1)^2$ , 故原函数的反函数为  $y = x^2 - 2x + 2$ . 再求出原函数的值域, 可知反函数的定义域为  $x \geq 1$ .

【评析】 本题主要涉及的知识内容有互为反函数定义域与值域之间的关系、图象之间的关系以及简单函数值域的求解方法.

在解题过程中使用的数学思想方法有化归与转化, 排除法.

注意事项: 在解决有关反函数的题目的时候, 经常要综合利用互为反函数之间的关系.

### 5.【答案】 A

思路分析 1: 由  $T_{r+1} = C_7^r (2x^3)^{7-r} \left(-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^r$ , 令  $21 - 3r - \frac{r}{2} = 0$ , 得  $r = 6$ . 再代入上式, 得  $C_7^6 2 \cdot (-1)^6 = 14$ .

思路分析 2: 通过观察, 可发现  $(\sqrt{x})^6 = x^3$ , 即知  $C_7^6 2 \cdot (-1)^6 = 14$  为所求.

【评析】 本题主要涉及的知识内容有二项式定理、二项展开式的通项以及分数指数幂、指数的运算.

在解题过程中主要考查了观察能力与运算能力.

### 6.【答案】 B

思路分析 1: A. 因为  $A \subseteq B$ , 则  $C_I A \supseteq C_I B$ , 又  $B \cup (C_I B) = I$ , 则  $B \cup (C_I A) = I$ , 故 A 正确; B.  $(C_I A) \cup (C_I B) = C_I (A \cap B) = C_I A$ , 不一定是  $I$ , 故 B 错误; C. 因为  $A \cap (C_I A) = \emptyset$ , 且  $C_I A \supseteq C_I B$ , 所以  $A \cap (C_I B) = \emptyset$ , 故 C 正确; D.  $(C_I A) \cap (C_I B) = C_I (A \cup B) = C_I B$ , 故 D 正确.

思路分析 2: 用文氏图来解. 如图 1-2, 可发现 B 错误.

【评析】 本题主要涉及的知识内容有集合的四种运算(子集、交集、并集、补集), 集合的图示法, 扩展知识是摩根公式.

在解题过程中使用的数学思想方法有数形结合、筛选法.

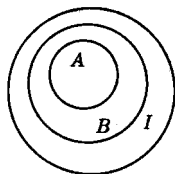


图 1-2

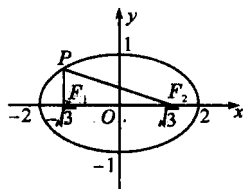


图 1-3

## 7.【答案】 C

思路分析 1: 如图 1-3, 由椭圆的定义, 知  $|PF_2| + |PF_1| = 4$ , 再由勾股定理, 知  $|PF_2|^2 - |PF_1|^2 = 12$ , 由这两个式子, 可求出  $|PF_2| = \frac{7}{2}$ .

思路分析 2: 设  $P(x, y)$ , 不妨取  $F_1(\sqrt{3}, 0)$ , 则  $F_2(-\sqrt{3}, 0)$ . 由  $\overrightarrow{F_1P} = (x + \sqrt{3}, y)$ ,  $\overrightarrow{F_1F_2} = (2\sqrt{3}, 0)$ ,  $\overrightarrow{F_1P} \perp \overrightarrow{F_1F_2} = 0$ , 得  $2\sqrt{3}(x + \sqrt{3}) + 0 = 0$ , 即  $x = -\sqrt{3}$ . 再代入椭圆方程, 得  $y = \pm \frac{1}{2}$ , 即  $P(-\sqrt{3}, \pm \frac{1}{2})$ , 故  $|\overrightarrow{PF_2}| = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + (\frac{1}{2})^2} = \frac{7}{2}$ .

思路分析 3: 由已知, 可发现  $2c < |\overrightarrow{PF_2}| < 2a$ , 即  $2\sqrt{3} < |\overrightarrow{PF_2}| < 4$ , 可排除 A、B、D.

