全国高职高专教育“十一五”规划教材

# 高等数学（上）

主编　刘鹏林

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

全国高职高专教育“十一五”规划教材

# 高 等 数 学

Gaodeng Shuxue

（上）

主编 刘鹏林

副主编 林元重 黄清兰

高等教育出版社·北京

HIGHER EDUCATION PRESS BEIJING

**内容提要**

本书是全国高职高专教育“十一五”规划教材，分上、下两册，上册 90 学时，下册 54 学时。上册(第 1—7 章)包括极限、一元函数微分学、一元函数积分学、二元函数微分学、二元函数积分学、无穷级数、常微分方程；下册(第 8—14 章)包括行列式、矩阵、线性方程组、随机事件与概率、随机变量的分布及其数字特征、统计推断、数学实验举例。

本书适用于普通高等院校专科学生的高等数学等课程，也可作为专升本自学或辅导用书，同时也可作为高职学生学习的参考教材。

**图书在版编目（CIP）数据**

高等数学．上/刘鹏林主编．—北京：高等教育出版社，2010.7

ISBN 978－7－04－029229－9

Ⅰ.①高… Ⅱ.①刘… Ⅲ.①高等数学-高等学校：技术学校-教材 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2010）第 109820 号

**策划编辑** 邓雁城 **责任编辑** 王玲玲 **封面设计** 于文燕 **责任绘图** 尹文军

**版式设计** 余 杨 **责任校对** 姜国萍 **责任印制** 尤 静

| | | | |
|---|---|---|---|
| **出版发行** | 高等教育出版社 | **购书热线** | 010－58581118 |
| **社　　址** | 北京市西城区德外大街 4 号 | **咨询电话** | 400－810－0598 |
| **邮政编码** | 100120 | **网　　址** | http://www.hep.edu.cn |
| | | | http://www.hep.com.cn |
| **经　　销** | 蓝色畅想图书发行有限公司 | **网上订购** | http://www.landraco.com |
| **印　　刷** | 北京四季青印刷厂 | | http://www.landraco.com.cn |
| | | **畅想教育** | http://www.widedu.com |
| **开　　本** | 787×1092 1/16 | **版　　次** | 2010 年 7 月第 1 版 |
| **印　　张** | 13.75 | **印　　次** | 2010 年 7 月第 1 次印刷 |
| **字　　数** | 340 000 | **定　　价** | 19.20 元 |



**物料号 29229－00**

# 前　言

根据原国家教委颁布的高等工程专科高等数学课程教学要求，结合近年来高职高专教育发展的需要，我们编写了这套适于高职高专数学教学的“高等数学”教材。

本教材分上下两册，上册 90 学时，下册 54 学时。上册（第 1—7 章）包括极限、一元函数微分学、一元函数积分学、二元函数微分学、二元函数积分学、无穷级数、常微分方程；下册（第 8—14 章）包括行列式、矩阵、线性方程组、随机事件与概率、随机变量的分布及其数字特征、统计推断、数学实验举例。

本教材具有如下特点：

教材内容上本着“必需、够用”的原则，精简了某些知识量，降低了知识点的难度，增加了适用于工程、经济、社科等方面的数学知识，突出了实用性。

为了保证知识结构的完整性和科学性，对必须取用的部分抽象、繁杂的内容进行了简化，并加注 * 号，供学生选学。教学中，各专业也可以根据需要适当取舍。

教材编排上坚持“即学即用”的原则，节后安排了“练习”，章后附有补充练习，供程度不同的学生选择。练习题的选取强调了对数学方法的掌握和计算能力的训练。所有练习、补充练习都附有参考答案或提示，供读者参考。

结合学生的数学基础，注重了与中学数学知识的衔接，合理增删知识点，逐步扩大知识面。

教材末尾增加了数学实验举例（Matlab 数学应用软件的介绍），以强化高等数学的应用力度，为高职高专学生进一步掌握并灵活应用高等数学提供了有力的支持。

参加本书编写的有林元重副教授（编写第 1、2、3、11 章）、黄清兰副教授（编写第 6、8、9、10 章）、刘鹏林教授（编写第 4、5、7、12、13、14 章）。

本书的编写参考了我们 2004 年编写的同名教材《高等数学》（北京工业大学出版社出版）和其他兄弟院校的教材，听取了教研室同行的意见，凝注了编者近几年来对大学生数学基础的调研成果和对高等数学的教学经验总结，高等教育出版社为本书的编写、出版也给予了大力帮助，在此一并表示感谢。

由于编者水平有限，不妥之处在所难免，恳请专家、同行和读者予以指正。

编　者

2010 年 5 月

# 目　录

# 第 1 章　极　　限

## 1.1　引　　言

这一册的内容是微积分，微积分由微分学和积分学构成，而微积分以极限为基础，下面，我们通过两个实例导出极限的初步概念.

