华章数学译丛

HZ BOOKS
华章教育

45

PEARSON

Introduction to Topology

Pure and Applied

拓扑学基础及应用

(美) Colin Adams 威廉姆斯学院 Robert Franzosa 缅因大学 著

沈以淡 等译

机械工业出版社
China Machine Press

华章数学译丛

45

Introduction to Topology
Pure and Applied

拓扑学基础及应用

(美) Colin Adams 威廉姆斯学院 Robert Franzosa 缅因大学 著
沈以淡 等译

机械工业出版社
China Machine Press

本书通过大量例子和插图，用生动的语言深入浅出地阐述了拓扑学这门重要的、充满魅力的数学课程. 本书分为两部分，前七章作为第一部分，介绍了拓扑学这门课程的基本内容；后七章作为第二部分，论述了拓扑学的概念在其他数学领域、科学以及工程方面的作用和意义.

本书作为拓扑学的入门课程，适用于对拓扑学及其应用感兴趣的各专业本科生与研究生.

本书版权登记号：图字：01-2008-1790

图书在版编目（CIP）数据

拓扑学基础及应用/（美）亚当斯（Adams, C.）等著；沈以淡等译. —北京：机械工业出版社，2010.2

（华章数学译丛）

书名原文：Introduction to Topology: Pure and Applied

ISBN　978-7-111-28809-1

Ⅰ. 拓…　Ⅱ. ①亚…　②沈…　Ⅲ. 拓扑　Ⅳ. O189

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2009）第 192990 号

机械工业出版社（北京市西城区百万庄大街 22 号　邮政编码　100037）

责任编辑：迟振春

北京瑞德印刷有限公司印刷

2010 年 4 月第 1 版第 1 次印刷

186mm×240mm · 20.75 印张

标准书号：ISBN 978-7-111-28809-1

定价：59.00 元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

客服热线：(010) 88378991；88361066

购书热线：(010) 68326294；88379649；68995259

投稿热线：(010) 88379604

读者信箱：hzjsj@hzbook.com

译　者　序

众所周知，拓扑学（与分析学和代数学一起）是现代基础数学的三个关键领域之一. 近几十年来，拓扑学在经历朝抽象方面发展的阶段后，又在诸多应用领域得到了广泛的发展. 本书就是为了适应这一趋势而推出的.

本书适用于对拓扑学及其应用感兴趣的各专业本科生与研究生，当然还有教师和专业人员. 这些专业领域包括数字图像处理、遗传工程、地理信息系统、机器人学、医学（心脏搏动模型）、生物化学、化学、经济学、化学图论、电子线路设计和宇宙学等. 对于数学专业的本科生、研究生和教师，本书也是很好的教材或教学参考书. 此外，关注数学教学改革的各界人士，也能从本书得到有益的启示.

本书可以分为两大部分，前七章作为第一部分，是介绍拓扑学基础的核心部分，后七章是第二部分，其中的拓扑学论题的结论大都来自前七章的结论.

作者在展开内容时，无论是理论还是应用方面，都先提供一个简短的、引人入胜的背景知识的介绍，为引进有关的概念作铺垫，并激发读者学习和以后进一步钻研的兴趣. 为了减轻读者的负担，除了核心部分，作者还设法让本书所讨论的论题彼此独立. 在“前言”中，列表给出了这些论题之间的关系. 借助这个表，读者就可以采用最合理的途径，尽快地实现自己的目标.

对应用感兴趣的读者，可以按照“前言”中列表的提示选学有关的章节，为解决相关领域的问题，尽快奠定必要的拓扑学的基础.

由于“不懂拓扑学就不懂现代数学”的观念逐步深入人心，因此拓扑学课程已开始列入大学数学类专业的教学计划. 而本书理论与应用并重，把它作为基础数学与应用数学专业本科生或其他专业研究生拓扑学课程的教材，是很合适的. 在本书中，作者采用拓扑学的工具对代数学基本定理和若尔当曲线定理作出证明. 这两个定理在数学专业的课程中一般是不给出证明的. 当然，对专攻拓扑学领域的学生来说，本书对有关理论的阐述深度是不够的，有待进一步扩展. 此外，译者认为，本书缺乏对拓扑学整个学科的系统性的综述，这算是它的美中不足之处. 不过有心的读者不妨自己进行综合、概括，必定大有裨益.

译者向读者推荐本书，理由很简单，作者将人们通常认为很抽象、很艰深、望而生畏的一门数学课程用生动的语言深入浅出地阐述出来. 它还提供了许多例子和插图，便于读者理解抽象的概念和理论. 因此，只要有一定微积分基础的读者，都能通过本书掌握拓扑学的基本理论和方法.

作者还针对读者对课程的不同需要，对内容作出精心的安排并提出建议. 课程的实施除了可以采取各种通常的形式外，还可以采取讨论班的形式进行，这样，读者在获取知识的同时，还能增长解决问题的能力.