【评析】 本题主要涉及的知识内容有椭圆的定义和特性、向量垂直的充要条件.

在解题过程中主要使用了数形结合、比较、方程等数学思想方法, 主要考查了观察、分析、运算的能力.

## 8.【答案】 C

思路分析 1: 由已知, 得点 Q 坐标为  $(-2, 0)$ , 则直线  $l$  方程为  $y = k(x + 2)$ , 代入抛物线方程, 消去  $y$  得  $k^2x^2 + (4k^2 - 8)x + 4k^2 = 0$ . 依题意此方程有解, 当  $k = 0$  时,  $x = 0$ , 满足要求; 当  $k \neq 0$  时,  $\Delta = (4k^2 - 8)^2 - 16k^4 \geq 0$ , 解得  $-1 \leq k \leq 1$ . 因此, C 正确.

思路分析 2: 采用特值法, 取  $k = -2$ , 则直线  $l$  方程为  $y = -2(x + 2)$ , 代入抛物线方程, 消去  $y$  得  $x^2 + 2x + 4 = 0$ , 无解, 可排除 B、D; 取  $k = -1$ , 则直线  $l$  方程为  $y = -(x + 2)$ , 代入抛物线方程, 消去  $y$  得  $x^2 - 4x + 4 = 0$ , 解得  $x = 2$ , 可排除 A.

【评析】 本题主要涉及的知识内容有抛物线的准线方程, 直线与圆锥曲线有公共点的充要条件.

在解题过程中主要使用了特值法, 考查了运算求解的能力.

## 9.【答案】 B

思路分析 1: 利用诱导公式, 已知函数可化为

$$\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{3} - 2x\right) = \cos\left(2x - \frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left[2\left(x - \frac{\pi}{3}\right)\right],$$

看出  $f(x)$  化为了  $f\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ , 即向右平移  $\frac{\pi}{3}$  个单位长度.

思路分析 2: 把选项当作条件, 逐一做一下. A. 得到  $y = \cos 2\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$ , 不是目标函数; B. 得到  $y = \cos 2\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2x - \frac{2\pi}{3}\right) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$  是目标函数, 此刻 C、D 不用再算.

思路分析 3: 用五点法画图, 如图 1-4, 可选出答案 B.

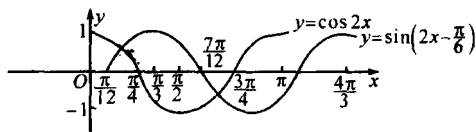


图 1-4

【评析】 本题主要涉及的知识内容有诱导公式, 图象变换,

正弦函数、余弦函数的图象.

在解题过程中使用的是转化的数学思想方法, 将正弦转化为余弦, 将直接求解转化为间接, 并利用函数图象求解.

## 10.【答案】 A

思路分析: 设正四面体  $ABCD$  的边长为 2, 依题意, 如图 1-5, 则正四面体  $EFGH$  的边长为  $\frac{2}{3}$ . 又由面积比等于对应边的平方比, 得  $\frac{T}{S} = \left(\frac{\frac{2}{3}}{2}\right)^2$

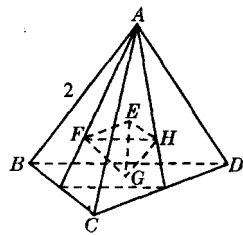


图 1-5

$$= \frac{1}{9}.$$

【评析】 本题主要涉及的知识内容有正四面体的概念和性质, 正三角形中心的特性, 以及初中学过的相似比的概念.

在解题过程中使用的是数形结合, 由特殊到一般的数学思想方法.

