算學小叢書

代數學

冪法開法及無理虛數

林鶴一　矢田吉熊著

黃　元　吉　譯

商務印書館發行

算學小叢書

代數學

冪法開法及無理虛數

林鶴一　矢田吉熊著

黃　元　吉　譯

書館發行

目　次

代數學

冪法 開法及無理數 虛數

第一章

冪法

1. 定義. 同爲一數 a 而有 m 個之集合以成乘積, 此謂 a 之 m 乘冪,或稱 m 乘方,以 a^m 之記號表之, 其 m 爲指數.

求某數或代數學式之若干乘冪,其計算謂之冪法.

由乘冪之定義及乘法, 除法之法則, 可得下列諸定理之證明, 此諸定理, 謂之指數之法則, 乃學冪法前所常用者.

2. 定理. 就某數各種之乘冪而總求其乘積, 即係擴張其乘冪, 故其積之指數, 等於諸因數之指數之和.

如 m, n, p……爲正整數.

則 $a^m \times a^n \times a^p \times \cdots\cdots = a^{m+n+p+\cdots}$

此爲乘法之指數法則.

證明. 依乘冪之定義,

$a^m = a \times a \times a \times \cdots\cdots m$ 因數止,

$a^n = a \times a \times a \times \cdots\cdots n$ 因數止,

$\therefore a^m a^n = (a \times a \times a \times \cdots m$ 因數止$)(a \times a \times a \times \cdots n$ 因數止$)$

$= a \times a \times a \times \cdots\cdots (m+n)$ 因數止

$= a^{m+n}.$

又 $a^m \times a^n \times a^p = (a^m \times a^n) \times a^p$

$= a^{m+n} \times a^p$

$= a^{m+n+p}$

因數在三個以上, 其證明相同.

如 $a^m \times a^n \times a^p \times \cdots\cdots = a^{m+n+p}\cdots\cdots$

3. 定理. 某數之乘冪如 a^m 以其乘冪 a^n 除之, 得商 $a^m \div a^n$, 即 $\frac{a^m}{a^n}$

若 $m>n$, 則 $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

若 $m<n$, 則 $\frac{a^m}{a^n} = \frac{1}{a^{n-m}}$

若 $m=n$, 則 $\frac{a^m}{a^n}$ 等於 1.

此爲除法之指數法則.

證明 m, n 爲正整數而 $m>n$.

則 $\frac{a^m}{a^n}=\frac{a\times a\times a\times\cdots\cdots m\text{ 因數止}}{a\times a\times a\times\cdots\cdots n\text{ 因數止}}$

$=a\times a\times a\times\cdots\cdots(m-n)$ 因數止

$=a^{m-n}$.

次 $m<n$.

則 $\frac{a^m}{a^n}=\frac{a\times a\times a\times\cdots\cdots m\text{ 因數止}}{a\times a\times a\times\cdots\cdots n\text{ 因數止}}$

$=\frac{1}{a\times a\times a\times\cdots\cdots(n-m)\text{因數止}}$

$=\frac{1}{a^{n-m}}$

又 $m=n$ 則 $a^m=a^n$.

故 $$\frac{a^m}{a^n}=\frac{a^n}{a^n}=1.$$

別證. 若 $m>n$ 則依前節.

$$a^{m-n}\times a^n=a^{m-n+n}$$

$$=a^m,$$

$$\therefore\quad a^m\div a^n=a^{m-n}$$

次 $m<n$.

則 $$a^{n-m}\times a^m=a^{n-m+m}$$

$$=a^n.$$

$$\therefore \qquad a^m = \frac{a^n}{a^{n-m}}$$

此等式之兩邊以 a^n 除之.

$$a^m \div a^n = \frac{1}{a^{n-m}}$$

又 $m=n$

則 $$1\times a^n = a^n = a^m$$

$$\therefore \qquad a^m \div a^n = 1.$$

4. 定理. 某數之 m 乘冪之 n 乘冪, 等於其數之 mn 乘冪.

即 $$(\boldsymbol{a^m})^{\boldsymbol{n}} = \boldsymbol{a^{mn}}.$$

此爲冪法之指數法則.

證. m, n 爲正整數.

則 $$(a^m)^n = a^m \times a^m \times a^m \cdots\cdots n \text{ 因數止}$$

$$= a^{m+m+m+\cdots\cdots\cdots\cdots n\text{項止}}$$

$$= a^{mn}.$$

系. 某數之 m 乘冪之 n 乘冪, 等於其數之 n 乘冪之 m 乘冪.

