大学数学改革系列教材

复变函数与积分变换

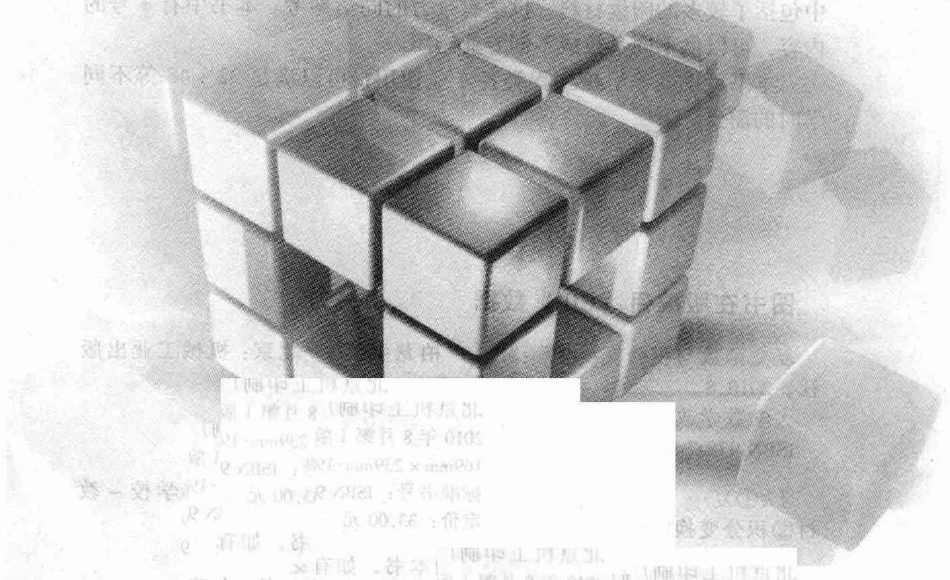
COMPLEX FUNCTION AND INTEGRAL TRANSFORM

薛有才　卢柏龙　主编

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

大学数学改革系列教材

复变函数与积分变换



机械工业出版社

复变函数与积分变换是高等院校理工类各专业的一门重要基础课程。本书是根据国家教育部高等教育本科复变函数与积分变换课程的基本要求，结合目前高中实行新的课程标准后学生对本课程的要求，并结合作者多年教授本课程的体会而编写的一本教材。

本书包含了复变函数与积分变换的传统内容：复数与复变函数、解析函数、复变函数的积分、级数、留数、共形映射、傅里叶变换、拉普拉斯变换以及它们的应用；同时，为了适应科学技术的发展和读者工作、发展的需要，本书还增加了相关的计算方法和语言及实验，以帮助读者掌握现代科学计算方法；本书中有许多应用型例题与练习题，以帮助读者了解和学习复变函数、积分变换的方法与应用；本书中包括了较多的阅读材料，供学有余力的同学参考。本书中有 * 号的内容，可以供不同学校或不同专业选用。

本书可供高等学校工程类各专业使用，可以满足 32 ~ 48 等不同学时的需要。

图书在版编目（CIP）数据

复变函数与积分变换/薛有才，卢柏龙主编．—北京：机械工业出版社，2010.8

大学数学改革系列教材

ISBN 978-7-111-30600-9

Ⅰ.①复… Ⅱ.①薛… ②卢… Ⅲ.①复变函数－高等学校－教材②积分变换－高等学校－教材 Ⅳ.①O174.5②O177.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2010）第 154824 号

机械工业出版社（北京市百万庄大街 22 号 邮政编码 100037）
策划编辑：郑 玫 责任编辑：郑 玫 孙志强 版式设计：霍永明
责任校对：李秋荣 封面设计：张 静 责任印制：乔 宇
北京机工印刷厂印刷（兴文装订厂装订）
2010 年 8 月第 1 版第 1 次印刷
169mm × 239mm · 19.75 印张 · 383 千字
标准书号：ISBN 978-7-111-30600-9
定价：33.00 元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

电话服务
社服务中心：（010）88361066
销 售 一 部：（010）68326294
销 售 二 部：（010）88379649
读者服务部：（010）68993821