**例 1**　自由落体的瞬时速度

物体受重力作用自由落下，在时间 $t$ 内下落的路程 $s$ 由公式

$$s=\frac{1}{2}gt^2 \qquad (g\ \text{是重力加速度})$$

确定. 该运动不是等速的，物体在下落时间内每一时刻的速度都不同，因此需要求解物体在时刻 $t_0$ 的瞬时速度 $v_0$.

考察物体从时刻 $t_0$ 到时刻 $t$ 这段时间内的运动，在这段时间内落体的平均速度是

$$\bar{v}=\frac{s-s_0}{t-t_0}=\frac{\frac{1}{2}gt^2-\frac{1}{2}gt_0^2}{t-t_0}=\frac{1}{2}g(t+t_0). \tag{1}$$

$\bar{v}$ 刻画了在这段时间内落体的平均快慢程度，但不能刻画 $t=t_0$ 这一瞬间落体的快慢程度. 不过，只要 $t$ 越接近 $t_0$，$\bar{v}$ 就越接近 $v_0$，换句话说，当 $t$ 无限接近 $t_0$ 时，$\bar{v}$ 将无限接近 $v_0$. 我们把这一事实记成

$$\lim_{t\to t_0}\bar{v}=v_0 \quad 或 \quad \bar{v}\to v_0(t\to t_0),$$

读作当 $t\to t_0$ 时，$\bar{v}$ 以 $v_0$ 为极限. 符号 lim 表示极限的意思. 另一方面，由(1)式，当 $t\to t_0$ 时，$\bar{v}=\frac{1}{2}g(t+t_0)\to gt_0$，于是

$$v_0=\lim_{t\to t_0}\bar{v}=\lim_{t\to t_0}\frac{1}{2}g(t+t_0)=gt_0.$$

这就求出了落体在时刻 $t=t_0$ 的瞬时速度.

瞬时速度实质上是一种变化率(路程对时间的变化率). 变化率问题在科学和技术中普遍存在. 如力学中求物体变速运动的速度、加速度及角速度；物理、化学中求物质的比热容、密度及浓度；经济学中求国民经济的发展速度、劳动生产率；几何学中求曲线的切线斜率等等，这些具体问题都可以归结为求两变量之间的变化率. 在微分学中，这种变化率叫做导数. 研究导数及其应用是微分学的主要课题.

**例 2**　曲边梯形的面积

一般地，由连续曲线 $y=f(x)(x\in[a,b])$ 与直线 $x=a$，$x=b$，$y=0$ 所围成的图形称为曲边梯形.

在直角坐标系中，由抛物线 $y=x^2$，$x$ 轴及直线 $x=1$ 围成曲边梯形(如图 1-1)，让我们来计算它的面积 S.

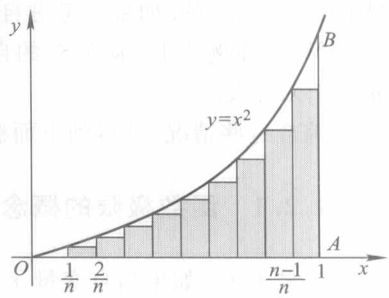


**图 1-1**

用分点 $\frac{1}{n},\frac{2}{n},\cdots,\frac{n-1}{n}$ 将区间[0,1]等分为 $n$ 个小区间,依次作内接小矩形,如图 1-1 所示.这些小矩形的面积的总和是

$$\begin{aligned} S_n &= \left(\frac{1}{n}\right)^2\cdot\frac{1}{n}+\left(\frac{2}{n}\right)^2\cdot\frac{1}{n}+\left(\frac{3}{n}\right)^2\cdot\frac{1}{n}+\cdots+\left(\frac{n-1}{n}\right)^2\cdot\frac{1}{n} \\ &= \frac{1}{n^3}[1^2+2^2+3^2+\cdots+(n-1)^2] \\ &= \frac{1}{n^3}\,\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}=\frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right). \end{aligned} \tag{2}$$