译者还向关心数学教学改革的人士推荐本书. 本书很有独创性，除了反映拓扑学广泛应

用的动态外，还为数学教学改革提供了范例. 作者尊重教学规律，注重启发学生的思维，有利于科学独创性的培养. 现在，科教兴国的观念日益深入人心，重视教育的呼声持续不断. 数学工作者为此也作出了努力，但是实际状况并不理想. 仅以微积分教材为例，全国出版的各类微积分课本不下千种，不仅内容千篇一律，而且教学思想也显得有些陈旧，所举的例子很多是不切合实际的，有创意的教材屈指可数，与社会的需要很不适应. 如果没有独创性的教学思想和教材，学生独创性思维的培养就无从谈起了，希望本书能为我国数学教材的改革提供有益的借鉴，译者渴望独创性的数学教材在华夏大地不断涌现.

译者作为从事数学教学工作40年的老数学工作者，有幸比读者早欣赏到本书的风采，再次郑重向诸位推荐此书，愿与大家一起分享好书给人们带来的愉悦.

承蒙机械工业出版社华章公司计算机编辑部主任及责任编辑的关注，使译者在本书定稿前收到从网上下载的原作者提供的勘误表，确保了本译著的质量，对此表示谢意. 译者提及此事，是希望国内出版界本着对读者负责的精神，发扬勇于纠正错误的风气，利用网络发布等形式，为读者提供高质量的精神食粮.

除封面署名之外，参与本书翻译的还有王季华、姚德源、肖伯骥、沈佳、仇晓林等人. 本书涉及的应用学科门类广泛，由于知识面的局限，在有关拓扑学和应用学科的术语等方面的表述上，难免有不当之处，请读者不吝指正，在此预致谢意.

沈以淡

2010年3月15日

前　言

通常认为，拓扑学（与分析学和代数学一起）是现代基础数学的三个关键领域之一．在拓扑学的早期发展中，它的一些结果主要是受现实世界问题研究的推动而产生的．然后，在 20 世纪上半叶，拓扑学的奠基性工作确立以后，它的重点开始转向抽象．过去几十年来，拓扑学在诸如经济学、工程、化学、医学和宇宙学等形形色色的领域中的应用都有了长足的发展．

本书的目标在于以下两个方面：

- 介绍拓扑学这门重要的、充满魅力的课程．
- 论述拓扑学的概念在其他数学领域、科学以及工程上的作用和意义．

通过本书，读者将了解点集拓扑的基础知识，并进一步被引向诸如纽结、流形、动力系统、不动点和拓扑图等课题．此外，读者还将了解在一些应用领域中如何运用拓扑学的一些结果，范围包括从化学中的原子到宇宙学中的天体．

目标读者

阅读本书需要具备最基本的数学素养．对于已成功修完一门基础数学方面的入门课程的学生来说，应该已具备了足够的数学背景知识．在第 0 章，我们提供了本书所需的集合、关系、函数、实数轴和欧几里得空间等背景材料的概述．已经修过微积分系列课程并掌握了本书第 0 章的内容，且在数学上有一定素养的学生，就已充分作好了选修本课程的准备．我们认为，本书作为拓扑学的入门课程，适用于本科生一学期或两学期的教学，也可以作为研究生的入门课程．

如何使用本书

点集拓扑的核心介绍可以在本书以下章节找到：1.1～1.3，2.1～2.3，3.1～3.4，4.1，4.2，5.1，5.3，6.1～6.4，7.1～7.3．

对采用本书作为教材的任何课程，我们推荐把以上这些章节列入课程的核心部分，因为本书其余大部分材料都来自这些章节的许多结论．

除了这些核心部分，我们试图使本书的其余论题彼此独立．在后面的表中，给出了这些论题之间的关系．

对本书核心部分之外的每个拓扑学论题以及每个应用，我们都提供了简短的、有意义的、引人入胜的介绍，希望以此激发读者的兴趣，并为后续研究埋下伏笔．

对于一学期的拓扑学入门课程，应该包括第 1～7 章的核心部分，以及其余章节的几个附加课题．随后的课程安排可以采取各种形式，既可以继续学习本书的全部附加课题和应用，也可以采取讨论班的形式进行．在讨论班上，可以让学生对附加的课题和应用进行探讨，并发表对这些问题的看法．在每次讨论班上，在拓扑学的应用方面应选取一个关注点，主要选自本书提供的素材．我们还认为，这些附加的课题和应用有助于学生的独立研究，并为优等生或教师的进一步探索提供有益的介绍性材料．

章节之间的关系

本书的使用可以有许多方式．不过，我们仍然推荐把第 1～7 章的核心部分作为点集拓扑

的一个引论．下表给出了本节各论题之间的关系，以帮助读者或教师挑出所需的、核心部分以外的课题，并选择合适的学习顺序．关于此表，应注意以下几个要点：

- 与核心材料所对应的章节号，加圈予以标注．
- 没有提供第 1～7 章之间的相互关系，仅给出其中每一章各节之间的相互关系．
- 对第 8～14 章的附加课题来说，第 1～7 章的核心材料是不可或缺的，但是，第 1～7 章非核心的节中没有第 8～14 章所需的材料（除了几个习题中参考了所需的材料外）．因此，在此表中，未告知第 8～14 章如何依赖于第 1～7 章．
- 提供了第 8～14 章之间以及每一章各节之间的依赖关系．

