9

工程數學 觀念分析

(上冊)

(附最新研究所考題)

3版

陳志偉 編著

標竿出版社

3版序

工程數學 觀念分析

—陳志偉 編著—

3-6 刷 107.25 页不连贯

▼轟動・搶購

▩感謝各位熱烈的支持和愛護，第二版即日三版供應。

▩內容除增訂外，下冊另加 76 年最新考題，彌足珍貴。

▶本書包含

▩集本班 90 餘班工數授課精華。

▩集工數公式、定理、觀念、題庫之大全。

▩下冊附歷屆及最新 76 年試題。

▲適合對象

▩升研究所博、碩士班最佳寶庫。

▩在職進修及高特考最佳利器。

▩各大專院校教學參考最佳書籍。

升研究所・高特考系列叢書

標 POLE 竿

工程數學 觀念分析

(上冊)

升研究所·高特考系列叢書
標 POLE 竿
高標準系列叢書(E202)

中華民國76年9月3版

書　　名:工程數學 觀念分析
作　　者:陳志偉
發 行 人:陳軾明
出 版 者:標竿出版社
北市南昌路一段43號2樓
3926796-7 3916005 3934653
印 刷 者:東陞美術印刷有限公司
北市德昌街185巷12弄14號
3055321・3050420
郵政劃撥:0597074-9
帳　　戶:賴祝光

中華民國75年6月初版
中華民國75年12月2版

局版台業字第3150號

定價:250元

致親愛的偉文學友

感謝各位多年來對偉文熱烈的支持和鼓勵，才能一天天茁壯，而堂堂邁入第6年；更感謝衆多學友的熱心關注和推薦，使得更多的學員湧向偉文，也承蒙多位助教、講師和教授參加研習的行列，並給予多方的批評和指教，大大提升了我們教學的水準和成果。

工程數學是大部份學科的基礎，也是衆多研究所必考的課程；而偉文升研究所更是傾全力灌注在工程數學的教學上，累積6年多來的教學經驗，從第一個班（Ｅ１）開始至今已超過九十個班次，76年研究所成果輝煌榜首林立，金榜耀眼，震憾了全國大學城，此乃偉文學友的成就，也是偉文的榮譽。

爲了加強工程數學和學習的效果起見，也是應衆多學友的要求起見，本班自前年發行工程數學總整理，不但學友購買踴躍，更引起不肖出版商的盜印、盜賣，可見本班教材彌足珍貴！今年我們重新編印，教材一律革新，並附加最新之研究所試題，更臻於完善！

本教材係陳志偉老師精心收集、編著和修訂，並融會歷屆各校研究所、期中、期末考、高特考等試題而成，爲參加工數應考必備之良書，並歷經多位工數老師校正，謹此對數位編輯老師致謝，並感謝各位教師、助教提供各校試題，並熱心解題；同時感謝偉文同仁打字、編校的辛勞。

敬請您一秉過去的愛心，繼續給予愛護和關照，並請您給予多方的批評和指教，讓您和偉文永遠走上勝利成功之路！

偉文考情資訊中心　陳龍敬啓

序言

史塔頓博士（Thomas F. Staton）在其所着「讀書方法」一書中，開章明義的說“我們看到、聽到億萬的事物，却從未予以留意，這行爲叫作感官吸收。感官吸收不導致記憶，也不產生學習，而許多效果不佳的學習即歸因於此。若對事物加以留意，你可以將感官吸收變成短期記憶。但是短期記憶只有其特定性能和用途，所以在學習上，應以長期記憶爲目標，這就需要將所學的東西概念綜合組織起來，並理解其中意義、重要性和關係，這叫做智識的處理”。

“工程數學”這門智識對理工科技人員或工程分析人員，是一門很基本很重要之學科，如何引導讀者對工程數學能在最短時間內達到最有效的學習，乃是作者撰寫本書的最主要動機，但是要使工程數學之觀念與分析技巧能植入一個人的長期記憶庫中，並不只是多多益善地、拼命地死記一些工數題型及解題技巧而已，對於一個工數學習者而言，其問題在於如何將你所學習到的工數觀念、題型及技巧，納入你的長期記憶庫中永久保存，如何在需要用到它時，能正確無誤取出應用於工程分析上。爲達成上述目標，必須將我們所學習到屬於短期記憶的題型與技巧，利用觀念的理解與比較作一有系統、有組織的整理與歸納，才能達到學習的最佳效果。