从图 1-1 可以看出,$n$ 愈大,$S_n$ 愈接近 $S$,更确切地说,当 $n$ 无限地增大(记为 $n\to\infty$,$\infty$读作无穷大)时,$S_n$ 以 $S$ 为极限,即 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S$;另一方面,对(2)式,当 $n\to\infty$ 时,$\frac{1}{n}\to 0$,则 $S_n=\frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right)\to\frac{1}{3}$.于是

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{3}.$$

这种极限称为"和式极限"或"和数极限".和式极限问题在科学和技术领域中非常普遍,如力学中求变力做的功、物体的质心及转动惯量;物理、化学中求非均匀物体的质量、热量及压力;几何中求曲线的长度、平面图形的面积及物体的体积等,这些具体问题都归结为求类似的和式极限.在积分学中,这类和式极限叫做积分(或定积分、或重积分等).研究积分及其应用是积分学的主要内容.

微积分学主要研究导数和积分,两者虽不相同,却都是以"极限"为基础.因此,为了学习微积分,必须首先阐述函数极限的概念及其性质.

## 1.2 函数的极限

在上一节的两个例子中,我们运用极限确定了自由落体的瞬时速度与曲边梯形的面积.对这两个例子作进一步分析,我们发现:

第一,在例 1 中,$t\to t_0$ 是指自变量 $t$ 无限接近 $t_0$,但并不要求 $t=t_0$,因为函数在 $t=t_0$ 处的时间差为 0,其平均速度没有意义.

第二,$t\to t_0$ 时 $t$ 既可以从大于 $t_0$ 的方向无限接近于 $t_0$,也可以从小于 $t_0$ 的方向无限接近于 $t_0$.

第三,$\bar{v}\to v_0$ 是以 $t\to t_0$ 这个变化过程为前提的.也就是说,$\bar{v}$ 是随着自变量 $t$ 无限接近 $t_0$ 而无限接近于 $v_0$ 的.如果不考虑自变量的这个变化过程,仅说 $\bar{v}\to v_0$ 是没有意义的.

第四,在例 2 中,函数 $S_n$ 的自变量 $n$ 的变化过程与例 1 不同,例 1 的 $t$ 趋于定数 $t_0$,例 2 中的 $n$ 趋于无穷大.

综合这些情况,就得到下面极限的定义.

### 1.2.1 函数极限的概念

**定义 1.1** 如果当自变量 $x$ 无限接近定数 $x_0$(但不等于 $x_0$)时,函数 $f(x)$ 无限接近定数 $A$,那么我们就说 $f(x)$ 当 $x$ 趋于 $x_0$ 时以 $A$ 为**极限**,记作

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \qquad 或 \qquad f(x)\to A \quad (x\to x_0),$$

亦称函数 $f(x)$在点 $x_0$ 处有极限.

如果 $x$ 的绝对值$|x|$无限增大时,函数 $f(x)$无限接近定数 $A$,那么就说 $f(x)$当 $x$ 趋于无穷大时以 $A$ 为极限,记作

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A \qquad 或 \qquad f(x)\to A \quad (x\to\infty).$$

记号“$x\to\infty$”中的 $x$ 既可取正值也可取负值,如果 $x$ 取正值而无限增大,就记为 $x\to+\infty$;如果 $x$ 取负值而$|x|$无限增大,就记为 $x\to-\infty$.

由定义 1.1 及根据函数的图像可得 $\lim\limits_{x\to x_0}(2x+1) = 2x_0+1$, $\quad \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x} = 0$,

$$\lim_{x\to+\infty} 2^{-x} = 0, \quad \lim_{x\to-\infty} 2^{x} = 0.$$

对于定义 1.1,我们作以下几点说明:

(1) 数列是一种特殊的函数,在数列极限$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 中,记号“$n\to\infty$”表示 $n$ 只取自然数且无限增大,而“$x\to\infty$”表示 $x$ 取实数且无限增大.

(2) 在函数极限中,函数 $f(x)$的值可以恒等于定数 $A$,例如

$$\lim_{x\to x_0} A = A, \quad \lim_{x\to\infty} A = A.$$

(3) 函数在一点是否有极限与函数在该点是否有定义无关.例如函数 $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ 在 $x=0$ 处没有定义,但它在 $x=0$ 处却有极限:$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$(这一重要极限将在本节的第 3 部分讨论).

**定义 1.2** 如果当 $x$ 从点 $x_0$ 左(右)侧趋于 $x_0$ 时,函数 $f(x)$趋于定数 $A$,那么就称 $A$ 是 $f(x)$在点 $x_0$ 处的**左(右)极限**,记作

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = A \quad \left(\lim_{x\to x_0^+} f(x) = A\right),$$

左极限和右极限统称**单侧极限**.

