中等专业学校教材

测量平差

武汉电力学校 王新洲 编

中等专业学校教材

测 量 平 差

武汉电力学校 王新洲 编

水利电力出版社

内 容 提 要

本书系统地介绍了条件平差、间接平差、条件分组平差、附有未知数的条件平差和附有条件的间接平差等经典的平差方法。简要介绍了误差椭圆的基本理论及其应用。附录中介绍了几个用BASIC语言编写的常用平差程序。

本书可作为中等专业学校工程测量专业的教材，也可供测绘技术人员参考。

中等专业学校教材

测 量 平 差

武汉电力学校　王新洲　编

*

水利电力出版社出版

（北京三里河路6号）

新华书店北京发行所发行·各地新华书店经售

北京市京东印刷厂印刷

*

787×1092毫米　16开本　21.5印张　490千字

1991年5月第一版　1991年5月北京第一次印刷

印数0001—2400册

ISBN 7-120-01298-7/TV·453

定价5.15元

前　　言

本书是在武汉电力学校1988年编写的讲义《测量平差基础》的基础上，根据水利电力部中等专业学校工程测量专业的教学大纲的精神修改而成的。本书力求深入浅出、通俗易懂，尽量做到重点突出，循序渐进；注意中等专业学校教材的特点，着重于基本概念的讲解和基本方法的传授。

武汉电力学校钟植梧高级讲师曾参加制定原讲义的编写大纲，并编写了原讲义的第三、第四两章。原讲义在武汉电力学校和黄河水利学校试用期间，两校有关师生提出了许多宝贵意见。武汉电力学校测量教研组曾对本书初稿进行过多次认真的讨论。黄河水利学校王翰长高级讲师负责本书的主审工作。编写过程中参考了一些院校的同类教材。谨此对关心本书的广大师生，工作人员及参考文献的作者表示衷心的感谢。

由于本人水平有限，书中的错误和不足之处在所难免，恳请读者批评指正。

编　者

1989年8月

目　　录

第一章 绪　　论

第一节 观测误差的含义及误差公理

在生产实践、科学研究和社会生活中，我们经常接触到各种各样的量。为了认识客观世界的规律，进而能动地改造世界，就必须对这些量进行测量、比较和计算，并研究它们之间的关系。在实践中，当对某个确定的量进行多次观测时，我们就会发现，所测得的结果之间往往存在着一些差异。例如，对同一段距离重复丈量若干次，量得的长度常常不完全相等，而是互有差异。另一种情况是，当对若干量进行观测时，如果已经知道在这几个量之间应该满足某一理论值，而实际观测的结果往往不等于其理论上的应有值。例如，由平面几何知道，一平面三角形三内角之和应等于180°，但对这三个内角进行观测的结果，其和通常不等于180°，而是有一差异。这些差异称为不符值。在测量工作中经常出现这种现象，这是由于观测值中包含有观测误差的缘故。

所谓观测误差，就是对某量进行测量时，其测量结果（即观测值）与该量客观存在的真正大小或理论上应满足的数值（通称真值，从概率与数理统计的观点看，就是观测值的数学期望）之间的差异，即：

$$观测误差=观测值-真值$$

若以Δ表示观测误差，L表示观测值，X表示真值，则上式可写为

$$\Delta = L - X \tag{1-1}$$

通常称Δ为观测值的真误差。

产生观测误差有多种多样的原因，概括起来，主要有以下3个方面。

①测量仪器：测量工作一般都要使用测量仪器。由于每一种仪器只具有一定限度的精密程度，因而使观测结果的精度受到了一定的限制。例如，在用只刻有厘米分划的普通水准尺进行水准测量时，就难以保证在估读厘米以下的尾数时完全正确无误。此外，仪器本身也有一定的误差。例如，水准仪的视准轴难以绝对平行于水准轴；水准尺具有分划误差等。因此，使用这样的水准仪进行观测，就会使得观测结果带有误差。