网络服务
门户网：http://www.cmpbook.com
教材网：http://www.cmpedu.com

前 言

复变函数与积分变换是高等院校理工类各专业的一门重要基础课程，是现代科学技术的重要理论基础。同时，它也是解决实际问题的重要工具，它在现代科学技术的学习中占有重要的地位。本书是根据国家教育部高等教育本科复变函数与积分变换课程的基本要求，结合目前高中实行新的课程标准后学生对本课程的要求，并结合作者多年教授本课程的体会而编写的，其目的是为普通高等学校非数学专业的学生提供一本适用面较宽、容易阅读和学习、能够帮助学生较好地掌握本课程的基本知识、基本方法、基本应用的教材。

本书包含了复变函数与积分变换的传统内容：复数与复变函数、解析函数、复变函数的积分、级数、留数、共形映射、傅里叶变换、拉普拉斯变换以及它们的应用；同时，为了适应科学技术的发展和读者工作、发展的需要，本书还增加了相关的计算方法和语言及实验，以帮助读者掌握现代科学计算方法；本书中有许多应用型例题与练习题，以帮助读者了解和学习复变函数、积分变换的方法与应用。

本书具有鲜明的特色：

（1）突出应用。本书采用了从读者熟悉的实例和知识出发，用大家熟悉的语言、知识和思想方法进行自然的扩展来泛化复变函数的基本概念；大量的应用实例为课程提供了活力和应用方法；各种不同类型的习题为培养各种能力而服务，同时提供了大量的几何模型作为背景与大量的几何图形帮助读者理解教学内容。

（2）起点较低，坡度适中。结合现代中学教学改革，比较详细地介绍了复数概念及其运算；本书坡度也较适中。尽量采用提出问题、讨论问题、解决问题的方式来展开，以适应学生的思维习惯。

（3）注重创新能力的培养。本书各章中均编排了一些讨论与研究性习题，供教学中参考。同时，特别注重思想方法的培养。

（4）本书各章中都有“小结”，可以帮助读者复习知识、理清关系、加深理解与进一步提高。

（5）适用面广。本书内容较多，但采用不同的编排方法，以适应不同的专

业和学校、不同的学时要求。本书可以适用于 32 ~ 48 学时等不同层次的教学要求。

（6）与中学数学课程有较好的衔接。本书考虑到实行高中新的课程标准后学生数学基础的变化这一部分的要求，降低了起点，并设置了阅读材料，以满足不同学生的要求。作为大学数学课程改革系列教材的一门课程，本书与整个教学改革与教材体系是相配套的。

（7）本教材中标有（ * ）号的部分为选学内容，教师可根据学时情况酌情处理。

此教材是作者多年教学的一些心得体会。第 1 章由西安邮电学院林椹尠编写；第 2 章、第 4 章与第 10 章的 10.1 节由浙江科技学院薛有才编写；第 3 章由西安邮电学院史克岗编写；第 5 章由河南城建学院王晓凤编写；第 6 章由上海工程技术大学许伯生编写；第 7、8 章由上海工程技术大学卢柏龙编写；第 9 章与第 10 章的 10.2 节由浙江科技学院王祖尧编写；第 10 章的 10.3 节、附录及部分图稿由上海工程技术大学江开忠博士完成；全书由薛有才教授和卢柏龙教授统稿。本教材由西安邮电学院李昌兴教授担任主审。在编写的过程中得到了上海工程技术大学、浙江科技学院的支持，在此一并表示感谢。本书中引用了参考文献中的众多内容以及例题、习题，在此谨向各位作者表示衷心的感谢。

限于作者自身的水平，写作过程中常深感言不及义，谬误也在所难免，故恳请读者不吝赐教，多多指正。

编　者

目 录

第1章

复数与复变函数

复变函数论中所研究的函数变量都是复数，所以我们首先应对复数及其性质、运算有一个清晰的认识。在这一章里，我们先介绍复数的基本概念、简单性质与基本运算，并介绍复数的各种表示方法，然后介绍复变量函数——复变函数，进而介绍它的极限和连续性。本章是复变函数论最基础的部分。