根据定义 1.1 和定义 1.2,可得下面的定理

**定理 1.1** $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ 成立的充分必要条件是 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = A$. 即函数的左、右极限都存在且相等.

这一定理可用来判断函数的极限是否存在.

**例 1** 判断函数 $y = \dfrac{|x|}{x}$ 在 $x=0$ 处是否存在极限.

**解** 因为 $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{|x|}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{-x}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-}(-1) = -1$,

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x} = \lim_{x\to 0^+} 1 = 1,$$

虽然函数在点 $x=0$ 处的左、右极限都存在,但不相等,故由定理 1.1 知$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x|}{x}$不存在.

## 思考

1. 下列极限是否存在?为什么?

$$\lim_{n\to\infty}(-1)^n; \quad \lim_{x\to+\infty}\sin x; \quad \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x}.$$

2. 设函数 $f(x) = \begin{cases} \cos x, x \leqslant 0, \\ x+1, x > 0. \end{cases}$ 问：

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = ?$ $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = ?$ $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 是否存在？

### 1.2.2 极限的四则运算法则

由函数极限的定义可得下面的定理：

**定理 1.2** 如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ 皆存在，则有

$$\lim_{x\to x_0}[f(x) \pm g(x)] = \lim_{x\to x_0} f(x) \pm \lim_{x\to x_0} g(x),$$

$$\lim_{x\to x_0}[f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim_{x\to x_0} g(x),$$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)} \quad (\text{其中} \lim_{x\to x_0} g(x) \neq 0).$$

在第二个等式中，若 $g(x) = c$（$c$ 为常数），则有

$$\lim_{x\to x_0} cf(x) = c \lim_{x\to x_0} f(x).$$

定理 1.2 称为极限的四则运算法则.

上述极限的四则运算法则对于 $x\to\infty$，$n\to\infty$ 时的其他极限情形也成立.

**例 2** 计算 $\lim\limits_{x\to 1}(x^2 - 2x + 2)$.

**解** 
$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}(x^2 - 2x + 2) &= \lim_{x\to 1} x^2 - \lim_{x\to 1} 2x + \lim_{x\to 1} 2 \\ &= \lim_{x\to 1} x \cdot \lim_{x\to 1} x - 2\lim_{x\to 1} x + 2 \\ &= (\lim_{x\to 1} x)^2 - 2\lim_{x\to 1} x + 2 = 1^2 - 2 + 2 = 1.\end{aligned}$$

一般地，若 $f(x)$ 为 $x$ 的多项式，$x_0$ 为任意实数，则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

**例 3** 计算 $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x(2+3x)}{x-1}$.

**解** $\dfrac{x(2+3x)}{x-1}$ 的分子、分母都是 $x$ 的多项式，且分母的极限 $\lim\limits_{x\to 2}(x-1) = 1 \neq 0$，用除法公式得

$$\lim_{x\to 2} \frac{x(2+3x)}{x-1} = \frac{\lim\limits_{x\to 2} x(2+3x)}{\lim\limits_{x\to 2}(x-1)} = \frac{2(2+6)}{1} = 16.$$

一般地，若 $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ 为 $x$ 的有理式（其中 $p(x)$，$q(x)$ 为多项式），且 $q(x_0) \neq 0$，则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

如例 3，由上有 $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x(2+3x)}{x-1} = \dfrac{2(2+3\cdot 2)}{2-1} = 16$.

有些函数需要作适当的化简或变换，才能求出极限.

**例 4** 计算 $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x} - \dfrac{2}{1-x^2}\right)$.

**解** 因为 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{1-x}$ 和 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2}{1-x^2}$ 均不存在，故不能用减法公式，

但当 $x\neq 1$ 时，有 $\quad \dfrac{1}{1-x}-\dfrac{2}{1-x^2}=\dfrac{(1+x)-2}{1-x^2}=-\dfrac{1-x}{1-x^2}=-\dfrac{1}{1+x}.$

于是
$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{2}{1-x^2}\right)=\lim_{x\to 1}\left(-\frac{1}{1+x}\right)=-\frac{1}{2}.$$

**例 5** 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2-2n+3}{3n^2+1}$.

**解**
$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2-2n+3}{3n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2-\dfrac{2}{n}+\dfrac{3}{n^2}}{3+\dfrac{1}{n^2}}$$
$$=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(2-\dfrac{2}{n}+\dfrac{3}{n^2}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(3+\dfrac{1}{n^2}\right)}=\frac{2}{3}.$$

**思考**

1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x^2-x-1}=?$ 2. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=?$

3. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)=?$

### 1.2.3 两个重要极限

我们要讨论的两个重要极限是
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,\qquad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}.$$

**定理 1.3** 如果在点 $x_0$ 的附近有 $f(x)\leqslant g(x)\leqslant h(x)$，并且
$$\lim_{x\to x_0}f(x)=\lim_{x\to x_0}h(x)=A,$$
那么
$$\lim_{x\to x_0}g(x)=A.$$

这个定理叫做夹逼定理，它的正确性容易从函数极限的定义中理解.