即 $$(\boldsymbol{a^m})^{\boldsymbol{n}} = (\boldsymbol{a^n})^{\boldsymbol{m}}$$

蓋 $(a^n)^m = a^{nm} = a^{mn}$ 故也.

5. 定理. 若干因數之積之 m 乘冪,等於各因數之 m 乘冪之積.

即 $$(abc\cdots\cdots)^m=a^mb^mc^m\cdots\cdots$$

證. m 爲正整數.

則 $(ab)^m=ab\times ab\times ab\times\cdots\cdots m$ 因數止

$=(a\times a\times a\times\cdots\cdots m$ 因數止$)$

$\times(b\times b\times b\times\cdots\cdots m$ 因數止$)$

$=a^mb^m.$

$\therefore(abc)^m=\{(ab)c\}^m$

$=(ab)^mc^m$

$=a^mb^mc^m.$

故凡因數之數多者,可依此類推.

如 $(abc\cdots\cdot)^m=a^mb^mc^m\cdots\cdots$

6. 定理. 二數之商之 m 乘冪,等於二數之 m 乘冪之商.

即 $$\left(\frac{a}{b}\right)^m=\frac{a^m}{b^m}.$$

證. m 爲正整數.

則 $\left(\frac{a}{b}\right)^m=\frac{a}{b}\times\frac{a}{b}\times\frac{a}{b}\times\cdots\cdots m$ 因數止

$$=\frac{aaa\cdots\cdots m\text{ 因數止}}{bbb\cdots\cdots m\text{ 因數止}}$$

$$=\frac{a^m}{b^m}.$$

別證. 令 $\frac{a}{b}\times b=a.$

作此式兩邊之 m 乘冪,由前節之定理,

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m\times b^m=a^m,$$

$$\therefore \quad \left(\frac{a}{b}\right)^m=\frac{a^m}{b^m}.$$

注意. 本定理又可換言之如次:

分數之 m 乘冪,等於以分母子之 m 乘冪爲分母子之分數.

7. 由上證明得各公式如次:

$$a^m\times a^n=a^{m+n}. \qquad [1]$$

$$\left.\begin{aligned} m>n \text{ 則 } a^m\div a^n&=a^{m-n}\\ m<n \text{ 則 } a^m\div a^n&=\frac{1}{a^{n-m}}.\end{aligned}\right\} \qquad [2]$$

$$(a^m)^n=a^{mn}. \qquad [3]$$

$$(ab)^m=a^mb^m. \qquad [4]$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m=\frac{a^m}{b^m}. \qquad [5]$$

8. 單項式之冪法.

依前節公式 [3], [4], [5] 卽得其法則如次:

〔法則〕. 作單項式之 m 乘冪者,先作其數係數之 m 乘冪,而各因數之指數則附以 m 倍.

作分數式之 m 乘冪者, 乃作以分母子之 m 乘冪爲分母子之分數.

例 1. 求 $-2a^2b^3$ 之五乘冪.

解. $$(-2a^2b^3)^5=(-2)^5(a^2)^5(b^3)^5=-32a^{10}b^{15}$$

例 2. 求 $-3xy^3z^5$ 之四乘冪.

解. $$(-3xy^3z^5)^4=(-3)^4x^4(y^3)^4(z^5)^4$$
$$=81x^4y^{12}z^{20}.$$

例 3. $$\left(\frac{2ab^3}{3x^2y^4}\right)^6=\frac{(2ab^3)^6}{(3x^2y^4)^6}$$
$$=\frac{64a^6b^{18}}{729x^{12}y^{24}}$$

例 4. $$\{(-5x^4)^3\}^2=\{-125x^{12}\}^2$$
$$=15625x^{24}.$$

[問 1] 求下列之乘冪.

(一) $(7ab^2)^2$.　　(二) $(-2a^7c^2)^3$

(三) $(3a^2b^3)^4$.　　(四) $(-a^2x)^6$.

(五)　$(-2x^2y)^5$.　　(六)　$(-\frac{1}{3}x^3)^7$.

(七)　$5a(-2a)^3(a^2)^4$　　(八)　$(-3^6ax^2y^5)^n$.

[問 2]　求下列之乘冪.

(一)　$\left(\dfrac{3a^2b^3}{4c^5x^4}\right)^2$.　　(二)　$\left(-\dfrac{3x^5}{5a^3}\right)^3$.

(三)　$\left(\dfrac{2abc}{3m^2n^3}\right)^n$.

[問 3]　下式試簡之.

(一)　$\{(2a^3)^2\}^4$.　　(二)　$3x\{(-x^2)^3\}^4$.