②观测者：由于观测者的感觉器官的鉴别能力有一定的局限性，所以不论在仪器的安置、照准，还是在读数上，都会产生误差。此外，观测者的工作态度是否认真负责，工作时是否仔细小心，这对于在工作中是否会出现差错或误差是一个重要的因素。

③外界条件：由于各种环境因素与所要求的标准状态不一致，引起测量设备和被测量物本身的变化，从而产生观测误差。这些环境因素与温度、湿度、气压、震动、照明、电磁场、野外作业时的风效应、阳光照射、透明度以及空气中的含尘量等有关。这些因素的不同，对被测量的影响也会随之不同，因而在这样的客观环境下进行观测，必然使观测结果带有误差。

上述仪器、观测者、外界条件是观测误差的主要来源，我们通常把它们综合起来称为

观测条件。

随着科学技术的不断发展，测量仪器的不断完善，测量人员技术的提高、经验的积累，误差可以被控制得愈来愈小。但不论观测者的技术多么高超，经验多么丰富，测量仪器多么完善，由于各种因素的影响，在测量过程中总不可能完全避免误差。因此，测量工作者公认：**所有测量都具有观测误差，观测误差自始至终存在于测量过程之中。**这一公理称为测不准原理。

根据观测误差对测量结果影响的性质，观测误差可分为系统误差，偶然误差和粗差3类。

1.系统误差

在相同的观测条件下，进行一系列的观测。如果观测误差在大小、符号上表现出系统性，或者在观测过程中按一定的规律变化着，或者保持常数，那么，这种观测误差就称为系统误差。

系统误差服从数学和物理定律。它可以归结为一个或某几个因素的函数。一般可以用解析公式、曲线或数值来表示。

系统误差可由测量仪器引起。例如，用具有尺长误差的钢尺量距，由尺长误差引起的距离误差与所测距离的长度成正比。又如用存在 i 角误差的水准仪进行水准测量时，引起的高差误差与前后视距差成正比。此外，象光电测距仪中电子元件的老化，经纬仪的度盘偏心等，都会引起系统误差。

系统误差也可由外界条件引起。例如大气折光，由于温度变化引起钢尺膨胀或收缩等。此外，观测者的习惯也会引起系统误差。例如，某人总习惯把望远镜的十字丝对准目标的某一侧。

尽管外界条件、仪器、观测者都会引起系统误差，但因系统误差有一定的规律性，所以通过施加改正或应用合理的观测方案就可以消除或削弱其影响。

2.偶然误差

在相同的观测条件下，进行一系列观测，如果观测误差的大小和符号上都表现出偶然性（没有规律），这种观测误差就称为偶然误差或随机误差。

偶然误差也是由外界条件、测量仪器和观测者引起。因仪器构造上的缺陷，其度量单位往往不能量尽物体的大小，就会使测量结果大于或小于被测物体的真正大小，这样就产生了或大或小的偶然误差。例如，某一角度的真值为35°42′37·4326″，而当前任何测角仪器都还达不到如此精密的程度，故所测结果总在35°42′37·4″左右摆动。这样，观测结果中就必然带有偶然误差。观测者由于受感觉器官的限制，也必然引起偶然误差。例如，角度测量中，照准目标时，望远镜中十字丝的纵丝不可能绝对对准目标中心，不是偏于目标之左，就是偏于目标之右。这样就产生了偶然误差。外界条件对观测精度也产生很大的影响。由于人们难以掌握环境的变化规律，故也会引起偶然误差。因此，偶然误差实际上是许许多多微小误差的总和。而每项微小误差又随偶然因素的变化而变化，其数值忽大忽小，其符号或正或负。这样，由它们所构成的总和，就其个体而言，无论是数值的大小或符号的正负，都是不能事先预知的。

（三）粗差

明显歪曲测量结果的误差称为粗差。粗差不能算作误差，不允许在测量成果中出现。粗差主要是由于观测者过度疲劳、缺乏经验或粗心大意所引起。比如，用钢尺量距时，忘记了一个整尺段；测角时瞄错了目标；水准测量时，在水准尺上将“6”读成“9”，或将“9”读成“6”；记录时，将“1”错记为“7”，将“4”错记为“10”等。含有粗差的观测值称为坏值或异体值。坏值的存在，不仅大大影响测量成果的可靠性，而且往往造成返工浪费，有时甚至不得不改变工程的设计方案，给国家造成巨大的经济损失。因此，观测者必须以认真负责的态度，一丝不苟地从事测量工作。同时，还必须采取适当的方法和措施，及时地发现错误，以确保观测结果的正确性。