玆將本書學習步驟及主要三大特色簡述如下：

(1)觀念闡釋：工數是訓練一個知道如何思考，如何推演，且具獨立分析能力之工程師，所以對每一公式，題型解法及應用必須要有透徹、清晰之觀念，也就是說，你必須要知道：爲什麼要這樣解？爲什麼可以這樣解？還有沒有其他方法可用？……等等，這也是一般學工數者，最容易忽略的一點，也因此大大降低了學習的效果，本書試以最簡潔之敍述，作一詳密的說明，希望讀者在這一部分，多作思考，並作比較。

(2)類型與技巧整理：在建立了清晰的基本概念或知其所以然後，很自然地

就知道其如何分析的步驟與方法，但本書除了詳盡的介紹其分析技巧外，而且不分章節地將各種相同類型的題目作一整理組織成一完整的題型，俾利學習效果與興趣。例如工數考題中若有出現定積分題型者，不外乎下列類型之一：①可用 Gamma 函數解者②可用 Beta 函數解者③可用拉氏變換解者④可用 Fourier 變換解者⑤可用 Mellin 變換解者⑥可用複變積分或殘數定理解者⑦可用矩陣二次式化簡解者，……等等。

(3)綜合比較：本書在建立了題型與技巧後，最後再將所學之觀念與技巧作綜合比較，亦即要瞭解爲什麼有這些差異？這些差異會導致什麼之結果？例如，在學習完 Taylor 級數，Fourier級數及 Laurent 級數後，你有沒有想過，上述三級數在應用上各有什麼異同？各適用於什麼樣類型之工程問題？……

除了上述三大特色之外，在本書每章第一頁，您將看到一個內容大綱或學習重點，它給您一個扼要預告，讓您知道本章之範圍與重點，這是本書之一創舉，幫助您將內容淸淸楚楚地在心中組織起來，達到事半功倍的學習效果。本書第一章首先將工數中常用的特殊函數及其應用，作一綜合整理。在第二章至第六章以五章之篇幅，對常微分方程作一系統之介紹，其中第六章 Sturm-Liouville 邊界值問題在未來實際工程分析上應用非常廣，而一般工數書籍大都簡略介紹而已，所以本書特在此章作一有系統且完整之探討。接著兩章介紹二大積分變換法：拉氏變換及傅氏變換與級數，並整理出其應用於微分方程式求解之優越性。第九章開始，以總整理之方式，將微積分純量場內之微分積分之理論，衍伸應用至向量場中之微積分特性，亦即向量分析，並緊接着第三章矩陣分析及線性代數之探討。第十六章、第十七章，介紹複變數函數理論及其應用。第十八章開始，將各種偏微分方程及其邊界值問題作一系列整理。最後再加兩章差分方程式及變分學，以增加本書之完整性及廣泛性。舉凡歷年來各校土木、機械、電機、資訊……等工科研究所入學考題蒐集殆盡，並將其有系統的分門別類，詳解並歸納於各章精選範例及習題中，此乃其他工數書籍所沒有的，希望對有志於高層次研究工作者，或參加研究所入學考試者，提供一份理想之教材，並與您共勉！

在學完本書的每一章節後，讀者可依每一重點或觀念爲主而學習出題目，因

爲學會出題目，在準備考試上很有幫助，當然在考試上得高分不是讀工數之唯一目的，但是假裝把分數當作學習上不重要的東西也是很可笑的事。在工數一門中，可以提出之好問題，不在少數，但畢竟也是有限，隨著您在研習時，編製問題之技巧有所增進，您會發現您所編製之問題出現在考題之情形，也會越來愈多，平時將這些題目記下來，考試前再複習一下，將對您的考試成績有莫大之幫助。

最後，在本書四年編輯歷程當中，承蒙陳龍先生提供所有研究所考古題及斥資出版，黃立人老師提供代數部分試題詳解，陳宏謀老師對本書提供許多寶貴之意見，以及內人平時幫助整理講義，無時的精神鼓勵及最後校對工作之辛勞，及其他偉文工作同仁之校稿，無法一一備載，謹在此致最深忱之謝意；原稿及詳解雖屢經驗算校正，然謬誤在所難免，尚祈讀者不吝指正！