第 1 章：拓扑空间	1.1 → 1.2 → 1.3 → 1.4
第 2 章：内部、闭包与边界	2.1 → 2.2 → 2.3 → 2.4
第 3 章：构建新的拓扑空间	3.1 → 3.2 → 3.3 → 3.4 → 3.5
第 4 章：连续函数与同胚	4.1 → 4.2 → 4.3
第 5 章：度量空间	5.1 → 5.2 5.1 → 5.3 5.1 → 5.4
第 6 章：连通性	6.1 → 6.2 → 6.3 → 6.4 → 6.5
第 7 章：紧致性	7.1 → 7.2 → 7.3 → 7.4 7.3 → 7.5
第 8 章：动力系统与混沌 • 本章与其他章的论题无关．	8.1 → 8.2 → 8.3 → 8.4 8.3 → 8.5
第 9 章：同伦与度理论 • 定理 9.14 的证明要用到 4.1 节和 7.3 节的补充练习中所建立的蒂茨延拓定理．	9.1 → 9.2 → 9.3 9.2 → 9.4 9.2 → 9.5 9.2 → 9.6
第 10 章：不动点定理及其应用 • 10.1 节中布劳威尔不动点定理的证明要用到 9.2 节中的非收缩定理．	9.2 → 10.1 10.1 → 10.2 10.1 → 10.3 → 10.4
第 11 章：嵌入 • 在 11.1 节中对亚历山大角状球面的讨论，涉及 9.5 节中所给出的单连通性．对于这个例子来说，并不需要对单连通性进行充分阐述，能直观地理解 9.5 节中的定义和相关结果就足够了． • 在 11.2 节中对若尔当曲线定理的证明，需要用到 9.2 节中的非收缩定理和定理 9.14，以及 10.1 节中的布劳威尔不动点定理．请注意，正如在第 9 章已提过的，定理 9.14 的证明要用到蒂茨延拓定理．	9.2 → 10.1 → 11.2 11.1 → 11.2 11.1 → 11.3
第 12 章：纽结 • 本章与其他章的论题无关．	12.1 → 12.2 → 12.3 → 12.4

（续）

第 13 章：图论与拓扑学 • 本章与其他章的论题无关.	13.1 → 13.2 13.1 → 13.3 → 13.4
第 14 章：流形与宇宙学 • 在 14.3 节末尾简短讨论庞加莱猜想时提及了单连通性，这是 9.5 节中所提出的论题. 除此之外，本章与其他章的论题无关.	14.1 → 14.2 14.1 → 14.3 → 14.4 → 14.5

证明

在本书中，拓扑学是作为一门基础数学来阐述的，我们提供了所需的定义、定理和适当形式的证明.

在第 1～7 章的核心部分，对所有的定理（除乌雷松度量化定理外）或者给出了证明或者安排作为习题. 这些定理的证明主要是根据定义和以前的定理以直接的方式得到的. 在这些章中所给出的证明中，我们试图为读者提供范例，在做习题中的证明题时，可以作为参考. 阅读、理解这些证明，并且把它们的推导过程写出来，是学好数学的至关重要的方面.

在第 8～14 章中，我们对所提出的一些定理不加以证明，而另外一些给出证明的定理也未包含技巧上的细节. 之所以这样做，是因为这些证明或细节要么需要超出本书范围的高深工具，要么背景特殊并与课题的适当展开显得有些格格不入. 我们希望在第 8～14 章中，用较少的篇幅对论题进行介绍，并希望这些介绍能够让读者感到流畅自如. 在证明或细节省略的场合，我们通常会告知读者，在哪里可以找到与此论题有关的进一步信息的其他来源.

拓扑学是一门高度可视化的学科，因而在研究时，图示对一个论题的理解常常是有益的. 我们有时通过图示把一个证明中论证的几个部分连贯起来. 在拓扑学中这是惯例，但是这样做既有优点又有不足. 优点是，它使得书中的材料融会贯通，为一项研究工作或一次教学活动减少需要明确告知的细节；而缺点是，特别是对像本书这样一本入门教材来说，可能会给人一种印象，即拓扑学似乎主要是关于图形的一门学科，不如数学的其他领域那样严格. 重要的是，要把图形的背后总是存在规范的数学这一点牢记在心，而且如果需要，可以提供为完成由图形表示的论证所需的必要细节.

图示

正如之前所提及的，拓扑学在自然界中是十分直观的. 因此，我们提供了许多图示来帮助读者理解所提供的材料. 而这些图示的内容从上下文来看应是一目了然的，为此我们采用了几个与图示中所用的尽可能一致的约定. 下面用本书中所定义的数学术语来介绍这些约定.