现在我们应用它证明 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

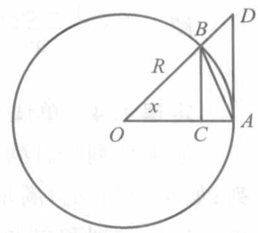

图 1-2

如图 1-2 所示，设圆的半径为 $R$，圆心角 $\angle AOB=x$， 且 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$，则 $\triangle AOB$ 的面积 $<$ 扇形 $AOB$ 的面积 $<\triangle AOD$ 的面积.

因为 $\triangle AOB$ 的面积 $=\dfrac{R^2}{2}\sin x$，扇形 $AOB$ 的面积 $=\dfrac{R^2}{2}x$，$\triangle AOD$ 的面积 $=\dfrac{R^2}{2}\tan x$，所以

$$\frac{R^2}{2}\sin x < \frac{R^2}{2}x < \frac{R^2}{2}\tan x,$$

即

$$\sin x < x < \tan x,$$

两边除以 $\sin x$,就有 $1 < \dfrac{x}{\sin x} < \dfrac{1}{\cos x}$,

从而

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1.$$

由于 $\cos(-x) = \cos x$,$\dfrac{\sin(-x)}{-x} = \dfrac{\sin x}{x}$,所以式 $\cos x < \dfrac{\sin x}{x} < 1$ 当 $-\dfrac{\pi}{2} < x < 0$ 时也是成立的. 因此,当 $0 < |x| < \dfrac{\pi}{2}$ 时,不等式 $\cos x < \dfrac{\sin x}{x} < 1$ 总是成立的.

当 $0 < |x| < \dfrac{\pi}{2}$ 时,$0 < 1 - \cos x = 2\sin^2\dfrac{x}{2} < 2\left(\dfrac{x}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{2}x^2$,即

$$0 < 1 - \cos x < \frac{x^2}{2}.$$

而 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{2} = 0$,故由定理得到 $\lim\limits_{x\to 0}(1-\cos x) = 0$,即 $\lim\limits_{x\to 0}\cos x = 1$. 再由定理 1.3 以及式 $\cos x < \dfrac{\sin x}{x} < 1$ 得 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$.

**例 6** 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}$.

**解**
$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x} = 1\cdot 1 = 1.$$

**例 7** 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin 2x}$.

**解**
$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin 2x} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{2x}{\sin 2x} = \frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{2}.$$

**例 8** 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

**解**
$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2 = \frac{1}{2}\lim_{\frac{x}{2}\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2 = \frac{1}{2}.$$

**定理 1.4** 单调有界数列必有极限.

如果数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3 \leqslant \cdots \leqslant a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant \cdots$,则称数列 $\{a_n\}$ 为**单调递增**(或上升)**数列**;如果数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 \geqslant a_2 \geqslant a_3 \geqslant \cdots \geqslant a_n \geqslant a_{n+1} \geqslant \cdots$,则称数列 $\{a_n\}$ 为**单调递减**(或下降)**数列**. 单调递增数列和单调递减数列统称为**单调数列**.

例如,$\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$ 是单调递减数列,而 $\{n\}$ 是单调递增数列,它们都是单调数列.

对于数列 $\{a_n\}$,如果存在一个正数 $M$,使得对一切正整数 $n$,都有 $|a_n| \leqslant M$,则称数列

$\{a_n\}$ 为**有界数列**，否则就称数列 $\{a_n\}$ 为**无界数列**. 例如数列 $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ 是有界数列，而数列 $\{n\}$ 是无界数列.

定理 1.4 的正确性在直观上是容易理解的. 设数列 $\{a_n\}$ 是单调数列，不妨设它是单调递增的，且对一切正整数 $n$，都有 $a_n \leqslant M$，那么从图 1-3 上可以看出，数列 $\{a_n\}$ 是有极限的.


**图 1-3**

下面我们应用定理 1.4 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 存在.

设 $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$，我们来证 $\{a_n\}$ 单调增加并且有界.

