21世纪高职高专教材

高等数学

广州大学松田学院数学教研室 编

华南理工大学出版社

高 等 数 学

广州大学松田学院数学教研室　编

主　编　陈永年
副主编　黎斯荣
参　编　李淑英　曹邦兴　华柳斌

华南理工大学出版社
·广州·

内 容 简 介

本书遵循“以应用为目的，理论知识以必需、够用为度”的原则，淡化概念，加强应用，培养能力。

本书教学内容与现行的《高等数学课程教学基本要求》大体相当。在内容选取上面向非数学类专业，主要包括：一元微积分，空间解析几何，无穷级数，二元微积分及常微分方程初步等章。对一些内容和定理证明作了简化处理，并增加有实际应用背景的例题和习题。书后附有基本数学公式、积分表和习题简答。

本书可作为高职高专学校、成人高校及本科院校所属二级学院和民办高校经济管理类及部分工科类专业教材或教学参考书。

图书在版编目（CIP）数据

高等数学/广州大学松田学院数学教研室编. —广州：华南理工大学出版社，2004.8

ISBN 7-5623-2081-0

Ⅰ. 高… Ⅱ. 广… Ⅲ. 高等数学-高等学校-教材 Ⅳ. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2004）第 055327 号

总 发 行：华南理工大学出版社（广州五山华南理工大学 17 号楼，邮编 510640）
发行部电话：020－87113487　87111048（传真）
E-mail：scut202@scut.edu.cn　http://www.scutpress.com
责任编辑：张　颖
印 刷 者：广东省阳江市教育印务公司
开　　本：787×1092　1/16　**印张**：20.75　**字数**：480 千
版　　次：2004 年 8 月第 1 版第 1 次印刷
印　　数：1～4500 册
定　　价：35.00 元

前　言

几年来，在教学实践中，我们深切地感受到现行的大专《高等数学》课本存在着或多或少的欠缺，迫切希望能有一本既适合大专层次的教学，又兼顾专升本学生的需要，易读好懂，实例较多的《高等数学》教材。

为达此目的，从2003年9月起，我们开始了本教材的编写工作。经过9个月的努力，终于完成了本书的编写任务。

本书的特点主要有三个方面：一是涵盖了大专层次的计算机、电子信息、经济、管理、外贸等各个专业对高等数学的基本要求。为此，我们在保证一元微积分的主角地位的同时，增加了“无穷级数”这一章；二是尽量地贴近各个专业的实际、较多地列举了联系各专业实际的例子和习题，增加了边际、弹性、复利等经济内容，细说了函数的傅里叶展开，并介绍了傅里叶级数的复数形式；三是兼顾了专升本学生的需要，除增加了“空间解析几何与向量代数”和“二元微积分初步”这两章外，还增加了习题的分量。我们把每节的习题分为（A）、（B）两组。其中，（A）组为基本题，（B）组则稍难，略带技巧性。这样安排，或可有助于专升本学生的备考。

本书由广州大学松田学院数学教研室编写，具体的分工是：李淑英：第一、第二章；华柳斌：第三、第四章；黎斯荣：第五、第六章；陈永年：第七、第八章；曹邦兴：第九、第十章。

各章初稿经传阅、讨论，最后由陈永年统一审阅、修改、定稿。

由于我们的水平有限，书中疏漏错误、不妥之处在所难免，恳请同行的专家、学者和使用本书的老师、同学指正。

另外，本书在编写过程中，得到了广州大学松田学院高泽涵院长的大力支持和帮助，特此致谢。

编　者

二〇〇四年五月

目　录

第一章　函数与极限

初等数学的研究对象基本上是不变的量，而高等数学的研究对象则是变动的量. 所谓函数关系就是变量之间的依赖关系，极限方法是研究变量的一种基本方法. 本章将介绍函数、极限和函数的连续性等基本概念，以及它们的一些性质.