## 11.【答案】 D

思路分析: 由于一个三位数, 各位数字之和为 9, 是一个奇数, 因此这三个数必然是“三个奇数”, 或“一个奇数两个偶数”. 又由于每位数字从 1, 2, 3, 4, 5 中抽取, 且允许重复, 因此, 三个奇数的情况有两种: (1) 由 1, 3, 5 组成的三位数, 共有 6 种; (2) 由三个 3 组成的三位数, 共有 1 种. 一个奇数两个偶数的情况也有三种: (1) 由 1, 4, 4 组成的三位数, 共有 3 种; (2) 由 3, 2, 4 组成的三位数, 共有 6 种; (3) 由 5, 2, 2 组成的三位数, 共有 3 种. 再将以上各种情况组成的三位数的个数加起来, 得到各位数字之和为 9 的三位数, 共有 19 种. 又知从 1, 2, 3, 4, 5 中抽取 3 个数字 (允许重复), 组成的三位数共有  $5^3 = 125$  种. 因此, 所求概率为  $\frac{19}{125}$ .

【评析】 本题主要涉及的知识内容有加法原理, 乘法原理, 排列组合与概率的知识.

在解题过程中使用的是枚举, 分类与整合的数学思想方法.

## 12.【答案】 B

思路分析: 由已知, 得  $a^2 = \frac{1}{2}$ ,  $b^2 = \frac{1}{2}$ ,  $c^2 = \frac{3}{2}$ . 又由于  $ab$ ,  $bc$ ,  $ca$  三个数不可能同为负数, 因此这三个数和的最小值, 应是其中两个为负数, 一个为正数. 又因为  $|ab| = \frac{1}{2}$ ,  $|bc| = |ac| = \frac{\sqrt{3}}{2}$ , 所以当  $bc = ac = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  $ab = \frac{1}{2}$  时,  $bc$ ,  $ac$ ,  $ab$  的和取最小值是  $\frac{1}{2} - \sqrt{3}$ .

【评析】 本题主要涉及的知识内容是不等式的性质.

在解题过程中主要考查了探究、分析、提炼、运算的能力.

13.【答案】  $\{x|x \geq 1\}$ 

思路分析 1: 将已知式两边平方 (即可去掉绝对值符号), 得到  $(x + 2)^2 \geq x^2$ . 解之, 得  $x \geq 1$ .

思路分析 2: 将已知式, 化为  $|x + 2| - |x| \geq 0$ , 可利用绝对值的几何意义来解决这个不等式. 如图 1-6, 当  $x \geq -1$  时, “ $x$  与  $-2$  的距离”与“ $x$  与 0 的距离”差不小于 0; 当  $x < -1$  时, “ $x$  与  $-2$  的距离”与“ $x$  与 0 的距离”差小于 0.

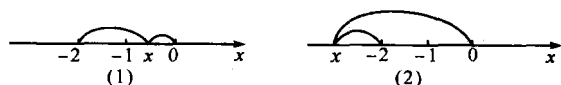


图 1-6

【评析】 本题主要涉及的知识内容有绝对值不等式的解法,绝对值的几何意义.

在解题过程中使用主要是等价转化,数形结合的数学思想方法.

14.【答案】  $x^2 + y^2 = 4$

思路分析:如图 1-7,由  $AO \perp PA$ ,  $AO = 1$ ,  $\angle APO = 30^\circ$ , 知  $|PO| = 2$ , 则点  $P$  的轨迹方程为  $x^2 + y^2 = 4$ .

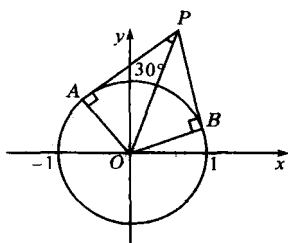


图 1-7

【评析】 本题主要涉及的知识内容有圆的定义,圆的切线的相关概念和两点间的距离公式,以及轨迹方程的求法.

在解题过程中使用了数形结合的数学思想方法.