陳志偉　謹識

目錄

（上冊）

第1章 特殊函數及高等積分技巧

第2章 微分方程總論

第3章 一階常微分方程

第6章 Sturm-Liouville邊界值問題

第1章
特殊函數及高等積分技巧

學習大綱

1. $\Gamma(n)$ 二大類型 $\begin{cases} (1)\displaystyle\int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-x}\,dx \\ (2)\displaystyle\int_0^{1} (-\ln x)^{n-1}\,dx \end{cases}$

2. $B(m,n)$ 三大類型 $\begin{cases} (1)\displaystyle\int_0^{1} x^{m-1}(1-x)^{n-1}\,dx \\ (2)\, 2\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^{2m-1}\theta\cos^{2n-1}\theta\,d\theta \\ (3)\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{y^{m-1}}{(1+y)^{m+n}}\,dy \end{cases}$

§1•1 Gamma函數

瑕積分式如下列形式者

$$\Gamma(n)=\int_0^{\infty} x^{n-1}e^{-x}dx \qquad (n>0) \qquad (1.1\text{-}1)$$

稱爲Gamma函數，以$\Gamma(n)$符號表之，一般又稱Euler 第二積分式。

現就Gamma函數之重要特性分別整理如下

1 Gamma函數循環公式

$$\Gamma(n+1)=n\Gamma(n) \quad , \quad n\in R \quad n>0 \qquad (1.1\text{-}2)$$

$$\Gamma(k+1)=k! \quad , \quad k\in N \qquad (1.1\text{-}3)$$

【證明】依定義 $\Gamma(n)=\int_0^{\infty} x^{n-1}e^{-x}dx$

$$\Gamma(n+1)=\int_0^{\infty} x^{n}e^{-x}dx$$

利用分部積分法 $\int u\,dv=uv-\int v\,du$

令 $u=x^n \qquad dv=e^{-x}dx$

$du=nx^{n-1}dx \qquad v=-e^{-x}$

$$\therefore \quad \Gamma(n+1)=x^n(-e^{-x})\Big|_0^{\infty}+n\int_0^{\infty} x^{n-1}e^{-x}dx$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(-\frac{x^n}{e^x}\right)+n\Gamma(n)$$

由L'Hôpital's 法則

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{n(n-1)\cdots(n-p+1)x^{n-p}}{e^x}$$

$$+n\Gamma(n) \qquad (p\geq n)$$

$$= n\Gamma(n)$$

$$\therefore\ \text{得證}\ \Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$$

由式(1.1-2)循環公式可得

$$\Gamma(n+2) = (n+1)n\Gamma(n)$$

因此若 k 爲正整數，則

$$\Gamma(n+k) = (n+k-1)(n+k-2)\cdots(n+1)n\Gamma(n) \tag{1.1-4}$$

移項，可得

$$\Gamma(n) = \frac{\Gamma(n+k+1)}{n(n+1)\cdots(n+k)}$$

令 $n=1$，代入(1.1-4)式

得 $\Gamma(k+1) = k\cdot(k-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1\ \Gamma(1) = k!\,\Gamma(1)$

其中 $\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x}dx = -e^{-x}\Big|_0^\infty = 1$

$\therefore\ \Gamma(k+1) = k!\qquad k\in N$

上述稱爲階乘函數（Factorial Function），亦即可將Gamma函數當作廣義之階乘函數使用。

2 $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ (1.1-5)

此數值結果，在應用上非常簡捷有效，玆將證明介紹於后，希能加以記誦。

【證明】依定義式 $\Gamma(n) = \int_0^\infty u^{n-1}e^{-u}du$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty u^{1/2-1}e^{-u}du = \int_0^\infty \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}du$$

令 $u = x^2$，$du = 2x\,dx$ 代入

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty \frac{e^{-x^2}}{x}2x\,dx = 2\int_0^\infty e^{-x^2}dx$$