一般的拓扑空间　拓扑空间主要是为本书中所提出的理论而设置的. 通常用空心矩形（黑色边线）表示一个一般的拓扑空间. 例如，图 1 示意了一个集合 A 在一个一般的拓扑空间 X 之中.

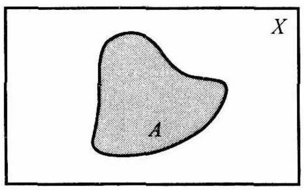

图 1　在一般拓扑空间 X 中的一个集合 A

平面　平面是本书所用的主要拓扑空间之一. 在图示中，平面通常用无边线的灰色的矩形或平行四边形来表示. 例如，图 2 示意了平面中的一个集合 A——在一种情况下直接看作是平面，在另一种情况下可看作是一个具有倾角的平面.

3 维球面 3 维欧几里得空间也是本书所用的主要拓扑空间之一．通常用一个示意图来描述 3 维空间的集合．然而，有时为了强调示意图的环境位于 3 维空间，将一组 3 维的坐标轴也包括在示意图之中．例如，图 3a 所描述的球面不处于特定的环境，或可由上下文判断其所处环境，而图 3b 所描述的是在 3 维空间中的一个球面．

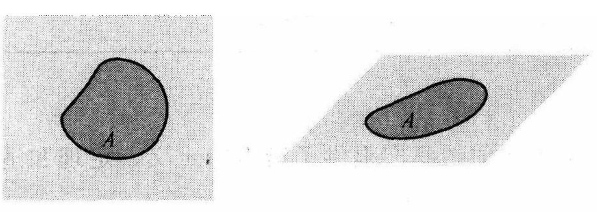

图 2　平面中集合 A 的两种视图

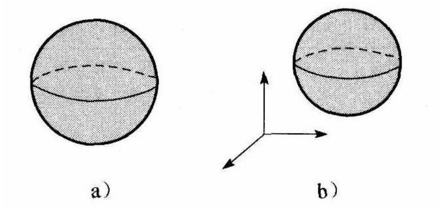

图 3　一个球面和在 3 维空间中的一个球面

开集与边界被排除在外的部分 拓扑空间是开集族．在图示中，一个开集用由虚线边界所围的一个集合来表示．这个约定反映了一个事实，即开集不包括边界．虚线也用于表示一个集合的不包括在此集合之中的边界部分．在图 4 中，集合 A 是拓扑空间 X 中的一个开集；集合 B 是平面的一个开集；而集合 C 是一个正方形形状的平面集合，它包括正方形的左边和右边，但不包括它的顶边和底边．

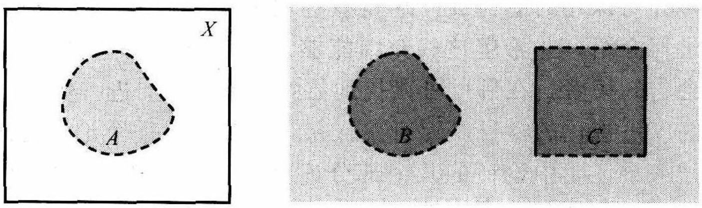

图 4　集合 A 与 B 是开集，集合 C 不包括顶边和底边

虚线还用于表示图示中所隐藏的或背后的曲线（如图 3 所示）．通常，这些虚线更细、更短．根据上下文，这些虚线所表示的含义应是一目了然的．

挖去的点 一些集合偶尔是从其他一些集合挖去一些点而得到的．在图示中，从一个集合中挖去一个点，通常用一个小的虚线圆来表示，如图 5 所示．

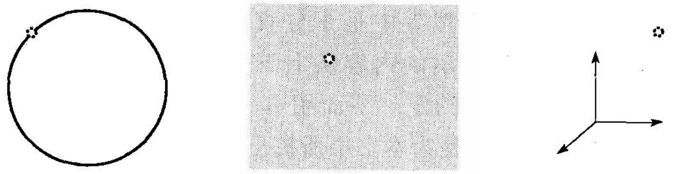

图 5　挖去一个点的一个圆周、挖去一个点的一个平面以及挖去一个点的 3 维空间

目　录

第 0 章 引　论

0.1　拓扑学是什么以及如何应用

拓扑学是所有数学学科中最活跃的一个领域．按照传统的说法，拓扑学（与代数学及分析学一起）被认为是基础数学的三大领域之一．近年来，由于许多数学家和科学家把拓扑学的概念用于模拟或理解现实世界的结构和现象，拓扑学又成了应用数学的一个重要组成部分．在本书中，我们按以下两个方面来介绍拓扑学：一是作为一门基础学科的传统方法；二是作为应用工具的一种有价值的来源．按照应用的观点，我们发现拓扑学既对现实世界的问题产生影响，又影响着其他数学领域的种种成果．