15.【答案】  $\frac{n!}{2}$

思路分析:由已知,  $a_2 = a_1 = 1$ . 由  $a_n = a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \dots + (n-1)a_{n-1}$  ( $n \geq 2$ ), 得  $a_{n+1} = a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \dots + (n-1)a_{n-1} + na_n$ , 将两式相减, 得  $a_{n+1} - a_n = na_n$ , 即  $\frac{a_{n+1}}{a_n} = n+1$  ( $n \geq 2$ ). 分别令  $n = 2, 3, 4, \dots, n-1$ , 再将这  $n-2$  个式子相乘, 得  $\frac{a_3}{a_2} \cdot \frac{a_4}{a_3} \cdot \dots \cdot \frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{a_n}{a_2} = 3 \times 4 \times \dots \times n$ , 即  $a_n = \frac{n!}{2}$ .

【评析】 本题主要涉及的知识内容有数列的递推关系式,通项关系式.

在解题过程中使用了任意性原则,迭乘的技巧,以及分类与整合的数学思想方法,考查了直觉猜想,归纳抽象,运算求解的能力.

注:本题如果采用,先求出数列的前几项,再猜想出数列的通项公式,但在计算和猜想的过程中有一定的难度.

16.【答案】 ①②④

思路分析 1:如图 1-8,发现①②④正确,而③使得  $a, b$  共线.

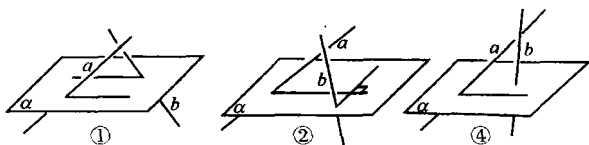


图 1-8

思路分析 2:以桌面为平面  $\alpha$ ,用笔在桌面上摆出符合条件的射影,然后垂直抬起,即可得到正确答案.

【评析】 本题主要涉及了立体几何中的异面直线的概念,直线在平面内的射影的概念以及线面垂直的知识.

在解题过程中使用的是数形结合,理论与实验相结合的数学思想方法.

17.【答案】 思路分析 1:由已知,先判断出函数  $f(x)$  的定义域为  $R$ ,然后再将已知函数做如下化简:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - \sin^2 x \cos^2 x}{2 - \sin 2x} \\ &= \frac{1 - \frac{1}{4} \sin^2 2x}{2 - \sin 2x} = \frac{4 - \sin^2 2x}{4(2 - \sin 2x)} \\ &= \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

所以函数  $f(x)$  的最小正周期是  $\pi$ .

当  $x = k\pi + \frac{\pi}{4}$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ) 时, 即  $2x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$ ,  $f(x)$  的最大值是  $\frac{3}{4}$ ,

当  $x = k\pi - \frac{\pi}{4}$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ) 时, 即  $2x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$ ,  $f(x)$  的最小值是  $\frac{1}{4}$ .

思路分析 2:由已知,得

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{(\sin^2 x + \cos^2 x) \sin^2 x + \cos^4 x}{2 - \sin 2x} \\ &= \frac{\sin^2 x + \cos^4 x}{2 - 2 \sin x \cos x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x (1 - \sin^2 x)}{2(1 - \sin x \cos x)} \\ &= \frac{1 - \sin^2 x \cos^2 x}{2(1 - \sin x \cos x)} = \frac{1}{2} (1 + \sin x \cos x) \\ &= \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

所以函数  $f(x)$  的最小正周期是  $\pi$ , 最大值是  $\frac{3}{4}$ , 最小值是  $\frac{1}{4}$ .

【评析】 本题主要涉及的知识内容有三角函数中的同角关系式,二倍角公式,正弦函数的周期性和最值.

在解题过程中使用的是等价转化的数学思想方法,考查了运算能力.