第二节 测量平差及其任务

既然所有测量结果都含有观测误差，而观测误差的存在，会使人们对客观事物的认识受到不同程度的歪曲、例如，测量三角形的三个内角，由于存在观测误差，其和常常不等于应有的理论值180°。这就使三角学上的公式不能应用。因此，必须对误差进行专门的研究、分析、处理，从而采用一些有效措施，消除或减小误差。近200年来，人们对误差进行了系统的研究，总结了一整套成熟的误差理论。该理论的奠基人应首推拉普拉斯、勒让德、高斯、马尔可夫等人。尤其是高斯的误差理论，包括了对测量成果进行数据处理的合理方法——最小二乘法。迄今为止，最小二乘法仍是处理误差的基础和最有效的方法之一。有人认为，该方法是高斯1794年发明的。也有人认为，高斯1809年才提出该方法。而在这之前，勒让德就在1806年已提出来了。这种看法认为最小二乘法是勒让德与高斯同时独立地发明的。尽管如此，但人们一般都认为高斯在1795年（18岁时）首先应用了最小二乘法。在测量上，应用最小二乘法来处理观测误差，一般称为“测量平差”。

因为观测值中包含观测误差，用这些含有观测误差的观测值，按最小二乘法求出的被测量的最可靠结果，只能是该量之真值的估计值，简称估值。很明显，这个估值也必然受观测误差的影响。那么，它的精确程度如何，是否满足生产实践的要求，也是测量平差所要解决的问题。

综上所述知，测量平差具有下列两大任务：①对一系列含有观测误差的观测值，运用最小二乘法来消除它们之间的不符值，求出未知量的最可靠值。未知量的最可靠值俗称最或然值或最或是值。②运用合理的方法来评定测量成果的精度。

第三节 偶然误差的规律性

从本章第一节知，系统误差可以通过施加改正数或应用合理的观测方案来消除或削弱到忽略不计的程度，而粗差在观测值中不允许存在。所以，经典测量平差研究的对象是一系列只含偶然误差的观测值。因此，有必要对偶然误差的性质作进一步的分析。

偶然误差从表面上看，似乎没有什么规律。但是，当我们对大量的偶然误差进行分析

时，就能发现某些规律。而且，偶然误差的个数越多，这种规律越明显。下面，我们通过实例来说明这种规律性。

某测区，在相同的观测条件下，独立地观测了358个三角形的全部内角。由于观测值中存在观测误差，致使三角形三内角之和不等于其真值180°。根据式（1-1），各三角形内角和的真误差为

$$\Delta_i = (L_1 + L_2 + L_3)_i - 180^\circ \qquad i = 1, 2, \cdots, 358$$

式中，$(L_1 + L_2 + L_3)_i$表示各三角形三内角观测值的和。

现取观测误差区间的间隔$d\Delta$为0.20″，将这一组真误差按其正负号与绝对值的大小排列，并统计它们出现在各区间内的个数ν_i，以及它们出现在某区间的频率ν_i/n（此处$n=358$，$i=1, 2, \cdots, 9$），组成表1-1。

表 1-1

误差的区间 $d\Delta$	Δ为负值 个数 ν	Δ为负值 相对个数 ν/n	Δ为正值 个数 ν	Δ为正值 相对个数 ν/n	备注
″ ″					$d\Delta=0.20''$
0.00～0.20	45	0.126	46	0.128	等于区间左端
0.20～0.40	40	0.112	41	0.115	值的误差算入该
0.40～0.60	33	0.092	33	0.092	区间内
0.60～0.80	23	0.064	21	0.059	
0.80～1.00	17	0.047	16	0.045	
1.00～1.20	13	0.036	13	0.036	
1.20～1.40	6	0.017	5	0.014	
1.40～1.60	4	0.011	2	0.006	
1.60以上	0	0	0	0	
和	181	0.505	177	0.495	