第一节　函　数

一、集合

1. 集合的概念

集合是数学中的一个基本概念，下面先通过例子来说明这个概念. 例如，一个书柜中的书构成一个集合，一间教室里的学生构成一个集合，全体实数构成一个集合，等等. 一般地，所谓集合(简称集)是指具有某种特定性质的事物的总体，组成这个集合的事物称为该集合的元素(简称元).

通常用大写的英文字母 A，B，C，…表示集合，用小写的英文字母 a，b，c，…表示集合的元素. 如果 a 是集合 A 的元素，就说 a 属于 A，记作 $a\in A$；如果 a 不是集合 A 的元素，就说 a 不属于 A，记作 $a\notin A$ 或 $a\overline{\in} A$. 一个集合，若它只有有限个元素，则称它为有限集；不是有限集的集合称为无限集.

表示集合的方法通常有以下两种：一种是列举法，就是把集合的全体元素一一列举出来表示. 例如，由元素 a_1，a_2，a_3，…，a_n 组成的集合 A，可以表示成

$$A=\{a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n\};$$

另一种是描述法，若集合 M 是由具有某种性质 P 的元素 x 的全体所组成的，就可表示成

$$M=\{x \mid x \text{ 具有性质} P\}.$$

例如，集合 B 是方程 $x^2-1=0$ 的解集，就可表示成

$$B=\{x \mid x^2-1=0\}.$$

对于数集，有时在表示数集的字母的右上角标上“*”来表示该数集内排除 0 的集，右下角标上“+”来表示该数集内排除 0 与负数的集.

习惯上，全体非负整数即自然数的集合记作$\mathbb{N}$，即

$$\mathbb{N}=\{0, 1, 2, \cdots\};$$

全体整数的集合记作$\mathbb{Z}$，即

$$\mathbb{Z}=\{\cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots\};$$

全体有理数的集合记作$\mathbb{Q}$，即

$$\mathbb{Q}=\left\{\frac{p}{q}\,\middle|\,p\in\mathbb{Z},\ q\in\mathbb{N}_+\text{且 }p\text{ 与 }q\text{ 互质}\right\}$$

全体实数的集合记作$\mathbb{R}$，$\mathbb{R}^*$为排除0的实数集，$\mathbb{R}_+$为全体正实数的集.

设 A、B 是两个集合，如果集合 A 的元素都是集合 B 的元素，则称 A 是 B 的子集，记作 $A\subset B$(读作 A 包含于 B)或 $B\supset A$(读作 B 包含 A).

如果集合 A 与集合 B 互为子集，即 $A\subset B$ 且 $B\subset A$，则称集合 A 与集合 B 相等，记作 $A=B$. 例如，设

$$A=\{1,\ 2\},\ B=\{x\mid x^2-3x+2=0\},$$

则 $A=B$.

若 $A\subset B$ 且 $A\neq B$，则称 A 是 B 的真子集，记作 $A\subsetneqq B$. 例如，$\mathbb{N}\subsetneqq\mathbb{Z}\subsetneqq\mathbb{Q}\subsetneqq\mathbb{R}$.

不含任何元素的集合称为空集. 例如

$$\{x\mid x\in\mathbb{R}\text{ 且 }x^2+1=0\}$$

是空集，因为适合条件 $x^2+1=0$ 的实数是不存在的. 空集记作$\varnothing$，且规定空集是任何集合 A 的子集，即$\varnothing\subset A$.

2. 集合的运算

集合的基本运算主要有以下几种：并、交、差.