首先，由二项式定理，有

$$\begin{aligned}a_n &= 1 + n\cdot\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cdot\frac{1}{n^3} + \cdots + \frac{n(n-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1}{n!}\cdot\frac{1}{n^n}\\ &= 2 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right).\end{aligned}$$

于是 $a_{n+1} = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$

$$\begin{aligned}&= 2 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right) + \cdots + \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\\ &\quad\cdots\left(1-\frac{n-1}{n+1}\right) + \frac{1}{(n+1)!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{n}{n+1}\right).\end{aligned}$$

比较 $a_n$ 和 $a_{n+1}$ 的展开式的大小，可以看出，除第一项为 2 之外，$a_n$ 的每一项都小于 $a_{n+1}$ 的对应项，而且 $a_{n+1}$ 还多了最后一个正项，因此 $a_n < a_{n+1}$，这表明数列 $\{a_n\}$ 是单调递增的.

其次，由 $a_n$ 的展开式可得

$$\begin{aligned}a_n &< 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} \leqslant 2 + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{(n-1)\cdot n}\\ &= 2 + \left(1-\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right) = 3 - \frac{1}{n} < 3,\end{aligned}$$

故有 $0 < a_n < 3$，这表明 $\{a_n\}$ 有界，于是由定理 1.4 知，极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 是存在的，我们把这个极限记作 e，即 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}$.

可以计算出，$\mathrm{e} = 2.718\,281\,828\,45\cdots$，它是一个无理数，是自然对数的底，在许多实际问题中要用到. 显然，若把 $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 中的自变量 $n$ 换成连续变量 $x$，也有 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}$，这是 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 的一般情况.

请读者作个变换，这个重要极限也可写成 $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}$.

**例 9** 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{x}$.

**解** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{1}{\frac{x}{2}}\right)^{\frac{x}{2}}\right]^{2}=\left[\lim\limits_{\frac{x}{2}\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{\frac{x}{2}}\right)^{\frac{x}{2}}\right]^{2}=\mathrm{e}^{2}$.

**例 10** 计算 $\lim\limits_{x\to 0}(1-x)^{\frac{2}{x}}$.

**解** 令 $-x=\alpha$，则

$$\lim_{x\to 0}(1-x)^{\frac{2}{x}}=\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{-\frac{2}{\alpha}}=\lim_{\alpha\to 0}[(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}]^{-2}=\mathrm{e}^{-2}.$$

**思考**

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=?$ $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{1}{x}=?$ $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin x}{x-\pi}=?$

2. $\lim\limits_{x\to 1}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=?$ $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{100}=?$

3. $\lim\limits_{n\to\infty}(1+n)^{\frac{1}{n}}=\mathrm{e}$ 成立吗？

### 1.2.4 无穷小量及其比较

**定义 1.3** 如果函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时以 0 为极限，则称函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时为**无穷小量**，简称**无穷小**.

例如，当 $x\to 0$ 时，$\sin x$，$1-\cos x$，$\tan x$ 均为无穷小；而当 $n\to\infty$ 时，$\dfrac{1}{n^2}$，$2^{-n}$，$q^n$（$|q|<1$）也都是无穷小.

**定理 1.5** 若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，则 $\alpha=f(x)-A$ 是当 $x\to x_0$ 时的无穷小.

这是因为 $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha=\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)-A]=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)-A=0$.

由此式容易看出，这个定理的逆命题也是成立的.

根据无穷小量的定义和函数极限的四则运算法则，可得无穷小量的运算法则：

如果函数 $\alpha(x)$，$\beta(x)$ 是当 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时的无穷小，则 $\alpha(x)\pm\beta(x)$，$c\alpha(x)$（$c$ 为常数），$\alpha(x)\cdot\beta(x)$ 也都是当 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时的无穷小.

也就是说，**两个无穷小量的和、差、积以及常数与无穷小量的积也都是无穷小量**.

与无穷小量相对应，我们简述一下无穷大量的概念：

如果当 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时，函数 $f(x)$ 的绝对值 $|f(x)|$ 无限增大，则称 $f(x)$ 当 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时为**无穷大量**. 这时，极限是不存在的，但我们仍记作 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$（或 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$）.

例如，$\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x=\infty$，$\lim\limits_{n\to\infty}2^n=+\infty$.

即当 $x\to 0^+$ 时，$f(x)=\ln x$ 为无穷大量；当 $n\to\infty$ 时 $2^n$ 为无穷大量.