从表1-1可以看出，误差的分布情况具有以下几点性质：①绝对值小的误差比绝对值大的误差多；②绝对值相等的正负误差的个数相近；③误差的绝对值有一定的限值。此例中该限值不超过1.6″。

为了验证这三点性质是否为偶然误差的规律性，我们再来看一个例子。某测区在相同的观测条件下，独立地观测了421个三角形。现仍按上述方法统计，其结果列于表1-2。

表1-2中的统计数字也体现了表1-1中的相同性质。

当我们将无数的观测结果都如此统计时，都会显示出上述性质。因而，人们总结出偶然误差的特性如下：①在一定的观测条件下，偶然误差必然出现在$(-B, +B)$之内，B为一定的误差限值；②绝对值较小的误差出现的概率较大；③绝对值相等的正负误差出现的概率相等；④偶然误差的简单平均值，随观测次数的无限增加而趋近于零。或者说偶然误差的数学期望为零。即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{[\Delta]}{n} = E(\Delta) = 0 \qquad (1\text{-}2)$$

式中 $$[\Delta] = \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \cdots + \Delta_n$$

表 1-2

误差的区间 $d\varDelta$	$\varDelta$ 为负值		$\varDelta$ 为正值		备注
	个数 ν	相对个数 ν/n	个数 ν	相对个数 ν/n	
″ ″					$d\varDelta=0.20$ 等于区间左端值的误差算入该区间内
0.00～0.20	40	0.095	37	0.088	
0.20～0.40	34	0.081	36	0.085	
0.40～0.60	31	0.074	29	0.069	
0.60～0.80	25	0.059	27	0.064	
0.80～1.00	20	0.048	18	0.043	
1.00～1.20	16	0.038	17	0.040	
1.20～1.40	14	0.033	13	0.031	
1.40～1.60	9	0.021	10	0.024	
1.60～1.80	7	0.017	8	0.019	
1.80～2.00	5	0.012	7	0.017	
2.00～2.20	6	0.014	4	0.009	
2.20～2.40	2	0.005	3	0.007	
2.40～2.60	1	0.002	2	0.005	
2.60以上	0	0	0	0	
Σ	210	0.499	211	0.50	

$E(\varDelta)$表示$\varDelta$的数学期望；

[　]为测量上惯用的求和符号。

上述第四个特性是由第三个特性导出的。第三个特性说明，在大量偶然误差中，正负误差有互相抵消的性质。因此，当n无限增大时，真误差的简单平均值必然趋于零。

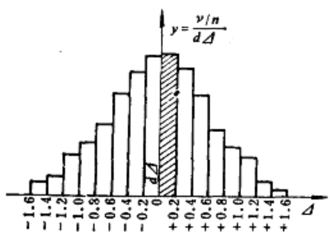


图 1-1

特别要指出的是，对于一系列的观测而言，不论其观测条件是好是坏，也不论是对同一个量还是对不同量进行观测，只要这些观测是在相同的条件下独立进行的，则所产生的一组偶然误差，必然具备上述 4 个特性。而且，当观测值的个数n愈大时，这种特性就表现得愈为明显。偶然误差的这种特性，也称为偶然误差的统计规律性。

为了描述偶然误差的分布情况，除了采用上述的误差分布表的形式外，还可以利用图形来表达。图1-1及图1-2就是分别根据表1-1及表1-2中的数据绘制的。

绘制这种图时，横坐标取误差$\varDelta$的大小。纵坐标y取误差出现在各区间的频率ν/n除以区间的间隔值$d\varDelta$，即$\frac{\nu/n}{d\varDelta}$。这样，每一误差区间上的长方条面积，就代表误差出现在该区间内的相对个数。

例如，图1-1中画有斜线的长方条面积，就是代表误差出现在0.00″～+0.20″这个区间内的频率是0.128。这种图通常称为直方图。其特点是能形象地表示出误差的分布情况。

