学好数学的金钥匙

郝 澎 主编

首都师范大学出版

XUEHAO SHUXUE DE JINYAOSHI

学好数学的金钥匙

（初中）

郝　澎　潘温厉　单志惠
郭　洁　越泽寰　编著

首都师范大学出版社

（京）新 208 号

图书在版编目（CIP）数据

学好数学的金钥匙：初中/郝澎等编著．—北京：首都师范大学出版社，1996.6
ISBN 7-81039-667-6

Ⅰ．学… Ⅱ．郝… Ⅲ．数学课-初中-教学参考资料 Ⅳ．G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字（96）第 09217 号

首都师范大学出版社
（北京西三环北路 105 号 邮政编码 100037）
北京市燕山联营印刷厂印刷 全国新华书店经销
1996 年 6 月第 1 版 1996 年 6 月第 1 次印刷
开本 787×1092 1/32 印张 13.625
字数 278 千 印数 00,001—50,000 册
定价 12.20 元

内 容 简 介

本书以九年义务教育学科教学大纲为依据，涵盖人民教育出版社教材全部知识内容。以训练学生技能、方法、思维、能力为编写主线，以指导学生怎样掌握学习规律、学好知识、提高能力为编写目的。

本书既讲解、分析单元重点、难点，又讲解学科的基本规律、学习的基本方法，使学生获得一把开启思维大门的“金钥匙”。本书实用性强，方法简明易记，能力可操作训练，单配备必要的练习，达到学以致用的实效。

本书主要用于初中总复习，又可作为初一、初二平日学习的参考。

目　　录

代　数

几　何

综合题

代　　数

第一讲　代数式恒等变形的根据与方法

一、整式的概念和运算

（一）整式的概念与运算法则

1．与整式有关的概念

（1）单项式：由数与字母的积所组成的代数式，叫做单项式．

应该从字母运算的角度来理解单项式的概念．单项式只含有字母的乘法或乘方运算．

只含有数字而不含有字母的代数式也是单项式，是特殊的单项式．如 $1+\sqrt{2}$ 是单项式．

（2）单项式的系数：单项式中的数字因数叫做这个单项式的系数．

单项式的系数包括数字因数的符号，如 $-7a^2$ 的系数是 -7．

只含有数字因数的单项式，一般不研究它的系数.

随着研究的深入，有时单项式的系数也可用字母来表示. 如一元二次方程中的二次项一般表示为 $ax^2(a\neq 0)$. 其中字母 a 就是这个单项式的系数.

(3) 单项式的次数：一个单项式中，所有字母指数的和，叫做这个单项式的次数.

由数字组成的特殊单项式一般不研究它的次数. 有时为了统一，也可以把只由数字组成的特殊单项式的次数规定为 0 次，但数 0 的次数不确定.

(4) 多项式：几个单项式的和叫做多项式.

还可以从字母运算的角度来理解多项式的概念. 多项式只含有字母的加、减、乘和乘方的运算，并且必须含有加、减运算. 这样定义的多项式不包括单项式.

(5) 多项式的项：多项式中的每个单项式叫做多项式的项. 其中不含字母的项叫做常数项.

由于多项式是由几个单项式的和组成的，这个“和”是指省略加号的“代数和”. 因此，确定多项式的项时，其间的符号不是运算符号而是性质符号.

(6) 多项式的次数：多项式里，次数最高项的次数，就是这个多项式的次数.

(7) 降幂排列与升幂排列：

把一个多项式按照某一字母的指数从大到小的顺序排列起来，叫做把这个多项式按这个字母降幂排列.

把一个多项式按照某一字母的指数从小到大的顺序排列起来，叫做把这个多项式按这个字母升幂排列.

降幂排列或升幂排列的根据是加法的交换律与结合律.

升降幂排列时指数的确定，可以是每一项的次数. 如 x^3

$+5x-6-4x^2$，只含有一个字母，每一项中字母 x 的指数，就是这一项的次数．也可以不是项的次数．如 $3xy^2-4x^3y+12$，对字母 x 进行升降幂排列时，x 的指数就不再是这一项的次数．

常数项可以看作零次项．

(8) 同类项：所含字母相同，并且相同字母的次数也相同的项叫做同类项．

同类项可以指几个单项式之间的关系．但研究同类项的目的主要还是为了合并同类项，因此，同类项主要是指多项式中各项之间的关系．

是同类项的两项，它们的字母因式应该完全相同，包括所含字母的个数，运算的形式及运算次数等．

几个常数项也是同类项．

(9) 整式：单项式和多项式统称为整式．

从运算的角度来理解，整式只含有字母的加、减、乘、乘方四种运算．

$$整式\begin{cases}单项式\\多项式\end{cases}$$

例 1 已知代数式

① $\dfrac{2}{\pi}$ ② $1+\sqrt{2}$ ③ $4x^2$ ④ $\dfrac{1}{x}$

其中单项式是 (B)