18.【答案】

思路分析:  $P(\xi=0) = (1-0.5)^2 \times (1-0.4)^2 = 0.09$ ,

$$P(\xi=1) = C_2^1 \times 0.5 \times (1-0.5) \times (1-0.4)^2 + C_2^1 \times (1-0.5)^2 \times 0.4 \times (1-0.4) = 0.3,$$

$$P(\xi=2) = C_2^2 \times 0.5^2 \times (1-0.4)^2 + C_2^1 C_1^1 \times 0.5 \times (1-0.5) \times 0.4 \times (1-0.4) + C_2^1 \times (1-0.5)^2 \times 0.4^2 = 0.37,$$

$$P(\xi=3) = C_2^2 C_1^1 \times 0.5^2 \times 0.4 \times (1-0.4) + C_2^1 C_2^1 \times 0.5 \times (1-0.5) \times 0.4^2 = 0.2,$$

$$P(\xi=4) = 0.5^2 \times 0.4^2 = 0.04.$$

于是,得到随机变量  $\xi$  的概率分布列为:

| $\xi$ | 0    | 1   | 2    | 3   | 4    |
|-------|------|-----|------|-----|------|
| $P$   | 0.09 | 0.3 | 0.37 | 0.2 | 0.04 |

所以  $E\xi = 0 \times 0.09 + 1 \times 0.3 + 2 \times 0.37 + 3 \times 0.2 + 4 \times 0.04 = 1.8$ .

【评析】 本题主要涉及的知识内容有离散型随机变量分布列和数学期望等概念.

在解题过程中主要考查运用概率知识解决实际问题的能力.

19.【答案】

思路分析:函数  $f(x)$  的导数:

$$f'(x) = 2xe^{ax} + ax^2e^{ax} = (2x + ax^2)e^{ax}.$$

(1)当  $a=0$  时,由于  $e^{ax}=1$ ,则  $f'(x)=2x$ .

若  $x<0$ ,则  $f'(x)<0$ ;若  $x>0$ ,则  $f'(x)>0$ .

所以当  $a=0$  时,函数  $f(x)$  在区间  $(-\infty, 0)$  内为减函数,在区间  $(0, +\infty)$  内为增函数.

(2)当  $a>0$  时,由于  $e^{ax}>0$ ,则令  $2x + ax^2 > 0$ ,解之,得

$$x < -\frac{2}{a} \text{ 或 } x > 0,$$

令  $2x + ax^2 < 0$ ,解之,得  $-\frac{2}{a} < x < 0$ .

所以当  $a>0$  时,函数  $f(x)$  在区间  $(-\infty, -\frac{2}{a})$  内为增函数,在区间  $(-\frac{2}{a}, 0)$  内为减函数,在区间  $(0, +\infty)$  内为增函数.

(3)当  $a<0$  时,由于  $e^{ax}>0$ ,则令  $2x + ax^2 < 0$ ,解之,得  $x > -\frac{2}{a}$  或  $x < 0$ ,

令  $2x + ax^2 > 0$ ,解之,得  $0 < x < -\frac{2}{a}$ .

所以当  $a<0$  时,函数  $f(x)$  在区间  $(-\infty, 0)$  内为减函数,在区间  $(0, -\frac{2}{a})$  内为增函数,在区间  $(-\frac{2}{a}, +\infty)$  内为减函数.

【评析】 本题主要涉及的知识内容有导数的概念和计算,应用导数研究函数单调性的方法.

在解题过程中主要使用了化归与转化,分类讨论的数学思想方法.

20.【答案】

思路分析:(I)解法一:如图 1-9,作  $PO \perp$  平面  $ABCD$ ,垂足为点  $O$ .连结  $OB$ 、 $OA$ 、 $OD$ ,  $OB$  与  $AD$  交于点  $E$ ,连结  $PE$ .

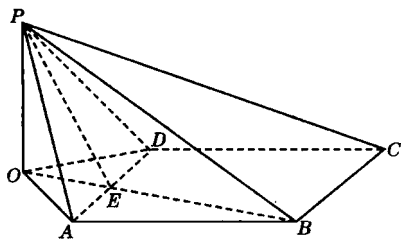


图 1-9

$\because AD \perp PB$ ,且  $OB$  为  $PB$  在平面  $ABCD$  内的射影,

$\therefore$  由三垂线定理,知  $AD \perp OB$ .