设 A、B 是两个集合，由所有属于 A 或者属于 B 的元素组成的集合，称为 A 与 B 的并集(简称并)，记作 $A\cup B$，即

$$A\cup B=\{x\mid x\in A\text{ 或 }x\in B\};$$

由所有既属于 A 又属于 B 的元素组成的集合，称为 A 与 B 的交集(简称交)，记作$A\cap B$，即

$$A\cap B=\{x\mid x\in A\text{ 且 }x\in B\};$$

由所有属于 A 而不属于 B 的元素组成的集合，称为 A 与 B 的差集(简称差)，记作$A\setminus B$，即

$$A\setminus B=\{x\mid x\in A\text{ 且 }x\notin B\}.$$

有时，研究某个问题限定在一个大的集合 I 中进行，所研究的其他集合 A 都是 I 的子集. 此时，称集合 I 为全集，称 $I\setminus A$ 为A 的余集或补集，记作 A^C. 例如，在实数集$\mathbb{R}$中，集合 $A=\{x\mid 0<x\leqslant 1\}$的余集就是

$$A^C=\{x\mid x\leqslant 0\text{ 或 }x>1\}.$$

本书各章涉及的数均为实数，变量、函数均取实数值，即本书所讨论问题的全集是实数集$\mathbb{R}$.

3. 区间和邻域

区间是用得较多的一类数集. 设 a 和 b 都是实数，且 $a<b$. 数集

$$\{x\mid a<x<b\}$$

称为开区间，记作$(a,\ b)$，即

$$(a,\ b)=\{x\mid a<x<b\}.$$

a 和 b 称为开区间$(a,\ b)$的端点，这里 $a\notin(a,\ b)$，$b\notin(a,\ b)$. 数集

$$\{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$$

称为闭区间，记作$[a, b]$，即

$$[a, b]=\{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}.$$

a 和 b 称为闭区间$[a, b]$的端点，这里 $a \in [a, b]$，$b \in [a, b]$. 类似地有

$$(a, b]=\{x \mid a < x \leqslant b\},$$
$$[a, b)=\{x \mid a \leqslant x < b\}.$$

$(a, b]$和$[a, b)$都称为半开区间.

以上这些区间都称为有限区间. 数 $b-a$ 称为这些区间的长度. 从数轴上看，这些有限区间是长度为有限的线段. 闭区间$[a, b]$和开区间(a, b)在数轴上的表示方法分别如图 1-1(a)、(b)所示. 此外还有无限区间. 引进符号 $+\infty$(读作正无穷大)及 $-\infty$(读作负无穷大)，则可类似地表示无限区间，例如

$$(-\infty, b)=\{x \mid x < b\},$$
$$[a, +\infty)=\{x \mid x \geqslant a\}.$$

这两个无限区间在数轴上如图 1-2(a)、(b)所示.

(a) (b)

图 1-1

(a) (b)

图 1-2

全体实数的集合 $\mathbf{R}$ 可记作$(-\infty, +\infty)$，它也是无限区间.

在不需要辨明所讨论区间是否包含端点，以及是有限区间还是无限区间的场合，就简单地称它为“区间”，且常用 I 表示.

设 δ 是任一正数，则开区间$(a-\delta, a+\delta)$称为点 a 的δ 邻域，记作 $U(a, \delta)$，简称为 a 的邻域，即

$$U(a, \delta)=\{x \mid a-\delta < x < a+\delta\}.$$

点 a 称为这个邻域的中心，δ 称为这个邻域的半径，如图1-3所示.

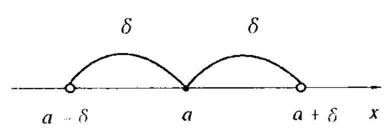

图 1-3

有时用到的邻域需要把邻域的中心去掉，在点 a 的邻域中去掉中心 a 后，称为点 a 的去心 δ 邻域，记作 $\mathring{U}(a, \delta)$，即

$$\mathring{U}(a, \delta)=\{x \mid 0 < |x-a| < \delta\}=(a-\delta, a) \cup (a, a+\delta).$$