(三)　$-5\{(m^2n)^5(mn^2)^2\}^2$.

9. 多項式之平方.　依乘法,得各公式如次:

$$(a+b)^2=a^2+b^2+2ab,$$

$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc,$$

$$(a+b+c+d)^2=a^2+b^2+c^2+d^2$$
$$+2ab+2ac+2ad+2bc+2bd+2cd.$$

依此結果,卽得其法則如次:

〔**法則**〕.　作多項式之平方者,作各項之平方,又作各項與其下各項相乘之積之二倍,統爲相加可也.

例 1.　$(x-y+z)^2=x^2+(-y)^2+z^2+2x(-y)+2xz$
$$+2(-y)z$$
$$=x^2+y^2+z^2-2xy+2xz-2yz.$$

例 2.　$(1+2x-x^2)^2=1^2+(2x)^2+(-x^2)^2+2\times1\times(2x)$

$$+2\times1\times(-x^2)+2(2x)(-x^2)$$

$$=1+4x^2+x^4+4x-2x^2-4x^3$$

$$=1+4x+2x^2-4x^3+x^4.$$

例 3.　$(5a^3-7a^2b+3ab^2-6b^3)^2$

$$=25a^6+49a^4b^2+9a^2b^4+36b^6$$

$$-70a^5b+30a^4b^2-60a^3b^3$$

$$-42a^3b^3+84a^2b^4$$

$$-36ab^5$$

$$=25a^6-70a^5b+79a^4b^2$$

$$-102a^3b^3+93a^2b^4$$

$$-36ab^5+36b^6.$$

注意.　各項之平方恆爲正,又$(-a-b-c)^2=(a+b+c)^2$,

去多項式乘冪之括弧者,謂之**展開**,展開所得之式謂之**展開式**.

[問 4]　下式試展開之.

(一)　$(a+b-c)^2$.　　(二)　$(a-b-c)^2$.

(三)　$\left(\frac{2}{3}x^2-x+\frac{3}{2}\right)^2$.　　(四)　$(1-x+x^2-x^3)^2$.

10. 二項式 $a+b$ 之乘冪.

如 $$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2,$$

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3.$$

此固所已知者,若欲求 $a+b$ 之四乘冪,則依乘法實算之如次:

$$\begin{array}{l} a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 \\ a+b \\ \hline a^4+3a^3b+3a^2b^2+ab^3 \\ \quad +a^3b+3a^2b^2+3ab^3+b^4 \\ \hline \end{array}$$

$$(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$$

依此結果,知 $(a+b)^4$ 之展開式,其初項爲 a^4,末項爲 b^4,而其中間各項之文字則順次爲 a^3b, a^2b^2, ab^3, 卽 a 之降冪而 b 之昇冪也.

其含 a^3b 之項,則 a^3 以 b 乘之,a^2b 以 a 乘之,相因而成者也,故其係數爲 $(a+b)^3$ 之展開式中 a^3 之係數與 a^2b 之係數之和,如 $1+3$ 卽 4 是也.

又含 a^2b^2 之項,則 a^2b 以 b 乘之,ab^2 以 a 乘之,相因而

成者也，故其係數爲 $(a+b)^3$ 之展開式中 a^2b 及 ab^2 之係數之和，如 $3+3$ 即 6 是也.

依同理，ab^3 之係數爲 $3+1$ 即 4 是也.

$$\therefore\quad (a+b)^4=a^4+(1+3)a^3b+(3+3)a^2b^2+(3+1)ab^3+b^4$$
$$=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4.$$

依同理，由 $(a+b)^4$ 之展開式，可得 $(a+b)^5$ 之展開式，

即 $$(a+b)^5=a^5+(1+4)a^4b+(4+6)a^3b^2+(6+4)a^2b^3$$
$$+(4+1)ab^4+b^5.$$
$$=a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5.$$

依此方法，順次作 $a+b$ 之六乘，七乘，八乘等之展開式亦甚容易，玆明其法則如次：

〔**法則**〕．二項式 $a+b$ 之 n 乘冪，由 $(n+1)$ 項而成，其初項爲 a^n，第二項以下爲 a 之降冪 b 之昇冪，其指數順次以 1 增減，而 a 與 b 之指數之和，恆等於 n，其係數爲 $a+b$ 之 $(n-1)$ 乘冪之展開式中第一項第二項之係數之和，又第二項第三項之係數之和順次類推以取之可也，至最後之項則爲 b^n.

今將 $a+b$ 之十乘冪，逐一展開之，而取其係數，列表如次：