又  $\because PA = PD$ ,且  $OA$ 、 $OD$  分别为  $PA$ 、 $PD$  在平面  $ABCD$  内的射影,

$\therefore OA = OD$ ,于是  $OB$  平分  $AD$ ,点  $E$  为  $AD$  的中点,

所以  $PE \perp AD$ .

由此知  $\angle PEB$  为平面  $PAD$  与平面  $ABCD$  所成二面角的平面角,即  $\angle PEB = 120^\circ$ ,  $\angle PEO = 60^\circ$ .

由已知可求得  $PE = \sqrt{3}$ ,

$$\therefore PO = PE \cdot \sin 60^\circ = \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2},$$

即点  $P$  到平面  $ABCD$  的距离为  $\frac{3}{2}$ .

解法二:如图 1-10,取  $AD$  中点为  $E$ ,连结  $PE$ 、 $BE$ ,作  $PO \perp BE$ ,交  $BE$  延长线于点  $O$ .

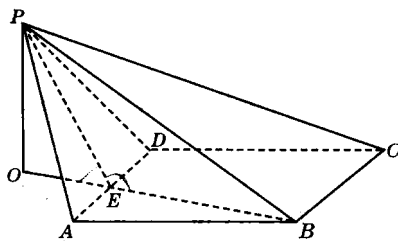


图 1-10

$\because \triangle ADP$  为正三角形,且  $E$  为  $AD$  中点,

$\therefore PE \perp AD$ ,

又  $\because AD \perp PB$ ,且  $PE \cap PB = P$ ,

$\therefore AD \perp$  平面  $PEB$ ,  $\therefore AD \perp BE$ ,

所以  $\angle PEB$  为平面  $PAD$  与平面  $ABCD$  所成二面角的平面角,

即  $\angle PEB = 120^\circ$ ,  $\angle PEO = 60^\circ$ .

$\because AD \perp$  平面  $PEB$ ,  $PO \subset$  平面  $PEB$ ,

$\therefore AD \perp PO$ ,

又  $PO \perp BE$ ,且  $AD \cap BE = E$ ,

$\therefore PO \perp$  平面  $ABCD$ .则  $PO$  为点  $P$  到平面  $ABCD$  的距离.

在  $Rt\triangle POE$  中,  $PE = \sqrt{3}$ ,  $\angle PEO = 60^\circ$ ,

$$\therefore PO = PE \cdot \sin 60^\circ = \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2},$$

即 点  $P$  到平面  $ABCD$  的距离为  $\frac{3}{2}$ .

(II)解法一:如图 1-11,建立直角坐标系,其中点  $O$  为坐标原点,  $x$  轴平行于  $DA$ .

$P(0, 0, \frac{3}{2})$ ,  $B(0, \frac{3}{2}\sqrt{3}, 0)$ ,  $PB$  中点  $G$  的坐标为  $(0, \frac{3\sqrt{3}}{4}, \frac{3}{4})$ ,连结  $AG$ .

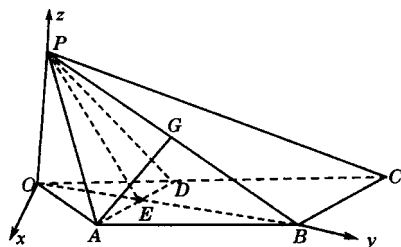


图 1-11

又知  $A(1, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0)$ ,  $C(-2, \frac{3}{2}\sqrt{3}, 0)$ .

由此得到:  $\vec{GA} = (1, -\frac{\sqrt{3}}{4}, -\frac{3}{4})$ ,  $\vec{PB} = (0, \frac{3\sqrt{3}}{2}, -\frac{3}{2})$ ,

$$\vec{BC} = (-2, 0, 0).$$

于是有  $\vec{GA} \cdot \vec{PB} = 0$ ,  $\vec{BC} \cdot \vec{PB} = 0$ ,

所以  $\vec{GA} \perp \vec{PB}$ ,  $\vec{BC} \perp \vec{PB}$ .  $\vec{GA}$ ,  $\vec{BC}$  的夹角  $\theta$  等于所求二面