当误差的个数$n\to\infty$，并无限缩小误差区间的间隔，即$d\Delta\to 0$时，则可以想象到，图1-1及图1-2中各长方条顶边所形成的折线将分别变成如图1-3所示的两条光滑的曲线。这种曲线称为误差分布曲线，简称误差曲线。其方程为

$$y=f(\Delta) \qquad (1-3)$$

即误差曲线上任一点的纵坐标y均为横坐标Δ的函数。

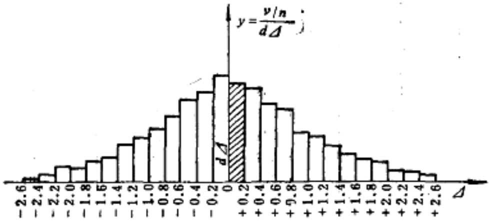


图 1-2

前已述及，直方图中各个长方条的面积为误差出现在小区间$d\Delta$上的频率，即

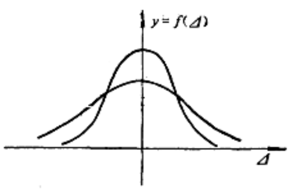


图 1-3

$$\frac{\nu/n}{d\Delta}\cdot d\Delta=\nu/n$$

当$n\to\infty$时，各频率也就趋于一个完全确定的数值，这个数值就是误差出现在各区间内的概率$P(\Delta)$，即

$$P(\Delta)=\nu/n=\frac{\nu/n}{d\Delta}\cdot d\Delta=f(\Delta)d\Delta \qquad (1-4)$$

可见，当函数$f(\Delta)$较大时，误差出现在小区间$d\Delta$上的概率也大；反之则较小。因此，称函数$f(\Delta)$为误差分布的概率密度函数，简称密度函数。

第四节　精度及衡量精度的指标

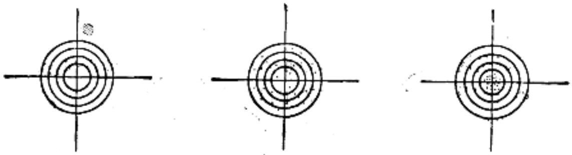
一、精度的概念

精度又称精确度。精度用来描述测量结果与其真值的接近程度。含义笼统的“精度”一词，可细分为：①精密度：反映偶然误差大小的程度；②正确度：反映系统误差大小的程度；③精确度：反映系统误差与偶然误差合成后的大小的程度。

对于测量来说，由定义可知，精密度高的正确度不一定高。同样，正确度高的精密度也不一定高。但精确度高则精密度与正确度都高。

精密度、正确度和精确度三者的含义，可用图1-4所示的打靶的情况来比喻。图1-4中(a)表示精密度很高，即偶然误差很小，但是不准，所击中的位置均偏离靶心较远。也就是说有一较大的系统误差，其正确度很低。图(b)表示精密度不如图(a)，击中的位置较分

散，但正确度较（a）高，即系统误差较图（a）要小，偶然误差较图（a）要大。图（c）表示精密度和正确度都高，偶然误差与系统误差均较小，即精确度高。



(a) (b) (c)

图 1-4

由此可知，精密度与精确度不能混为一谈。精密度表示弹着点相对集中的程度，而忽视了与真值（靶心）的偏离程度。精确度表示偏离真值（靶心）的程度。从图1-4(c)中可以看出，只有当除偶然误差以外的所有误差都消除后（或均可忽略不计时），精密度才能作为衡量精确度的指标。在测量平差中，我们假定观测值中只存在偶然误差，故可将精密度作为衡量精确度的指标。基于这一假定，许多文献中都不加区别地应用精密度与精确度这两个词来表示精度。

二、衡量精度的指标

由图1-4可知，因图（b）所示的弹着点没图（c）的弹着点集中，则图（b）的精度比图（c）的精度低。或者说图（b）的误差比图（c）的误差大。可见，精度是指误差分布的密集或离散程度。误差分布越密集，精度越高；误差分布越分散，精度越低。图1-1的误差都集中在±1.6″之内，图1-2的误差分布在±3.0″之内。图1-1的误差分布就比图1-2的误差分布密集，故表1-1中的358个观测值的精度比表1-2中的421个观测值的精度高。这里值得注意的是，所谓精度高低，是对不同观测组而言的。对于同一组的若干个观测值，因对应于同一种误差分布，故每个观测值的精度都相同。