拓扑学脱胎于几何学，推广了它的某些观念，并抛弃了出现在其中的某些结构．从字面上看，“拓扑学”这个词意味着关于配置与定位的研究．拓扑学研究形状及其性质、变形和它们之间的映射，以及把它们组合起来的构形．

拓扑学通常被称为“橡皮胶布几何学”．在传统的几何学中，把像圆周、三角形、平面和多面体这样的物体当作刚体，明确定义了点与点之间的距离，以及棱与面之间的角度．但是，拓扑学与距离以及角度是不相关的．如果物体是由橡皮做的，能够变形．我们允许物体弯曲、扭转、拉伸、收缩，或者相互变形，但是我们不允许物体撕裂．在图 0.1 中，我们看到 4 种形状，从几何透视来说它们是不同的．而在拓扑学中却认为它们是等价的．其中任何一种，如果由橡皮制作，那么就可以变形为其余每一种．

在图 0.2 中，我们看到两个物体（环面与球面）在拓扑学中是不同的．按照拓扑学的任何方式，都不能把一个球面变形为环面，因而按拓扑学的眼光，这两种曲面是不等价的．

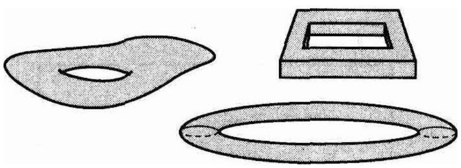

图 0.1　拓扑学家认为这 4 种物体是等价的

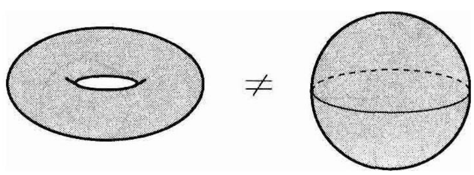

图 0.2　环面与球面并非拓扑等价

通常说，拓扑学家对一个油煎圈饼与一个咖啡杯不加区分．这意味着在拓扑学中，一个咖啡杯能变形为一个油炸圈饼的形状．按拓扑学关注的角度，这两个物体是等价的（见图 0.3）．

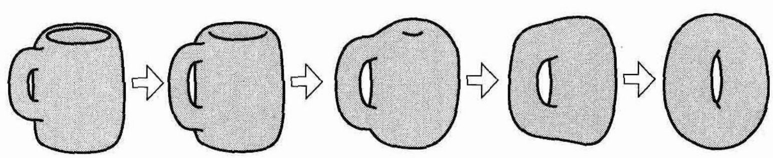

图 0.3 一个咖啡杯与一个油煎圈饼是拓扑等价的

对于这种橡皮胶布几何学居然在现实世界这么有用，你可能会感到惊奇．这种想法很寻常．通常，在一种特定的场合，当我们把一个物体认为是可变形的时候，保持这种性质就很有意义；而当我们把一个物体当作刚体时，保持这种性质就没有意义了．诚然，拓扑学家不能区分一个油炸圈饼与一个咖啡杯，但是拓扑学家却能够——我们将看到这对于整本书有多么重要——辨别和使用这些物体所共有的性质．

让我们快速浏览一下拓扑学的几个课题，以及在本书中提出的某些应用中它们所起的作用．我们在这里介绍的所有概念，在随后的各章中将更充分地加以阐述．

拓扑空间与表型空间

我们在拓扑学中研究的对象称为拓扑空间．它是点的集合，对于它们来说，点与点之间接近的概念，通过指定一组称为开集的子集而建立．直线、圆周、平面、球、环面以及默比乌斯（Möbius）带，都是拓扑空间的例子（见图 0.4）．在第 1 章和第 3 章，我们将明确地定义拓扑空间和它们的开集，还将发现在各种环境和场合如何构造拓扑空间．

表型和基因型的概念在进化生物学中十分重要．每一个活生生的有机体，是内部密码与可遗传信息（基因型）的物质性的体现（表型）．从一种表型到另一种表型的进化演变，按照它们相应的基因型信息，通过称为突变的改变而实现．我们很想有一个表达一种表型与另一种表型相接近的概念，以反映一种基因型突变，为什么能把一种表型转换为另一种表型．在 1.4 节，我们通过从一个表型的集合来构造一个拓扑空间，从而描述分子生物学家是如何建立有关进化接近性的概念的．

地理信息系统中内部、边界与区域的关系

给定一个拓扑空间的一个集合，与它有关的两个集合是内部和边界．对于空间 X 中的一个集合 A，我们直觉地认为，A 的内部是由 A 内的点近旁的点所围的那些点组成，而 A 的边界是靠近 A 或靠近位于 A 的外边的点集（见图 0.5）．在第 2 章，我们将用开集正式定义内部和边界．