(*A*) ①③ (*B*) ①②③

(*C*) ②③④ (*D*) ③④

解 根据单项式的定义，容易判断 $4x^2$ 是单项式，$\dfrac{1}{x}$不是单项式．$\dfrac{2}{\pi}$和 $1+\sqrt{2}$ 是不是单项式呢？由于 π 是无理数，是

用特殊字母来表示的一个确定的数．因此 $\frac{2}{\pi}$ 是一个具体的数字而不含有字母，它与 $\frac{1}{x}$ 不同，$\frac{2}{\pi}$ 是不含字母的特殊单项式．在 $1+\sqrt{2}$ 中，$\sqrt{2}$ 是数，虽然中间有“＋”号连接，但它不是多项式而是单项式．

因此，①②③都是单项式，应选(B)．

例 2 已知命题

① 单项式是特殊的多项式

② 同类项是单项式

③ 多项式最少是两项式

④ 多项式最低是一次式

其中正确的是 (　　)

(A) ①③　　(B) ①②③

(C) ③④　　(D) ①③④

解 根据多项式的定义我们知道，多项式不包含单项式，因此①不正确．

同类项是指几个单项式之间的关系，说它是单项式不确切，因此②也不正确．

由于多项式不包括单项式，因此，多项式中最少有两项，③正确．

如果比一次式还低，那么就只能是单一的常数项了．此时就不再是多项式而是单项式．因此④正确．

应选(C)

2．整式运算的法则

(1) 合并同类项法则：同类项的系数相加，所得的结果作为系数，字母和字母的指数不变．

合并同类项的根据是分配律．

系数互为相反数的两个同类项，合并同类项后，结果为0.

（2）添、去括号法则

去括号法则：括号前是“+”号，把括号和它前面的“+”号去掉，括号里各项都不变号；括号前是“−”号，把括号和它前面的“−”号去掉，括号里各项都改变符号.

添括号法则：添括号后，括号前面是加号，括到括号里的各项都不变符号；添括号后，括号前面是“−”号，括到括号里的各项都改变符号.

（3）幂的运算法则

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ （m,n 都是正整数）

$(a^m)^n = a^{mn}$ （m,n 都是正整数）

$(ab)^n = a^n b^n$ （n 为正整数）

$a^m \div a^n = a^{m-n}$ （$a \neq 0, m, n$ 都是正整数，并且 $m > n$）

（4）乘法公式

$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$.

$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$.

$(a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2) = a^3 \pm b^3$.

（5）单项式乘以单项式法则

单项式相乘，把它们的系数、相同字母分别相乘. 对于只在一个单项式里含有的字母，则连同它的指数作为积的一个因式.

（6）单项式乘以多项式法则

单项式乘以多项式，就是用单项式去乘多项式的每一项，再把所得的积相加.

（7）多项式乘以多项式法则

多项式乘以多项式，先用一个多项式的每一项乘以另一

个多项式的每一项，再把所得的积相加.

(8) 单项式除以单项式法则

单项式相除，把系数、同底数幂分别相除，作为商的因式，对于只在被除式里含有的字母，则连同它的指数作为商的一个因式.

(9) 多项式除以单项式法则

多项式除以单项式，先把这个多项式的每一项除以这个单项式，再把所得的商相加.

例3 合并下列各式中的同类项

(1) $-\frac{2}{3}x^2y+2xy^2-\frac{1}{2}yx^2-\frac{1}{7}y^2x$；

(2) $0.3(a-b)^2-0.5(a-b)+0.7(b-a)^2$
$-0.4(b-a)-0.9(a-b)$.

解 (1)
$$\begin{aligned}&-\frac{2}{3}x^2y+2xy^2-\frac{1}{2}yx^2-\frac{1}{7}y^2x\\&=-\frac{2}{3}x^2y-\frac{1}{2}x^2y+2xy^2-\frac{1}{7}xy^2\\&=(-\frac{2}{3}-\frac{1}{2})x^2y+(2-\frac{1}{7})xy^2\\&=-\frac{7}{6}x^2y+\frac{13}{7}xy^2\end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned}&0.3(a-b)^2-0.5(a-b)+0.7(b-a)^2\\&\quad-0.4(b-a)-0.9(a-b)\\&=0.3(a-b)^2+0.7(a-b)^2-0.5(a-b)\\&\quad+0.4(a-b)-0.9(a-b)\\&=(0.3+0.7)(a-b)^2+(-0.5+0.4-0.9)\\&\quad(a-b)\\&=(a-b)^2-(a-b)\end{aligned}$$

说明：(1) 当项的系数是假分数时，不要化成带分数的

形式. 因为 $1\frac{1}{6}=1+\frac{1}{6}$，是和的形式而不是积的形式.