二、函数

1．函数的概念

定义 1 设 x 和 y 是两个变量，D 是一个给定的非空数集．若对于每一个数 $x\in D$，按照某一确定的对应法则 f，变量 y 总有惟一确定的数值与之对应，则称 y 是 x 的函数，记作

$$y=f(x),\ x\in D.$$

其中，x 称为自变量，y 也称为因变量；数集 D 称为该函数的定义域．

定义域 D 是自变量 x 的取值范围，也就是使函数 $y=f(x)$ 有意义的实数集．由此，若 x 取数值 $x_0\in D$ 时，则称该函数在 x_0 有定义，与 x_0 对应的 y 的值称为该函数在 x_0 的函数值，记作 $f(x_0)$或 $y|_{x=x_0}$．当 x 取遍 D 的各个数值时，对应的函数值全体构成的数集

$$W=\{y\mid y=f(x),\ x\in D\}$$

称为该函数的值域．若 $x_0\notin D$，则称该函数在 x_0 没有定义．

由函数的定义可知，决定一个函数有三要素：定义域 D，对应法则 f 和值域 W，注意到每一个函数值都可由一个 $x\in D$ 通过 f 而惟一确定，于是给定 D 和 f，W 就相应地被确定了；从而 D 和 f 就是决定一个函数的两要素．正因为如此，函数一般记作 $y=f(x)$，$x\in D$，即只给出定义域 D 和对应法则 f，而没有写出值域 W．

不同的对应法则表示不同的函数，例如，$y=f(x)$，$y=g(x)$，$y=\varphi(x)$，等等．

若一个函数仅用一个式子给出，而要求确定函数的定义域，这时应考虑两种情况：其一是确定这一式子有意义的自变量取值的全体；其二是对实际问题还应根据问题的实际意义来确定．如圆面积 A 与它的半径 r 之间的关系 $A=\pi r^2$，它的定义域 $D=(0,\ +\infty)$，而函数 $y=\sqrt{1-x^2}$ 的定义域是$[-1,\ 1]$，函数 $y=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$的定义域是$(-1,\ 1)$．

$$函数\ y=\operatorname{sgn} x=\begin{cases}1 & 当\ x>0\\ 0 & 当\ x=0\\ -1 & 当\ x<0\end{cases}$$

称为符号函数，它的定义域 $D=(-\infty,\ +\infty)$，值域 $W=\{-1,\ 0,\ 1\}$，它的图形如图 1-4 所示．

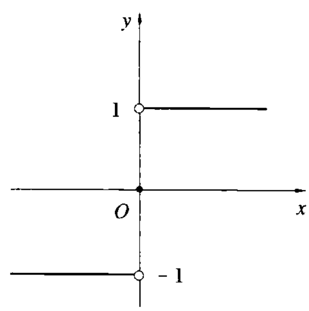

图 1-4

它表示了在区间$(-\infty,\ +\infty)$内的不同区间上，同一函数的对应法则不同，而不是三个函数．这种在定义域内的不同区间上用不同的解析式表示的函数，称为分段函数．

2．函数的几种特性

(1) 函数的奇偶性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称(即如果 $x\in D$，则 $-x\in D$)，如果对于任意 $x\in D$，恒有$f(-x)=f(x)$，则称$f(x)$为偶函数；如果对于任意 $x\in D$，恒有 $f(-x)=-f(x)$，则称$f(x)$为奇函数．在平面直角坐标系中，偶函数的图形关于 y 轴对称，如

图 1-5 所示，奇函数的图形关于原点对称，如图 1-6 所示，反之亦然.

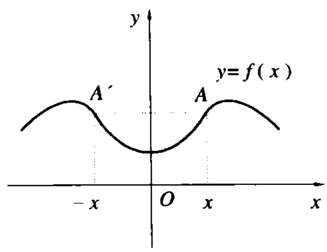

图 1-5

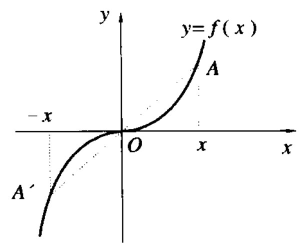

图 1-6

（2）函数的单调性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，区间 $I\subset D$，如果对于区间 I 内的任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，都有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上单调增加，如图 1-7 所示；当 $x_1<x_2$ 时，都有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上单调减少，如图 1-8 所示. 单调增加和单调减少的函数统称为单调函数. 例如 $y=x^2$ 在 $(-\infty,\ 0)$ 上单调减少，在 $(0,\ +\infty)$ 上单调增加. 但 $y=x^2$ 在 $(-\infty,\ +\infty)$ 上不是单调函数.