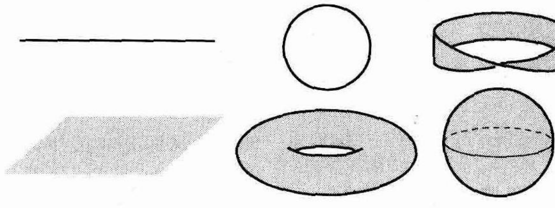

图 0.4 各种拓扑空间

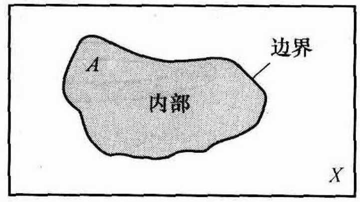

图 0.5 集合 A 的内部和边界

地理信息系统（GIS）是存储或处理现实世界地理信息的一个计算机系统．一个地理信息

系统，必定能回答诸如“如何为科尔顿尼亚[⊖]安排覆盖亚历山大港保护区的着陆?”这样的询问. 为此，GIS要能够区分陆地之间相关联的范围，此外，还需要有一种手段，来确定已知一对地区所满足的特定关系. 在2.4节中，我们将根据集合的内部和边界，提出一种区分这些关联的模型. 例如，如果集合A与集合B仅在它们的边界相交，那么我们说A与B彼此“接触”. 我们用图0.6来图示这种关系，并图示出按照我们所提出的模型所认定的其他关系.

流形与宇宙学

一个n维流形是一个拓扑空间，局部类似于n维欧氏空间. 例如一个1维流形，局部类似于一条直线；一个2维流形，局部类似于一个平面；一个3维流形，局部类似于一个3维空间，等等.

2维流形亦称为曲面. 球面与环面是曲面的两个特例. 位于曲面一个开集内的每一个点，拓扑等价于位于一个平面的一个开集中的每一个点.（见图0.7.）

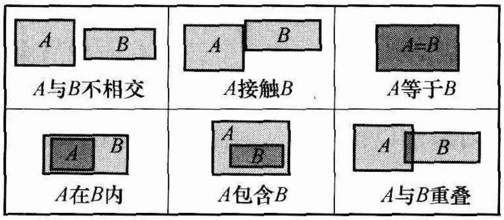

图0.6　集合A与B之间各种可能的关系

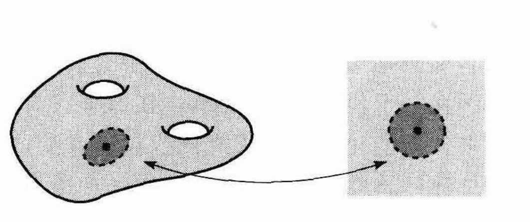

图0.7　一个曲面与一个平面在局部似乎是相同的

地面上的居民可能坚信，他们确实生活在一个平面上，由于他们在局部范围所看到的似乎就像在一个平面上所看到的一样.（这个观念在一本19世纪令人感兴趣的、由Edwin Abbott所著的《Flatland：A Romance of Many Dimensions》书中首先被提出）. 然而，地面上的居民通过研究他们所在地球的性质，就会推断它的全部形状，因而能与一个平面相区别.

很自然地，以类似的方式，人们感觉到，他们生活在其中的宇宙，是一个3维欧氏空间，这是由于人们在局部范围所察觉到的正是如此. 宇宙学家试图通过研究揭示地球整体构造方方面面的一些性质，来确定地球的精确形状. 在第14章，我们将考察3维流形，而我们的讨论方法与宇宙学家相接近，他们选用的方法是，确定究竟应该采用哪一种3维流形来作为地球形状的模型.

嵌入、纽结和DNA

嵌入是一个函数，它采用一个拓扑空间，并把它的一个拷贝放入到另一个拓扑空间中. 我们用图0.8来图示在3维空间嵌入两个圆周的结果.

这些嵌入看上去明显不同. 在左边，被嵌入的圆周是纽结的，而右边，被嵌入的圆周却不是纽结的. 研究在3维空间嵌入圆周的学科称为纽结理论. 确定纽结的不同类型，以及它们彼此如何相关联，是拓扑学这一领域的重要方面.

在纽结理论中，人们对它实现的基本运算之一，是交叉改变. 正如在图0.9中所见到的，我们改变交叉，让上面一股变成下面一股，或让下面一股变成上面一股. 自然要问，对于一

⊖　一个不知名的地方. ——译者注

个纽结，这种运算会产生什么效果呢？

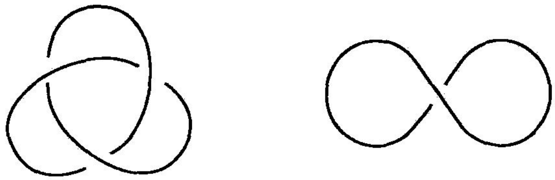

图 0.8　在 3 维空间嵌入圆周

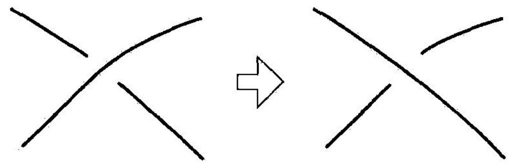

图 0.9　交叉改变的运算

我们发现，上述同样的运算出现在细胞核分子层次上．脱氧核糖核酸（DNA）是由无数原子所组成的一个长长的、细小的分子．这种漫长的绞线在细胞核内塞满，它的填塞状况相当于把 200km 的钓丝塞入一个篮球之中．