由于误差分布的离散程度，直接反映了观测值精度的高低。因此，为了衡量观测值精度的高低，可以按第一章第二节的方法，把在相同观测条件下得到的一组误差，组成误差分布表，绘制直方图或绘制误差曲线，从直方图上误差分布的离散程度来衡量观测值的精度。但在实际工作中，这样做是很麻烦的，有时甚至非常困难。此外，人们总希望对精度有一个数字概念。希望用一个数字来反映误差分布的密集或离散程度，并用这个数字来作为衡量精度的指标。

衡量精度的指标有很多种，下面介绍几种常用的精度指标。

1.方差与中误差

设在相同的观测条件下，得到了一组独立的观测值L_1，L_2，…，L_n。它们的真误差分别为Δ_1，Δ_2，…，Δ_n。则称这组独立真误差Δ_i的平方的平均值的极限（或数学期望）为这组误差或这组观测值的方差，记为

$$D_L=\sigma^2=\lim_{n\to\infty}\frac{[\Delta\Delta]}{n}=E(\Delta^2)=\int_{-\infty}^{\infty}\Delta^2 f(\Delta)d\Delta \tag{1-5}$$

而称方差的平方根σ为这组误差或这组观测值的中误差（或标准差），即

$$\sigma=\pm\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{[\Delta\Delta]}{n}} \tag{1-6}$$

式中的Δ_i可以是同一个量，也可以不是同一个量的观测值的真误差，但是同精度观测值的真误差，即它们是在相同的观测条件下得到的真误差。

在第九章中将证明，当$n\to\infty$时，中误差是分布曲线的拐点的横坐标。对于一个确定的误差分布，就有一个对应的，唯一确定的σ或D_L（即σ^2）值。因此，它们能够反映误差分布曲线之离散度的大小。故可以用它来衡量观测值的精度。

方差和中误差分别是$\frac{[\Delta\Delta]}{n}$和$\sqrt{\frac{[\Delta\Delta]}{n}}$的极限值。它们是理论上的数值。但是，实际上观测个数n总是有限的。由有限个观测值的真误差只能求得方差和中误差的估（计）值$\hat{\sigma}^2$和$\hat{\sigma}$。在本书中，将用符号m来表示中误差的估值。因而方差的估值也可以写成m^2，即

$$\left.\begin{aligned} m^2=\hat{\sigma}^2&=\frac{[\Delta\Delta]}{n}\\ m=\hat{\sigma}&=\pm\sqrt{\frac{[\Delta\Delta]}{n}}\end{aligned}\right\} \tag{1-7}$$

顺便指出，在过去有些文献中，常将中误差的理论值和估值都用m来表示。为了避免混淆，目前在许多文献中，都已采用不同的符号来表示理论值与估值，使两者有所区别。本书也采用不同的符号来区别理论值与估值。在以后的叙述中，当不需要特别强调“估值”意义时，也将中误差的估值简称为“中误差”。

2.平均误差

在相同的观测条件下，一组独立的观测误差绝对值之算术平均值的极限（或数学期望），称为这组误差或这组观测值的平均误差，记为

$$\theta=\pm\lim_{n\to\infty}\frac{[|\Delta|]}{n}=E(|\Delta|)=\int_{-\infty}^{\infty}|\Delta|f(\Delta)d\Delta \tag{1-8}$$

在第九章中将证明，平均误差θ与相应的中误差σ之间存在以下理论关系式

$$\left.\begin{aligned}\theta&=\sigma\sqrt{\frac{2}{\pi}}\approx0.7979\sigma\approx\frac{4}{5}\sigma\\ \sigma&=\theta\sqrt{\frac{\pi}{2}}\approx1.253\theta\approx\frac{5}{4}\theta\end{aligned}\right\} \tag{1-9}$$