1.1 复数及其四则运算

1.1.1 复数的概念

在高中数学中已经讲述过复数（Complex Number）。为了便于以后讨论，我们回顾一下有关复数的基本定义及结论。

设 x，y 为两个实数，则

$$z=x+\mathrm{i}y \quad（或 x+y\mathrm{i}）$$

表示复数，这里 i 为**虚单位**，具有性质 $\mathrm{i}^2=-1$。x 及 y 分别叫做 z 的**实部**（Real Part）与**虚部**（Imaginary Part），常记为

$$x=\mathrm{Re}z,\ y=\mathrm{Im}z$$

虚部为零的复数为实数，即 $x+\mathrm{i}0=x$。因此，全体实数是全体复数的一部分。

实部为零且虚部不为零的复数称为**纯虚数**（Pure Imaginary Number）。

如果两复数的实部和虚部分别相等，则称两复数**相等**。由此得出，对于复数 $z=x+\mathrm{i}y$，当且仅当 $x=y=0$ 时，$z=0$。

设 $z=x+\mathrm{i}y$ 是一个复数，称 $x-\mathrm{i}y$ 为 z 的**共轭复数**（Complex Conjugate），记作 $\bar{z}$。易知，$\bar{\bar{z}}=z$。一个实数 x 的共轭复数还是 x。

1.1.2 复数的四则运算

复数的四则运算，可以按照多项式的四则运算进行，只要注意将 i^2 换成

-1。设

$$z_1=x_1+\mathrm{i}y_1,\ z_2=x_2+\mathrm{i}y_2$$

则

$$z_1+z_2=(x_1+\mathrm{i}y_1)+(x_2+\mathrm{i}y_2)=(x_1+x_2)+\mathrm{i}(y_1+y_2) \tag{1.1.1}$$

$$z_1-z_2=(x_1+\mathrm{i}y_1)-(x_2+\mathrm{i}y_2)=(x_1-x_2)+\mathrm{i}(y_1-y_2) \tag{1.1.2}$$

$$z_1\cdot z_2=(x_1+\mathrm{i}y_1)(x_2+\mathrm{i}y_2)=(x_1x_2-y_1y_2)+\mathrm{i}(x_1y_2+y_1x_2) \tag{1.1.3}$$

对任一复数 $z=x+\mathrm{i}y$，由复数的乘法运算，有

$$z\cdot\bar{z}=(x+\mathrm{i}y)(x-\mathrm{i}y)=(x^2+y^2)+\mathrm{i}(xy-yx)=x^2+y^2=(\mathrm{Re}z)^2+(\mathrm{Im}z)^2$$

显然，当 $z\neq0$ 时，$z\cdot\bar{z}=x^2+y^2\neq0$。由此，我们规定

$$|z|=\sqrt{x^2+y^2}$$

为复数 z 的模（Modulus）。

如果复数 $z_2\neq0$，则

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{x_1+\mathrm{i}y_1}{x_2+\mathrm{i}y_2}=\frac{(x_1+\mathrm{i}y_1)(x_2-\mathrm{i}y_2)}{(x_2+\mathrm{i}y_2)(x_2-\mathrm{i}y_2)}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+\mathrm{i}\,\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2} \tag{1.1.4}$$

从式（1.1.1）~式(1.1.4) 即知复数经过四则运算得到的仍是复数。又从式（1.1.1）、式（1.1.2）以及实部与虚部的定义得出

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}(z_1\pm z_2)&=\mathrm{Re}z_1\pm\mathrm{Re}z_2\\ \mathrm{Im}(z_1\pm z_2)&=\mathrm{Im}z_1\pm\mathrm{Im}z_2\end{aligned} \tag{1.1.5}$$

读者可以自行验证，同实数的四则运算一样，复数加法满足结合律与交换率；复数乘法也满足结合律与交换率；加法与乘法满足分配率。我们也可以很容易地验证以下有关共轭复数的几个运算性质（作为练习，请读者自证）。

$$\overline{(z_1\pm z_2)}=\bar{z}_1\pm\bar{z}_2;\ \overline{(z_1\cdot z_2)}=\bar{z}_1\cdot\bar{z}_2;\ \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}\quad(z_2\neq0)$$

$$2\mathrm{Re}z=z+\bar{z};2\mathrm{iIm}z=z-\bar{z};|\bar{z}|=|z|$$

例 1.1.1 化简 $\frac{\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}+\frac{1-\mathrm{i}}{\mathrm{i}}$。