(2) 同类项的概念可以扩展，它们不一定是单项式，也可以是多项式. 如第(2)小题中的 $0.3(a-b)^2$ 与 $0.7(b-a)^2$.

例 4 下列恒等变形中正确的是 ( )

(A) $a^2-(3a+5b+4c)=a^2-3a+5b+4c$

(B) $a-3x+2y-1=a+2y-(3x-1)$

(C) $(m+2)-(-m+P)=m+2+m+P$

(D) $-[(2x-y)+(z-1)]=-2x+y-z+1$

解 (A) 错. 去括号时 $5b$ 和 $4c$ 没有变号.

(B) 错. 先使用加法交换律，再添括号，但 -1 这一项没有改变符号.

(C) 错. 去括号时，P 没有改变符号.

(D) 正确，选(D).

例 5 下列式子中，正确的是 ( )

(A) $(-a^6)\cdot(-a)^2=a^8$

(B) $(-2\frac{3}{4}a^3)^2=4\frac{9}{16}a^6$

(C) $(-a^3b^2c)^2=a^6b^4c$ (D) $(-a-b)^2=(a+b)^2$

解 (A) 错. $(-a^6)\cdot(-a)^2=-a^6\cdot a^2=-a^8$.

(B) 错. $(-2\frac{3}{4}a^3)^2=\frac{11}{4}a^3=\frac{121}{16}a^6$.

(C) 错. $(-a^3b^2c)^2=a^6b^4c^2$.

(D) 正确，选(D).

例 6 下列等式中正确的是 ( )

(A) $(x-2)^2=x^2-2x+4$

(B) $(a-\frac{1}{2}b)^2=a^2-\frac{1}{4}b^2$

(C) $(m+n)(m^2-2mn+n^2)=m^3+n^3$

(D) $(b-a)(ab+a^2+b^2)=b^3-a^3$

解 (A) 错. $(x-2)^2=x^2-4x+4$

(B) 错 $(a-\frac{1}{2}b)^2=a^2-ab+\frac{1}{4}b^2$

(C) 错 $(m+n)(m^2-mn+n^2)=m^3+n^3$

(D) 正确.
$$\begin{aligned}&(b-a)(ab+a^2+b^2)\\&=(b-a)(b^2+ba+a^2)\\&=b^3-a^3.\end{aligned}$$

选(D)

(二) 整式的运算

1. 整式的加减

去括号和合并同类项是整式加减的基础.

在进行整式的加减时，如果遇到括号，按去括号法则先去括号，然后再合并同类项.

例 7 已知：$A=10x^3-6x^2+5x-4$，$B=9x^3-2x^2-4x+2$，$C=x^2-11x+6$.

求：$A-B+C$.

解
$$\begin{aligned}A-B+C=&10x^3-6x^2+5x-4\\&-(9x^3-2x^2-4x+2)+(x^2-11x+6)\\=&10x^3-6x^2+5x-4-9x^3+2x^2+4x\\&-2+x^2-11x+6\\=&x^3-3x^2-2x.\end{aligned}$$

例 8 化简求值：

$3x^2y-[2x^2y-(2xyz-x^2z)-4x^2z]-xyz$

其中 $x=-2$，$y=-3$，$z=-1$.

分析：代数式的化简求值问题，一般应先将代数式化简，然后再把所给字母的值代入计算.

解 $3x^2y-[2x^2y-(2xyz-x^2z)-4x^2z]-xyz$

$=3x^2y-2x^2y+2xyz-x^2z+4x^2z-xyz$

$=x^2y+3x^2z+xyz$

当 $x=-2$，$y=-3$，$z=-1$ 时，

原式 $=(-2)^2\times(-3)+3\times(-2)^2\times(-1)+(-2)\times(-3)\times(-1)$

$=-12-12-6$

$=-30.$

2. 整式的乘除

例 9 计算：$-\frac{4}{3}a^2b^3c\div(\frac{1}{3}abc^2)\times(-\frac{3}{2}a^2bc)^2$

分析：含有乘、除、乘方的运算要先计算乘方，再计算乘除，并且要按顺序进行.

注意正确使用幂的运算法则

解 $-\frac{4}{3}a^2b^3c\div(\frac{1}{3}abc^2)\times(-\frac{3}{2}a^2bc)^2$

$=-\frac{4}{3}a^2b^3c\div(\frac{1}{3}abc^2)\times(\frac{9}{4}a^4b^2c^2)$

$=\left(-\frac{4}{3}\div\frac{1}{3}\times\frac{9}{4}\right)a^{2-1+4}b^{3-1+2}c^{1-2+2}$

$=-9a^5b^4c.$

说明：几个单项式的乘除运算可以一次进行. 系数与系数相乘除，同底数的幂相乘除.