很明显，**在自变量的同一变化过程中，若 $f(x)$ 为无穷大，则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 为无穷小；反之，若 $f(x)$ 为**

**无穷小且 $f(x)\neq0$,则$\dfrac{1}{f(x)}$为无穷大.**

两个无穷小量的商不一定仍为无穷小量. 例如当 $x\to0$ 时, $x,x^2,\sin x$ 都是无穷小,而

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2}{x}=0$, $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x^2}=\infty$, $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

两个无穷小量之比的极限的不同情况,反映了不同的无穷小量趋于 0 的"快慢"程度. 就上面的式子来说,$x^2\to0$ 比 $x\to0$"快";$\sin x\to0$ 比 $x^2\to0$"慢";而 $\sin x\to0$ 与 $x\to0$ 的"快慢"相当. 了解无穷小量趋于 0 的快慢程度,有时在计算和应用中是很方便的. 为此引入无穷小量的阶的概念:

**定义 1.4** 设 $\alpha,\beta$ 是在同一个自变量的同一变化过程中的无穷小量,并且 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}$ 也是这一变化过程中的极限.

(1) 如果 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=0$,则称 $\beta$ 是 $\alpha$ 的**高阶无穷小量**,或称 $\alpha$ 是 $\beta$ 的**低阶无穷小量**,记作 $\beta=o(\alpha)$.

(2) 如果 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=c\neq0$,则称 $\beta$ 与 $\alpha$ 是**同阶无穷小量**.

(3) 如果 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=1$,则称 $\beta$ 与 $\alpha$ 是**等价无穷小量**,记作 $\alpha\sim\beta$.

**注** 上述定义中的极限未指明自变量的变化过程,意思是定义对于自变量的各种变化过程求极限都适用,故没有指明.

例如,当 $x\to0$ 时,$x^2$ 是 $x$ 的高阶无穷小,$\sin x$ 是 $x^2$ 的低阶无穷小,而 $\sin x$ 与 $x$ 是等价无穷小,即 $\sin x\sim x$.

又如,当 $x\to0$ 时, $\sin 5x,\tan x,1-\cos x,x^2$ 都是无穷小量,并且

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin 5x}{x}=5,\quad \lim_{x\to0}\frac{\tan x}{x}=1,\quad \lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{\frac{1}{2}x^2}=1,$$

所以,当 $x\to0$ 时,$\sin 5x$ 与 $x$ 是同阶无穷小,而 $\tan x$ 与 $x$, $1-\cos x$ 与 $\dfrac{1}{2}x^2$ 是等价无穷小,即 $\tan x\sim x$, $1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$.

关于等价无穷小,有一个有用的性质:

**定理 1.6** 设 $\alpha,\alpha',\beta,\beta'$ 都是无穷小量,且 $\alpha\sim\alpha',\beta\sim\beta'$. 如果极限 $\lim\dfrac{\beta'}{\alpha'}$存在,则极限 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}$ 也存在,且 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=\lim\dfrac{\beta'}{\alpha'}$.

这个定理表明,在求两个无穷小之比的极限时,分子与分母都可用与之等价的无穷小来代替.

**例 11** 求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan 2x}{\sin 5x}$.

**解** 当 $x\to0$ 时, $\tan 2x\sim2x,\sin 5x\sim5x$, 所以

$$\lim_{x\to0}\frac{\tan 2x}{\sin 5x}=\lim_{x\to0}\frac{2x}{5x}=\frac{2}{5}.$$

**例 12** 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x^3+3x}$.

**解** 当 $x\to 0$ 时，$\sin x \sim x, x^3+3x\sim 3x$，所以 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x^3+3x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{3x}=\dfrac{1}{3}$.

## 思考

1. $\dfrac{1}{10^{100}}$是无穷小，$10^{100}$是无穷大，对吗？

2. 当 $x\to 0$ 时，$\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}$ 是 $x$ 的(　　)无穷小.

A. 高阶　　B. 低阶　　C. 同阶　　D. 等价

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{x}=\dfrac{0}{0}=1, \lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-n})=\infty-\infty=0$，对吗？

## 练习 1.2

1. 下列数列哪些是有极限的？如有极限，试求出其极限值.

(1) $a_n=\dfrac{(-1)^n}{n}$；　　(2) $a_n=\dfrac{n}{2n+1}$；

(3) $a_n=\sin\dfrac{n\pi}{2}$；　　(4) $a_n=(-1)^n\cdot n$.

2. 指出下列函数极限中，哪些存在，哪些不存在.