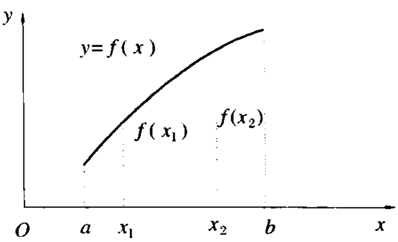

图 1-7

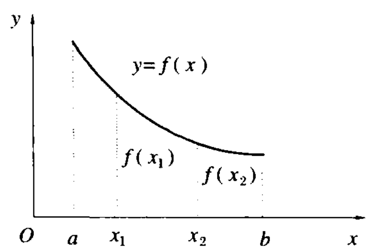

图 1-8

（3）函数的周期性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域是 D，若存在一个常数 $T\neq 0$，使得对于任意 $x\in D$，当 $(x\pm T)\in D$时，恒有

$$f(x\pm T)=f(x)$$

成立，则称$f(x)$为周期函数，其中 T 称为$f(x)$的周期，周期函数的周期通常是指它的最小正周期.

例如，$y=\sin x$，$y=\cos x$ 都是以 2π 为周期的周期函数，周期函数的图形可以由它在一个周期内的图形沿 x 轴向左、右两个方向平移后得到，如图 1-9 所示.

（4）函数的有界性

设函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上有定义，若存在正数 M，使得对任意 $x\in I$，恒有

$$|f(x)|\leqslant M,$$

则称$f(x)$在区间 I 上是有界函数，否则称$f(x)$是无界函数.

有界函数的图形必介于两条平行于 x 轴的直线 $y=-M$（$M>0$）和 $y=M$ 之间.

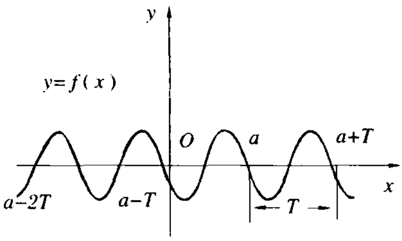

图 1-9

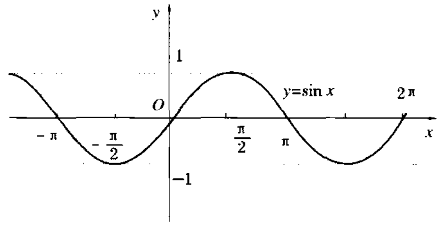

图 1-10

例如，在区间$(-\infty, +\infty)$上，函数 $y=\sin x$ 的图形见图 1-10，介于两直线$y=-1$和 $y=1$ 之间，即有$|\sin x|\leqslant 1$，这时称$y=\sin x$在$(-\infty, +\infty)$内是有界函数．在区间$(-\infty, +\infty)$内，函数 $y=x^3$ 的图形(图 1-11)向上下都无限延伸，不可能找到两条平行于 x 轴的直线，使这个图形介于这两条直线之间，这时称 $y=x^3$ 在$(-\infty, +\infty)$内是无界函数．

应该看到，函数的有界性与 x 取值区间有关，例如 $y=\dfrac{1}{x}$在区间$(0, 1)$上是无界的，但它在区间$(1, +\infty)$上是有界的．