解 $\frac{\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}+\frac{1-\mathrm{i}}{\mathrm{i}}=\frac{\mathrm{i}^2+(1-\mathrm{i})^2}{(1-\mathrm{i})\mathrm{i}}=\frac{-1-2\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}=\frac{(-1-2\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}{2}=-\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{i}$

例 1.1.2 计算

(1) $\frac{2+3\mathrm{i}}{2-3\mathrm{i}}$； (2) $\frac{2\mathrm{i}}{\sqrt{3}-\mathrm{i}}-\frac{3}{\sqrt{3}\mathrm{i}-1}$。

解 (1) $\frac{2+3\mathrm{i}}{2-3\mathrm{i}}=\frac{(2+3\mathrm{i})^2}{(2-3\mathrm{i})(2+3\mathrm{i})}=\frac{4+12\mathrm{i}-9}{4+9}=-\frac{5}{13}+\frac{12}{13}\mathrm{i}$

(2) $\frac{2i}{\sqrt{3}-i}-\frac{3}{\sqrt{3}i-1}=\frac{2i}{\sqrt{3}-i}-\frac{3}{i(\sqrt{3}+i)}=\frac{2i}{\sqrt{3}-i}+\frac{3i}{\sqrt{3}+i}=\frac{1}{4}+\frac{5\sqrt{3}}{4}i$

例 1.1.3　已知 $x+yi=(2x-1)+y^2i$，求 $z=x+iy$。

解　因为 $x=2x-1$，则 $x=1$。又因为 $y=y^2$，所以 $y=0$ 或 $y=1$。由此，$z=1$ 或 $z=1+i$。

例 1.1.4　对任一非零复数 $z=x+iy$，是否存在一个复数 z^{-1} 或 $\frac{1}{z}$，使得 $z\cdot z^{-1}=1$？

解　为了寻找 z^{-1}，我们令 $z^{-1}=u+iv$。由复数乘法意义可知，u，v 应满足方程

$$xu-yv=1,\quad yu+xv=0$$

解之可得唯一的解为
$$u=\frac{x}{x^2+y^2},\quad v=\frac{-y}{x^2+y^2}$$

所以
$$z^{-1}=\frac{x}{x^2+y^2}-i\frac{y}{x^2+y^2}$$

由式（1.1.3），我们知道，对于复数我们仍有：若 $z_1\cdot z_2=0$，则 z_1，z_2 至少有一个为零，也即是说，如果 z_1，z_2 都是非零复数，则它们的积也为非零复数。

例 1.1.5　设 z_1，z_2 是两个复数，则

$$(z_1+z_2)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k z_1^{n-k}z_2^k$$

其中，仍然约定 $0!=1$。

1.2　复数的几何表示

1.2.1　用平面上的点和向量表示复数

大家都非常熟悉平面上的坐标系，它建立了 xOy 平面上的点与有序实数对之间的一一对应关系。平面坐标系的方法也提供了一种将复数表示为 xOy 平面上的点的简便方法。由于复数 $z=x+iy$ 由其实部 x 与虚部 y 唯一确定，也就是说由一对有序实数对（x，y）唯一确定，而有序实数对（x，y）又与平面直角坐标系中的点 $P(x, y)$ 一一对应，于是可用平面直角坐标系中的点来表示复数。如图 1.2.1 所示，点 P 表示复数 $-2+3i$，其余的点分别表示复数 0，i，$2+2i$，$-4-3i$。

每一点（x，y）表示一个复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 的直角坐标平面称为**复平面**[⊖]（Complex Plane）或**z 平面**。由于 x 轴上的点对应实数，y 轴上的点对应纯虚数，故称 x 轴为**实轴**（Real Axis），称 y 轴为**虚轴**（Imaginary Axis）。由于复数与复平面上的点是一一对应的，以后把"点 z"和"复数 z"作为同义词而不加区别。由以上意义，易知一个复数与它的共轭复数在复平面上的点关于实轴对称（见图 1.2.2）。