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\sin x$；　　(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\sin\dfrac{1}{x}$；

(3) $\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}$；　　(4) $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x$；

(5) $\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x$；　　(6) $\lim\limits_{x\to 0}2^{\frac{1}{x}}$.

3. 求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+2x+5}{x^2+1}$；　　(2) $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}\dfrac{x^2-3}{x^2+1}$；

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x^3-2x^2+x}{3x^2+2x}$；　　(4) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$；

(5) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(x+h)^2-x^2}{h}$；　　(6) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(2-\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}\right)$；

(7) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$；　　(8) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1})$；

(9) $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+\cdots+\dfrac{1}{2^n})$；　　(10) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)(n+2)(n+3)}{5n^3}$.

4. 设 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-2x+k}{x-3}=4$，试求 $k$ 的值.

5. 设 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+ax+b}{x-1}=5$，试求 $a,b$ 的值.

6. 求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\omega x}{x}$；　　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 3x}{x}$；

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\sin 5x}$；　　(4) $\lim\limits_{x\to 0}x\cot x$；

(5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x-\sin x}{x}$；　　(6) $\lim\limits_{n\to\infty}2^n\sin\dfrac{x}{2^n}$；

(7) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin x}{x}$；　　(8) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}$；

(9) $\lim\limits_{x\to 0}(1-x)^{\frac{1}{x}}$；　　(10) $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}$；

(11) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1+x}{x}\right)^{2x}$；　　(12) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{kx}$；

(13) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{2}{n}\right)^{n}$；　　(14) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n-1}{n+1}\right)^{n}$.

7. 指出下列各题中哪些是无穷小，哪些是无穷大，哪些既不是无穷小也不是无穷大.

(1) $\arcsin x \quad (x\to 0)$；　　(2) $\arctan x \quad (x\to 0)$；

(3) $x\sin\dfrac{1}{x} \quad (x\to 0)$；　　(4) $x\sin\dfrac{1}{x} \quad (x\to\infty)$；

(5) $2^x \quad (x\to+\infty)$；　　(6) $2^x \quad (x\to-\infty)$；

(7) $\dfrac{x+2}{x^2-1} \quad (x\to 1)$；　　(8) $x\sin x \quad (x\to\infty)$.

8. 当 $x\to 0$ 时，$2x-x^2$ 与 $x^2-x^3$ 相比，哪一个是高阶无穷小？

9. 当 $x\to 1$ 时，无穷小 $1-x$ 与无穷小 $1-x^2$ 和无穷小 $\dfrac{1}{2}(1-x^2)$ 是否同阶？等价？

# 1.3 函数的连续性

## 1.3.1 函数的连续性定义

连续函数是微积分学中比较重要的函数，那么什么是连续函数呢？我们先观察图 1-4.

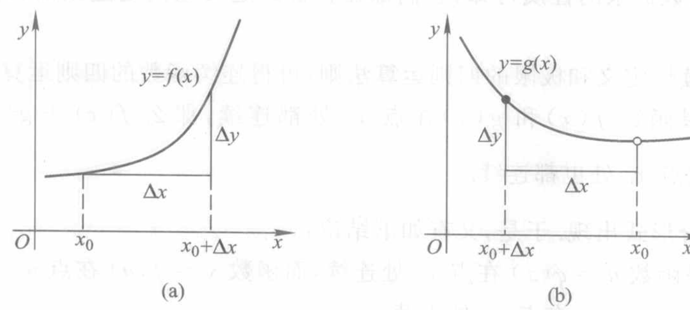


图 1-4

从图 1-4(a)中可以看出，函数 $y=f(x)$ 的图像是一条连续不断的曲线，而函数 $y=g(x)$ 所表示的曲线在点 $x_0$ 处却是**间断**的(如图 1-4(b)). 因此，我们说函数 $y=f(x)$ 在点 $x_0$ 处是**连续**的，而函数 $y=g(x)$ 在点 $x_0$ 处是**不连续**(或**间断**)的.

我们发现：对于函数 $y=f(x)$ 及已知点 $x_0$，当自变量的**增量**(或**改变量**)$\Delta x\to 0$ $(\Delta x=x-x_0)$时，有函数的增量(或改变量)$\Delta y\to 0$ $(\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0))$. 而函数 $y=g(x)$ 在点 $x_0$ 处却不具备这一性质，即没有"当 $\Delta x\to 0$ 时，$\Delta y\to 0$". 因此"当 $\Delta x\to 0$ 时，$\Delta y\to 0$"是函数在一点连续的特征. 由此，有下面的定义：