为了使生命过程得以延续，细胞的生物组织必须能随心所欲地接近以及操作 DNA 分子．因此，细胞有效解开 DNA 的能力，对它的生存是至关重要的．细胞核的内部存在称为酶的分子，它是生物学的工具．这些酶中有些能在 DNA 内形成交叉改变，使它解开．有一种酶会切割绞缠在一个位置上的 DNA，在那里它自身交叉进而重新绞缠，从而交叉成相反的类型．最近以来，新的化学疗法代理商提议，在酶产生作用时对它加以抑制，从而阻止癌的 DNA 自身重建．我们将在第 12 章中讨论纽结理论及其应用．

不动点与经济学

对于把一个拓扑空间映射到自身的一个函数，如果在空间内有一个特定的点，通过这个函数映射到自身，这个函数就有一个不动点．例如，在图 0.10 中，点 p 是图示函数 f 的一个不动点．

不动点理论是拓扑学的一个重要领域，它涉及诸如“哪一种把一个拓扑空间映射到自身的函数有一个不动点?”、“哪一种拓扑空间使得把它映射到自身的每一个连续函数都有一个不动点?”这样的问题．在这个领域最著名的结果，是布劳威尔（Brouwer）不动点定理．它断言，在每一个闭 n 维球上的连续函数有一个不动点．例如，在 1 维的情况，把一个闭区间映射到自身的每一个连续函数有一个不动点．在 2 维的情况，把一个圆盘映射到自身的每一个连续函数有一个不动点（见图 0.11）．在第 6 章和第 10 章，我们将分别证明 1 维和 2 维的结果．

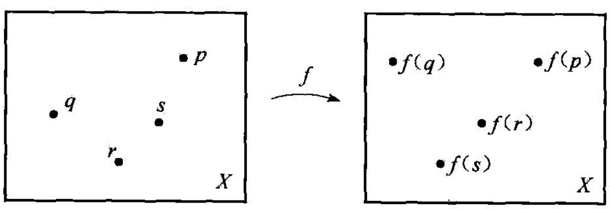

图 0.10　函数 f 有一个不动点 p

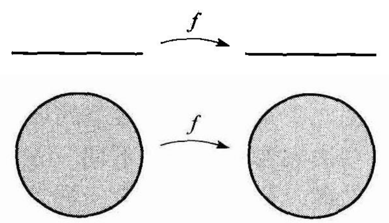

图 0.11　把区间映射到区间或把圆盘映射到圆盘的连续函数必有一个不动点

在一个经济学建模系统中，包含有消费者和货物以及与它们有关的一组变量，包括货物的供给、货物的价格及对货物的需求．通常，在最近的将来，变量的值会在当前值的基础上发生改变．例如，近期短缺的应用拓扑学教材的价格在最近的将来会提高．经济学家所感兴

趣的是，了解一个经济系统是否能处于一个均衡状态，即既能使消费者比较满意，而每一种货物相应的供应、价格和需求又保持不变的状态. 在 10.2 节，我们将把布劳威尔不动点定理应用于这一经济模型，并论证均衡状态是有可能实现的.

布劳威尔不动点定理的结论是一种有关存在性的结论. 它肯定了不动点的存在性，但不能确定它究竟位于何处. 这是在拓扑学中所出现的，并在应用时所使用的许多结论的本质. 正是对这些结论的定性的论证，导致了拓扑学工具的使用.

由于像距离和角度这些量的测量与拓扑学不相关，因此我们在应用拓扑学时，不指望得到额外的定量结果. 通常，拓扑学促进系统的定性分析，它有助于确认作为基本结构的结论成立的可能性或不可能性.

拓扑学的应用有以下三个方面：

(1) 确认适当的拓扑结构和关系.

(2) 正式定义拓扑学概念，并严格证明拓扑学的结论.

(3) 应用拓扑学的概念和结论得出结论.

于是，贯穿全书，我们将采用有关拓扑学的以下三个方面的观点：普遍的观点、理论的观点及应用的观点.

按照公认的观点，我们直觉地认为，拓扑学是有关形状与它们的性质的基础研究. 这些就是当我们研究现实世界的系统，并据此作出有关它们的结论时，我们确认或检验应用问题的拓扑学方面.

拓扑学的理论观点，是把拓扑学作为一种基础数学学科的经典观点. 我们从它的基础出发构建这一理论，使得我们在用普遍观点进行研究时，能恰当地定义概念和结构，从而使我们有合适的理论基础用来支持按照应用观点所使用的一些工具和关系.

最后，在以应用的观点来研究拓扑学的应用时，涉及我们所推导的一些关系和结果. 在此之前讨论过的一些例子，使我们已初步面对过即将探讨的、在现实世界中一些类型的应用问题. 此外，我们还考察在数学的其他领域中，拓扑学的概念如何有助于定义和揭示其中的重要结构与关系. 例如，在第 7 章，我们把一些拓扑性质与奠定微积分基本定理的基础融为一体；在第 8 章，用拓扑学概念来定义动力系统中的混沌；在第 9 章，用拓扑学结果来证明代数学基本定理.