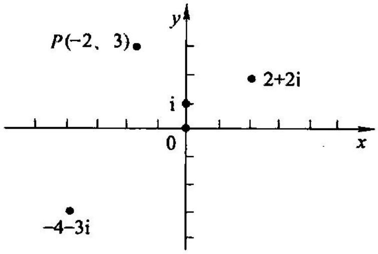


图　1.2.1

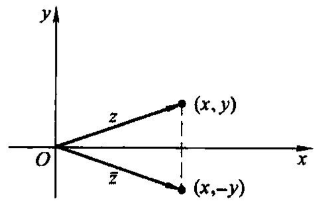


图　1.2.2

例 1.2.1　假设质量分别为 m_1，m_2，…，m_n 的 n 个质点分别位于复平面上 z_1，z_2，…，z_n 处，求该系统的质心。

解　设 $z_k=x_k+y_k\mathrm{i}$（$k=1$，2，…，n），$M=\sum\limits_{k=1}^{n}m_k$ 为总质量。易知，所给系统的质心坐标（$\hat{x}$，$\hat{y}$）为

$$\hat{x}=\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}m_kx_k}{M},\quad \hat{y}=\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}m_ky_k}{M}$$

从而，质心点为

$$\hat{z}=\frac{m_1z_1+m_2z_2+\cdots+m_nz_n}{m_1+m_2+\cdots+m_n}$$

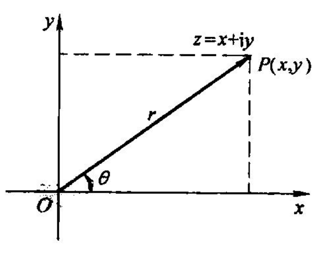


图　1.2.3

在复平面上，如图 1.2.3 所示，从原点 O 到点 $P(x,\ y)$ 引向量 $\overrightarrow{OP}$。我们看到 $\overrightarrow{OP}$ 与这个复数 z 也构成一一对应关系（复数 0 对应着零向量），因此也可以用向量 $\overrightarrow{OP}$ 来表示复数 $z=x+\mathrm{i}y$，其中 x，y 顺次等于 $\overrightarrow{OP}$ 沿 x 轴与 y 轴的分量。今后把"复数 z"与其对应的"向量 z"也视为同义词。

在物理学中，如力、速度、加速度等都可用向量表示，说明复数可以用来表示实际的物理量，如例 1.2.1。

⊖ 历史上，Caspar Wessel 与 Jean Pierre Argand 分别于 1797 年和 1806 年独立地提出了复数在平面上的表示。所以，有时也称复平面为 Argand（阿干特）图。

1.2.2 模与辐角

向量$\overrightarrow{OP}$的长度 r 叫做复数 z 的**模或绝对值**，记作 $|z|$，即 $|z|=r$。读者容易明白这里以几何意义定义的复数的模与前面的定义是一致的。从实轴正向转到与向量$\overrightarrow{OP}$方向一致时所成的角度 θ 叫做复数的**辐角**（Argument），记作 Arg$z$。

复数 0 的模为零，即 $|0|=0$，其辐角是不确定的。任何不为零的复数 z 的辐角 Arg$z$ 均有无穷多个值，彼此之间相差 2π 的整数倍。通常把满足 $-\pi<\theta_0\leqslant\pi$ 的辐角值 θ_0 称为 Arg$z$ 的**主值**，记为 arg$z$，于是

$$\mathrm{Arg}z=\arg z+2k\pi\ (k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots)$$

由直角坐标与极坐标的关系（见图 1.2.4），我们立即得到不为零的复数的实部、虚部与该复数的模、辐角之间的关系

$$r=|z|=\sqrt{x^2+y^2}$$

$$\arg z=\begin{cases}\arctan\dfrac{y}{x} & z\text{ 在第一、四象限}\\ \arctan\dfrac{y}{x}+\pi & z\text{ 在第二象限}\\ \arctan\dfrac{y}{x}-\pi & z\text{ 在第三象限}\\ \dfrac{\pi}{2} & x=0,\ y>0\\ -\dfrac{\pi}{2} & x=0,\ y<0\\ 0 & x>0,\ y=0\\ \pi & x<0,\ y=0\end{cases}\tag{1.2.1}$$