其中 $I=\int_0^\infty e^{-x^2}dx=\int_0^\infty e^{-y^2}dy$

上述結果相乘

$$I^2=\left(\int_0^\infty e^{-x^2}dx\right)\left(\int_0^\infty e^{-y^2}dy\right)$$

$$=\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)}dxdy$$

利用變數代換 $x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$

$$I^2=\int_0^{\pi/2}\int_0^\infty e^{-r^2}rdrd\theta$$

$$=\int_0^{\pi/2}\frac{1}{2}(-e^{-r^2})\Big|_0^\infty d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}d\theta=\frac{\pi}{4}$$

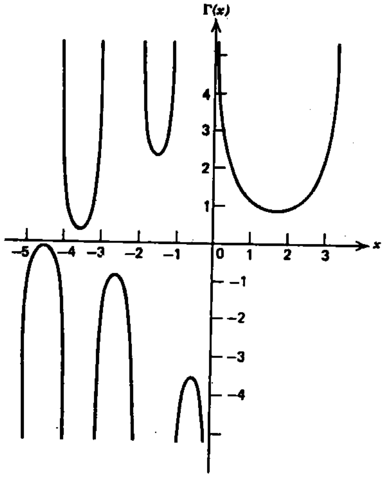
$$\therefore\quad I=\int_0^\infty e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

代回原式

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=2\int_0^\infty e^{-x^2}dx=2\times\frac{\sqrt{\pi}}{2}=\sqrt{\pi}$$

3 若將Gamma函數定義域推廣至 $n<0$ 之情況，可得當 $n=0$，-1，-2，… 時 $\Gamma(n)$ 之循環公式不再成立，亦即此時Gamma函數沒有意義。

$$\Gamma(n+1)=n\Gamma(n)\qquad n\neq 0,-1,-2,\cdots\cdots,\quad n\in R$$



n	$\Gamma(n)$
1.00	1.0000
1.10	0.9514
1.20	0.9182
1.30	0.8975
1.40	0.8873
1.50	0.8862
1.60	0.8935
1.70	0.9086
1.80	0.9314
1.90	0.9618
2.00	1.0000

雖然 $\Gamma(n)$ 在 $n=0,-1,-2,\cdots\cdots$ 爲無窮大，但 $\dfrac{1}{\Gamma(n)}$ 對任何 n 值都有數值可得。

5 $\Gamma(n)$ 之其他常用形式

(1)令 $x=ay$

$$\Gamma(n)=a^n\int_0^{\infty}y^{n-1}e^{-ay}dy \qquad (n>0) \quad (1.1\text{-}7)$$

(2)令 $x=y^2$

$$\Gamma(n)=2\int_0^{\infty}y^{2n-1}e^{-y^2}dy \qquad (n>0) \quad (1.1\text{-}8)$$

(3)令 $x=-\ln y$

$$\Gamma(n)=\int_0^1(-\ln y)^{n-1}dy=\int_0^1\left(\ln\frac{1}{y}\right)^{n-1}dx$$

(1.1-9)

6 任何積分式，如

$$\int_0^{\infty} x^a e^{-bx^c} dx = \frac{1}{c\, b^{a+1/c}} \Gamma\left(\frac{a+1}{c}\right),$$

$$c>0\ ,\ b>0\ ,\ a>-1 \qquad (1.1\text{-}10)$$

【證明】令 $bx^c = u$

得 $x = \left(\frac{1}{b}u\right)^{1/c}$, $dx = \frac{1}{c}\frac{1}{b^{1/c}} u^{1-c/c} du$

$$\int_0^{\infty} x^a e^{-bx^c} dx = \int_0^{\infty} \frac{u^{a/c}}{b^{a/c}} e^{-u} \frac{1}{c}\frac{1}{b^{1/c}} u^{1-c/c} du$$

$$= \frac{1}{c\, b^{a+1/c}} \int_0^{\infty} u^{(a+1/c)-1} e^{-u} du$$

$$= \frac{1}{c\, b^{a+1/c}} \Gamma\left(\frac{a+1}{c}\right) \quad \#$$

7 精選範例

【例 1101】

求 $\int_0^{\infty} x^3 e^{-x} dx$

解 利用 $\Gamma(n)$ 遠比利用微積分第二型基本定理迅速簡易。

依 $\Gamma(n)$ 之定義式知

$$\int_0^{\infty} x^3 e^{-x} dx = \int_0^{\infty} x^{4-1} e^{-x} dx$$

$$= \Gamma(4) = 3\,! = 6$$

【例 1102】

求 $\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-x^2} dx$