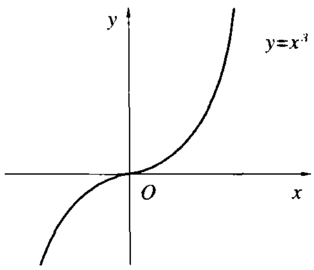

图 1-11

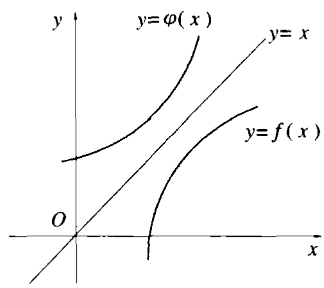

图 1-12

3．反函数与复合函数

(1) 反函数

对函数 $y=f(x)=x^3$, x 是自变量，y 是因变量．若由此解析式解出 x，就得到关系式

$$x=\sqrt[3]{y}.$$

在上式中，若把 y 看做自变量，把 x 看做因变量，则由 $x=\sqrt[3]{y}$ 所确定的函数称为已知函数$y=x^3$ 的反函数．

定义 2　设 $y=f(x)$是定义在 D 上的一个函数，值域为 W，如果对于每一个 $y\in W$，有惟一确定的 $x\in D$ 满足$y=f(x)$与之对应，则称这个函数为 $y=f(x)$ 的反函数，记为 $x=\varphi(y)$．相对于 $x=\varphi(y)$，原来的函数 $y=f(x)$称为直接函数．

由反函数的定义可以看出，如果 $y=f(x)$有反函数 $x=\varphi(y)$，则反函数 $x=f^{-1}(y)$

的定义域为 W，值域为 D.

习惯上自变量用 x 表示，因变量用 y 表示. 如果把 $x=\varphi(y)$中的 y 改成x，x 改成y，则得 $y=\varphi(x)$.

例 1 求函数 $y=\log_2 x+2$ 的反函数.

解 已知函数的定义域是 $(0,+\infty)$，它是单调增加的，存在反函数，由 $y=\log_2 x$ 解得$x=2^{y-2}$，再将式中的 x 改成 y，y 改成x，则得 $y=2^{x-2}$. 所以函数 $y=\log_2 x+2$ 的反函数为 $y=2^{x+2}$.

如果将直接函数 $y=f(x)$和它的反函数 $y=\varphi(x)$的图形画在同一坐标平面上，那么这两个图形关于直线 $y=x$ 是对称的，如图 1-12 所示.

(2) 复合函数

设 $y=f(u)$，而 $u=\varphi(x)$，且函数 $\varphi(x)$ 的值域包含在函数 $f(u)$ 的定义域内，那么 y 通过u 的联系也是自变量x 的函数，称 y 为x 的复合函数，记作 $y=f(\varphi(x))$，其中 u 称为中间变量.

例如，由函数 $y=\sqrt{u}$，$u=x+4$ 可以构成复合函数 $y=\sqrt{x+4}$. 为了使 u 的值域包含在$y=\sqrt{u}$ 的定义域$[0,+\infty)$内，必须有 $x\in[-4,+\infty)$，所以复合函数 $y=\sqrt{x+4}$ 的定义域应为$[-4,+\infty)$.

复合函数也可以由两个以上的函数经过复合而成. 例如，函数 $y=\arccos u$，$u=\sqrt{v}$，$v=x^3-3$ 可以构成复合函数 $y=\arccos\sqrt{x^3-3}$. 这里 u 和v 都是中间变量.

例 2 指出下列函数是由哪些函数复合而成的?

(1) $y=e^{\cos x}$； (2) $y=\sqrt{\ln\sin x}$； (3) $y=\dfrac{1}{\arctan 3x}$.

解 (1) $y=e^{\cos x}$是由$y=e^u$ 和$u=\cos x$ 复合而成；

(2) $y=\sqrt{\ln\sin x}$ 是由$y=\sqrt{u}$，$u=\ln v$ 和$v=\sin x$ 复合而成；

(3) $y=\dfrac{1}{\arctan 3x}$是由$y=\dfrac{1}{u}$，$u=\arctan v$ 和$v=3x$ 复合而成.