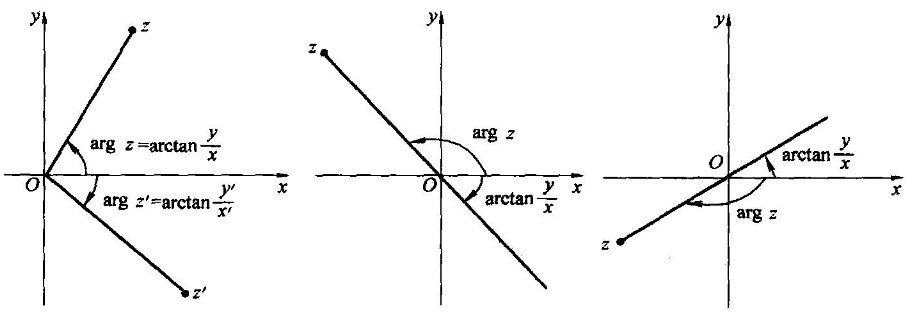


图 1.2.4

又由于

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \tag{1.2.2}$$

于是复数又可表示为

$$z = x + \mathrm{i}y = r(\cos\theta + \mathrm{i}\ \sin\theta) \tag{1.2.3}$$

式（1.2.3）通常称为复数 z 的**三角表示式**。如果再利用欧拉（Euler）公式

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\ \sin\theta \tag{1.2.4}$$

我们又可以得到

$$z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \tag{1.2.5}$$

这种形式称为复数 z 的**指数表示式**。

在 1.1 节中已经指出：两复数的实部与虚部分别相等，则称两复数相等。于是由式（1.2.1）与式（1.2.2）知两复数相等，其模必定相等，其辐角可以差 2π 的整数倍（辐角如果都取主值，则应相等）。反之，如果复数的绝对值及辐角分别相等，则从式（1.2.3）即知这两个复数相等。

复数用向量表示，既有大小，又有方向，所以两个复数如果不都是实数，就无法比较大小。但是，两个复数的模都是实数，可以比较大小。在几何上，数 $|z|$ 是点（x，y）到原点的距离，或表示 z 的向量长度，这也说明复数的模可以比较大小。

例 1.2.2 求下列各复数的模及辐角。

（1）i；（2）-1；（3）$1+\mathrm{i}$；（4）$-1+\mathrm{i}$。

解 由 z 平面上的对应点的位置，可以看出

（1）$|\mathrm{i}| = 1$，$\arg \mathrm{i} = \dfrac{\pi}{2}$，$\mathrm{Arg}\,\mathrm{i} = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$（$k = 0$，$\pm1$，$\pm2$，$\cdots$）。

（2）$|-1| = 1$，$\arg(-1) = \pi$，$\mathrm{Arg}(-1) = \pi + 2k\pi$（$k = 0$，$\pm1$，$\pm2$，$\cdots$）。

（3）$|1+\mathrm{i}| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$，$\arg(1+\mathrm{i}) = \dfrac{\pi}{4}$，$\mathrm{Arg}(1+\mathrm{i}) = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi$（$k = 0$，$\pm1$，$\pm2$，$\cdots$）。

（4）$r = |-1+\mathrm{i}| = \sqrt{2}$，$\arg(-1+\mathrm{i}) = \arctan\dfrac{1}{-1} + \pi = \dfrac{3}{4}\pi$，

$\mathrm{Arg}(-1+\mathrm{i}) = \dfrac{3}{4}\pi + 2k\pi$（$k = 0$，$\pm1$，$\pm2$，$\cdots$）。

例 1.2.3 将复数 $z = 1 - \sqrt{3}\mathrm{i}$ 分别化为三角表达式和指数表达式。

解 因为 $x = 1$，$y = -\sqrt{3}$，所以，$r = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2$。

又因为 z 在第四象限内，于是 $\theta = \arg z = \arctan\dfrac{-\sqrt{3}}{1} = -\dfrac{\pi}{3}$。

所以
$$z=2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]$$
由于辐角的多值性，亦可表示为
$$z=2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}+2k\pi\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{3}+2k\pi\right)\right]$$
其指数表达式为
$$z=2\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{3}\mathrm{i}+2k\pi\mathrm{i}}\quad(k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots)$$

例 1.2.4　如图 1.2.5 所示为一曲柄活塞连接装置。当活塞臂 c 作水平运动时，曲柄臂 a 绕定点 O 转动。（如果是一个汽油发动机，燃烧力将推动活塞，使连接臂 b 将能量转化成机轴的旋转。）对于工程分析来说，建立曲柄的角坐标（位置、速度以及加速度）与对应的活塞的线性坐标的联系是重要的。尽管这种计算可以用向量分析去做，但下面的复分析技巧更加自然。