0.2　历史一瞥

人们公认，拓扑学开创于伟大数学家欧拉（1707—1783）所解决的、著名的哥尼斯堡七桥问题. 让我们快速地浏览一下这个问题.

在 18 世纪，一条蒲雷格尔河流过普鲁士的哥尼斯堡（今俄罗斯加里宁格勒）城，这条河流把城市分为 4 个分离的区域，有 7 座桥梁跨越这条河流，并把这 4 个区域相连在一起，如图 0.12 所示.

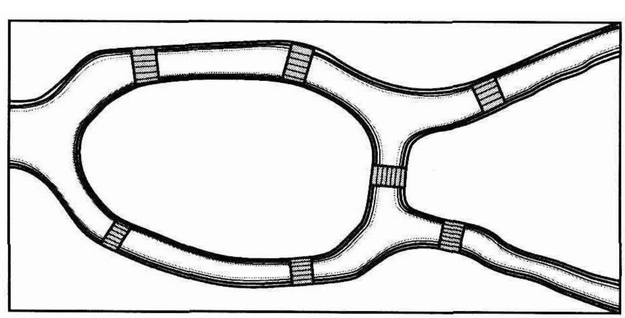

图 0.12　哥尼斯堡城的七座桥

哥尼斯堡城的居民有一项有趣的娱乐，就是设法漫步走过桥梁遍游全城. 人们不禁要问，“你是否能通过走遍每座桥梁遨游

全城，而每座桥只能走过一次?”有趣的是，居然没有一个人能找到这样的漫游路线.

上述问题引起了学者欧拉的注意，他意识到，这是一个涉及新的、称为“位置几何学”的数学课题. 他说：

> 最近以来，出现了一个无疑被认为是属于几何学的问题，然而在打算解决它时，既不要求确定数量，又不要求进行数量上的计算；因此，我毫不犹豫地把它归于“位置几何学”，主要原因是，它的解决仅仅需要考虑位置，而计算是没有用处的.

欧拉对这个问题进行了分析，并证明了按照给定的区域和桥梁的布局，通过漫步走过七桥实现遍游全城的路线是不存在的. 在 13.1 节，我们将进一步考察这个问题.

在此后长达一个半世纪的时间里，有许多有名的数学家追随欧拉的这项最初的研究，对位置几何学作出了有价值的贡献. 其中有高斯（1777—1855)、默比乌斯（1790—1868)、利斯廷（1808—1882)、黎曼（1826—1866）与克莱因（1849—1925)，以上都是德国数学家，此外，还有法国数学家庞加莱（1854—1912).

“拓扑学”这一个术语首先出现于 1847 年利斯廷的论文“拓扑学的初步研究”之中，但是这个术语没有被广泛使用，原因是由于这门学科在几个世纪以后才被正式确定. 几何学的这一新领域最初被称为“位置分析”，庞加莱在他 1895 年的标题为“位置分析”的论文中，首先提出了这个名称. 他是这样来阐述位置几何学的这个一般原理的：

> 图形的比例全都被取代，不过它们的各个组成部分不一定互换，但必须保持它们的相对位置. 换句话说，人们不必担心定量性质，但必须关注定性性质，确切地说，就是关注位置分析所涉及的那些性质.

19 世纪在位置几何学方面的许多成果都来自应用问题的刺激，其中有麦克斯韦尔（1831—1879）和泰特（1831—1901）关于纽结（源于化学研究）方面的研究、基希霍夫对电网络的研究，以及庞加莱对天体力学的分析.

在 19 世纪后期及 20 世纪初期，一些数学家作出的许多贡献，推动了随后很快成为拓扑学领域的这门新兴学科的成长. 这些数学家是布劳威尔（1881—1966)、康托（1845—1918)、弗雷歇（1878—1973)、豪斯多夫（1868—1962)、庞加莱、里斯（1880—1956）及外尔（1885—1955). 1914 年豪斯多夫的著作《点集论纲要》介绍了拓扑空间的公理化基础，从而开创了拓扑学作为基础数学的一个分支的全面研究.

几乎整个 20 世纪，拓扑学主要作为基础数学的一个分支而加以发展. 然而，在近年来，拓扑学的应用戏剧性地增长. 我们将在以后各章展望这两方面的前景.

在本章其余各节，我们回顾某些涉及集合、实数系、关系以及函数的基本论题. 它们在全书中起着重要的作用. 这些内容的详细阐述可以在一些介绍基础数学的教科书中找到，例如 [Blo] 和 [Hum].

0.3 集合及其运算

在本节，我们考虑集合以及它们之间的关系与运算.

我们在全书使用建立集合的标准表示法来定义集合. 我们采用术语**元素**，它的含义是集