4. 初等函数

下列函数称为基本初等函数.

常数函数：$y=C$.

幂函数：$y=x^\mu$，(μ 为实数).

指数函数：$y=a^x$，($a>0$，$a\neq1$).

对数函数：$y=\log_a x$，($a>0$，$a\neq1$).

三角函数：$y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\tan x$，$y=\cot x$，$y=\sec x$，$y=\csc x$.

反三角函数：$y=\arcsin x$，$y=\arccos x$，$y=\arctan x$，$y=\operatorname{arccot} x$.

这些函数在中学数学中都已学过，现扼要复习一下.

(1) 常数函数 $y=C$.

它的定义域是$(-\infty,+\infty)$，图形为过点$(0,C)$平行于 x 轴的直线. 如图 1-13 所示.

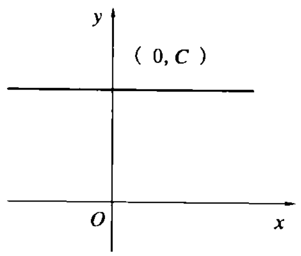

图 1-13

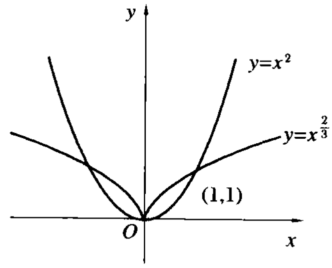

图 1-14

（2）幂函数 $y=x^{\mu}$（μ 为实数）.

它的定义域随 μ 而异，但不论 μ 为何值，$y=x^{\mu}$ 在$(0，+\infty)$内总有定义，而且图形都通过点$(1，1)$.

如 $y=x^{2}$，$y=x^{\frac{2}{3}}$等，定义域为$(-\infty，+\infty)$，图形对称于 y 轴，如图 1-14 所示.

$y=x^{3}$，$y=x^{\frac{1}{3}}$，定义域为$(-\infty，+\infty)$，图形关于原点对称，如图 1-15 所示.

$y=x^{-1}$，定义域为$(-\infty，0)\cup(0，+\infty)$，图形关于原点对称，如图 1-16 所示.

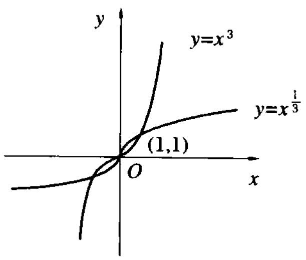

图 1-15

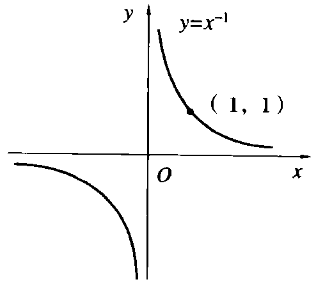

图 1-16

$y=x^{\frac{1}{2}}$，定义域为$[0，+\infty)$，如图 1-17 所示.

（3）指数函数 $y=a^{x}$（$a>0$，$a\neq1$）.

它的定义域为$(-\infty，+\infty)$，值域为$(0，+\infty)$，都通过点$(0，1)$. 当 $a>1$ 时，函数单调增加；当 $0<a<1$ 时，函数单调减少，如图 1-18 所示.

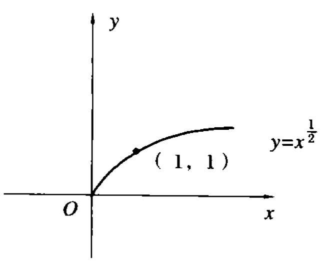

图 1-17

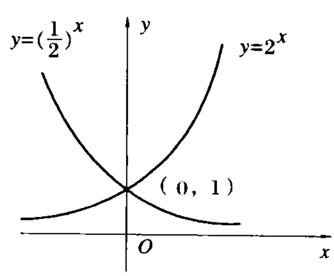

图 1-18