设机轴的中心位置 O 为坐标系的原点，活塞杆的最低位置用复数 z 表示，则
$$z=l+\mathrm{i}d$$

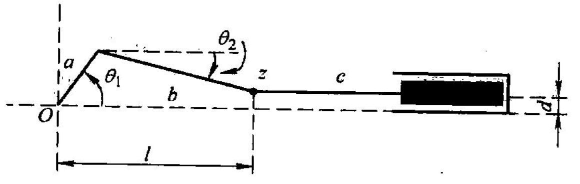


图　1.2.5

其中，l 是活塞的（线性）偏移，d 是一个固定的偏移量。曲柄臂和连接臂分别由方程
$$A=a(\cos\theta_1+\mathrm{i}\sin\theta_1),\ B=b(\cos\theta_2+\mathrm{i}\sin\theta_2)$$
来描述（在图 1.2.6 中，θ_2 是负角）。显然有恒等式 $A+B=z=l+\mathrm{i}d$ 成立。由此可推导出涉及机轴角度的活塞位置表达式为
$$l=a\cos\theta_1+b\cos\left[\arcsin\left(\frac{d-a\sin\theta_1}{b}\right)\right]$$

1.2.3　加法与减法

以 $\overrightarrow{Oz_1}$ 和 $\overrightarrow{Oz_2}$ 为两邻边作一平行四边形 Oz_1zz_2，通过图 1.2.6 可以说明，复数的加法、减法法则与向量的加法、减法法则一致。

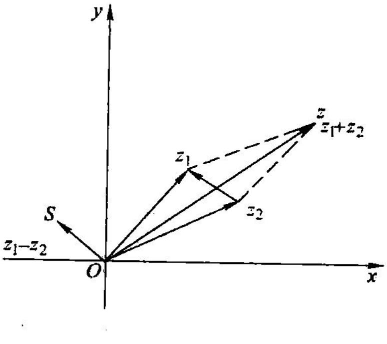


图　1.2.6

通过两向量的和与差的几何作图法，

在复平面中可以求出相应两复数的和z_1+z_2与差z_1-z_2的对应点。在图1.2.6中，以向量$\overrightarrow{Oz_1}$，$\overrightarrow{Oz_2}$为邻边的平行四边形的两条对角线向量$\overrightarrow{Oz}$及$\overrightarrow{z_2z_1}$就分别对应于复数z_1+z_2及z_1-z_2。由于$\overrightarrow{Oz}$的始点为原点O，因而终点z所对应的复数就是z_1+z_2；而向量$\overrightarrow{z_2z_1}$的始点不是原点，经平移得始点为原点O的向量$\overrightarrow{OS}$，则终点S所对应的复数就是z_1-z_2。

从图1.2.6还可以看到：$|z_1-z_2|$表示复平面上两点z_1与z_2之间的距离。事实上，

$$|z_1-z_2|=|(x_1-x_2)+\mathrm{i}(y_1-y_2)|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$$

这正是平面上两点距离的表达式。

1.2.4 用复数的三角表示与指数表示作乘除法

设$z_1=r_1(\cos\theta_1+\mathrm{i}\sin\theta_1)$，$z_2=r_2(\cos\theta_2+\mathrm{i}\sin\theta_2)$，这里，$r_j=|z_j|$，$\theta_j$是$z_j$的某一个辐角（$j=1,2$），则

$$\begin{aligned}z_1z_2&=[r_1(\cos\theta_1+\mathrm{i}\sin\theta_1)][r_2(\cos\theta_2+\mathrm{i}\sin\theta_2)]\\&=r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+\mathrm{i}\sin(\theta_1+\theta_2)]\end{aligned}\tag{1.2.6}$$

由此可见，把两复数相乘，只要把它们的模相乘、辐角相加即可，也就是

$$|z_1z_2|=r_1r_2=|z_1||z_2|,\ \mathrm{Arg}(z_1z_2)=\theta_1+\theta_2+2k\pi=\mathrm{Arg}z_1+\mathrm{Arg}z_2$$