同底数幂的乘除运算转化为指数的加减运算.

例 10 计算：$-\frac{1}{3}x^2y(\frac{1}{2}xy^3+\frac{3}{4}x^2y^2-1)$

分析：单项式乘以多项式，用这个单项式去乘这个多项式的每一项. 注意，常数项 -1 不要忘乘.

解 $-\frac{1}{3}x^2y(\frac{1}{2}xy^3+\frac{3}{4}x^2y^2-1)$

$$=(-\frac{1}{3}x^2y)(\frac{1}{2}xy^3)+(-\frac{1}{3}x^2y)(\frac{3}{4}x^2y^2)$$

$$+(-\frac{1}{3}x^2y)(-1)$$

$$=-\frac{1}{6}x^3y^4-\frac{1}{4}x^4y^3+\frac{1}{3}x^2y.$$

说明：多项式与单项式的乘法是以单项式与单项式的乘法为基础的．通过运算法则转化为单项式乘以单项式．

例 11 计算：$\left(\frac{5}{3}x^2-2x+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{5}x^3-\frac{2}{3}x+x^2\right)$

分析：多项式乘以多项式，用一个多项式的每一项去乘另一个多项式的每一项，然后再合并同类项．

解 $\left(\frac{5}{3}x^2-2x+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{5}x^3-\frac{2}{3}x+x^2\right)$

$$=\frac{5}{3}x^2\cdot\frac{3}{5}x^3+\frac{5}{3}x^2\cdot\left(-\frac{2}{3}x\right)+\frac{5}{3}x^2\cdot x^2$$

$$-2x\cdot\frac{3}{5}x^3-2x\cdot\left(-\frac{2}{3}x\right)-2x\cdot x^2$$

$$+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5}x^3+\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{2}{3}x\right)+\frac{1}{2}\cdot x^2$$

$$=x^5-\frac{10}{9}x^3+\frac{5}{3}x^4-\frac{6}{5}x^4+\frac{4}{3}x^2-2x^3$$

$$+\frac{3}{10}x^3-\frac{1}{3}x+\frac{1}{2}x^2$$

$$=x^5+\left(\frac{5}{3}-\frac{6}{5}\right)x^4+\left(-\frac{10}{9}-2+\frac{3}{10}\right)x^3$$

$$+\left(\frac{4}{3}+\frac{1}{2}\right)x^2-\frac{1}{3}x$$

$$=x^5+\frac{7}{15}x^4-\frac{253}{90}x^3+\frac{11}{6}x^2-\frac{1}{3}x.$$

说明：多项式与多项式相乘，转化为多项式与单项式相乘，最终转化为单项式与单项式相乘．两个多项式相乘的积往往有同类项存在，因此，合并同类项，化简运算结果也是

必不可少的步骤.

例 12 计算：$\left(\frac{3}{4}a^6x^2+\frac{1}{15}a^2x^4-0.9ax^3\right)\div\frac{3}{5}ax^2$

分析：多项式除以单项式，用多项式的每一项除以这个单项式，转化为单项式除以单项式.

解 $\left(\frac{3}{4}a^6x^2+\frac{1}{15}a^2x^4-0.9ax^3\right)\div\frac{3}{5}ax^2$

$$=\left(\frac{3}{4}a^6x^2\div\frac{3}{5}ax^2\right)+\left(\frac{1}{15}a^2x^4\div\frac{3}{5}ax^2\right)$$

$$+\left(-0.9ax^3\div\frac{3}{5}ax^2\right)$$

$$=\frac{5}{4}a^5+\frac{1}{9}ax^2-\frac{3}{2}x.$$

例 13 用竖式做除法：

$$(5-4x^3+5x^2+2x^4)\div(3-2x+x^2)$$

分析：多项式除以多项式不能模仿多项式乘以多项式的法则来进行，而应该用竖式来做除法. 一般应先将被除式和除式都按同一字母的降幂进行排列，缺项时要留有空位.

解

$$\begin{array}{r}
2x^2-1 \\
x^2-2x+3\overline{\big)\,2x^4-4x^3+5x^2+5} \\
\underline{2x^4-4x^3+6x^2\qquad\qquad} \\
-x^2+5 \\
\underline{-x^2+2x-3} \\
-2x+8
\end{array}$$

∴ 商式$=2x^2-1$，余式$=-2x+8$.

说明：竖式中上下两行是减法的关系. 上一行的多项式减去下一行的多项式，也就是下面一行的多项式中的每一项都要变号，再与上面一行的多项式相加.

带有余式的除法，一定要把商式和余式分开来写.

例 14 利用乘法公式计算：