由此也可得到两复数乘积的几何作图法：将向量z_1沿自身方向伸长$|z_2|$倍，再旋转一个角$\arg z_2$，得该积向量z_1z_2（见图1.2.7）。

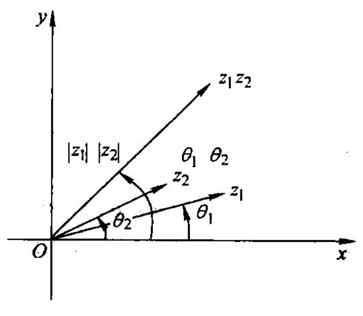


图 1.2.7

特别地，当$|z_2|=1$时，两复数z_1与z_2的乘积就只是旋转。比如，$z_2=\mathrm{i}$，由于i的辐角主值是$\pi/2$，那么$\mathrm{i}z_1$就可由向量z_1逆时针旋转$\pi/2$弧度的角而得到；再如$z_2=-1$，那么$-z_1$就可由向量逆时针旋转π弧度角而得到。

复数除法是复数乘法的逆运算，即若$z_2\neq0$，则$r_2>0$。于是仿式（1.2.6）计算可知

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2)+\mathrm{i}\sin(\theta_1-\theta_2)]\tag{1.2.7}$$

由此可知，两复数相除，只把它们的模相除、辐角相减即可。

例1.2.5 化简$\dfrac{(1-\sqrt{3}\mathrm{i})\ (\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)}{(1-\mathrm{i})\ (\cos\theta-\mathrm{i}\sin\theta)}$

解　因为

$$1-\sqrt{3}\mathrm{i}=2\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)=2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]$$

$$1-\mathrm{i}=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}\right)=\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$\cos\theta-\mathrm{i}\sin\theta=\cos(-\theta)+\mathrm{i}\sin(-\theta)$$

所以

$$\frac{(1-\sqrt{3}\mathrm{i})(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)}{(1-\mathrm{i})(\cos\theta-\mathrm{i}\sin\theta)}=\frac{2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right](\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)}{\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right][\cos(-\theta)+\mathrm{i}\sin(-\theta)]}$$

$$=\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)\right](\cos2\theta+\mathrm{i}\sin2\theta)$$

$$=\sqrt{2}\left[\cos\left(2\theta-\frac{\pi}{12}\right)+\mathrm{i}\sin\left(2\theta-\frac{\pi}{12}\right)\right]$$

1.2.5　共轭复数

我们把实部相等，虚部互为相反数的两个复数叫做**共轭复数**。如果其中一个复数记为 z，则其共轭复数记为 $\bar{z}$。利用共轭复数的性质，我们能够比较容易地证明两个重要的不等式

$$|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2| \tag{1.2.8}$$

$$|z_1-z_2|\geqslant\big||z_1|-|z_2|\big| \tag{1.2.9}$$

事实上，从共轭复数的性质，我们有

$$\begin{aligned}|z_1+z_2|^2&=(z_1+z_2)(\overline{z_1+z_2})=z_1\overline{z_1}+z_2\overline{z_1}+z_1\overline{z_2}+z_2\overline{z_2}\\&=|z_1|^2+\overline{z_1\overline{z_2}}+z_1\overline{z_2}+|z_2|^2=|z_1|^2+2\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2})+|z_2|^2\\&\leqslant|z_1|^2+2|z_1||z_2|+|z_2|^2=(|z_1|+|z_2|)^2\end{aligned}$$

由此即可得不等式（1.2.8）。如将上式中 z_2 换成 $-z_2$，则由此即可推出不等式（1.2.9）。

例 1.2.6　计算 $(2+3\mathrm{i})\overline{(2+3\mathrm{i})}-(4-3\mathrm{i})^2$

解　$(2+3\mathrm{i})\overline{(2+3\mathrm{i})}-(4-3\mathrm{i})^2$

$=(2+3\mathrm{i})(2-3\mathrm{i})-(16-24\mathrm{i}-9)$

$=4+9-7+24\mathrm{i}=6+24\mathrm{i}$

有时利用复数的代数运算来证明平面几何问题也很方便。

例 1.2.7　证明等式 $|z_1+z_2|^2-|z_1-z_2|^2=2(|z_1|+|z_2|)^2$，并对此等式作出几何解释。