由式（1-9）可以看到，不同大小的θ，对应着不同的误差分布曲线。因此，也可以用平均误差θ作为衡量精度的指标。

由于观测值的个数n总是一个有限数，故在实用上也只能用θ的估值$\hat{\theta}$来衡量精度。

由式（1-8）知

$$\hat{\theta}=\pm\frac{[|\Delta|]}{n} \tag{1-10}$$

由式（1-9）知，$\hat{\theta}$与m的关系为

$$\left.\begin{aligned}\hat{\theta}&\approx 0.7979m\approx\frac{4}{5}m\\ m&\approx 1.253\hat{\theta}\approx\frac{5}{4}\hat{\theta}\end{aligned}\right\} \tag{1-11}$$

3.或然误差

在相同的观测条件下，若绝对值大于与小于某一量ρ的观测误差，其出现的概率各为一半，即出现在$-\rho$到$+\rho$范围内的概率等于1/2，那么就称这个量ρ为或然误差。

在第九章将证明，或然误差ρ与相应的中误差σ之间的理论关系为

$$\left.\begin{aligned}\rho&\approx 0.6745\sigma\approx\frac{2}{3}\sigma\\ \sigma&\approx 1.4826\rho\approx\frac{3}{2}\rho\end{aligned}\right\} \tag{1-12}$$

可见，不同的ρ也对应着不同的误差分布曲线。故或然误差ρ也可以作为衡量精度的指标。

因观测值的个数n总是一个有限数，故也只能得到ρ的估值$\hat{\rho}$。在实用上，通常是先求出中误差的估值m，再按式（1-12）计算ρ的估值$\hat{\rho}$。$\hat{\rho}$也可以用这样的方法来求：将在相同观测条件下得到的一组误差，按绝对值的大小排列。当n为奇数时，取位于中间的一个误差值作为$\hat{\rho}$；当n为偶数时，则取中间两个误差的平均值作为$\hat{\rho}$。

中误差、平均误差和或然误差的估值m、$\hat{\theta}$和$\hat{\rho}$都可以作为衡量精度的指标。它们与理论值有一定的差异，且n愈大，这一差异愈小，也就愈能反映观测精度。若n很小，求出的m、$\hat{\theta}$和$\hat{\rho}$都是不可靠的。

由于当n不大时，中误差m比平均误差$\hat{\theta}$更能灵敏地反映较大的真误差的影响。同时，在计算或然误差时，往往是先算出中误差m，然后再按式（1-12）计算$\hat{\rho}$。因此，世界各国在实用上通常都是采用中误差作为精度指标。我国也统一采用中误差作为衡量精度的指标。

【例 1-1】 为了研究地形测量中视距测量的精度，在相同的观测条件下，对10段已知距离进行了视距测量，观测结果见表1-3。其中X_i表示各段距离的真值。L_i表示视距观测值。试求视距观测值的中误差，平均误差和或然误差。

解 按表1-3的数据，根据式（1-7）和式（1-10）可得：

中误差 $m=\pm\sqrt{\dfrac{[\Delta\Delta]}{n}}=\pm\sqrt{\dfrac{4.0095}{10}}=\pm 0.633\text{m}$

表 1-3

序　　号	L = 实测值 (m)	X = 真值 (m)	Δ (m)	Δ^2 (m²)
1	65.8	65.81	−0.01	0.0001
2	68.0	67.85	+0.15	0.0225
3	61.9	61.55	+0.35	0.1225
4	64.5	64.97	−0.47	0.2209
5	61.4	61.90	−0.50	0.2500
6	69.5	68.95	+0.55	0.3025
7	67.8	68.50	−0.70	0.4900
8	62.8	63.52	−0.72	0.5184
9	69.2	70.19	−0.99	0.9801
10	64.7	63.65	+1.05	1.1025
Σ				4.0095

平均误差　　$\hat{\theta}=\pm\frac{[|\Delta|]}{n}=\pm\frac{5.49}{10}=\pm 0.549\text{m}$

或然误差　　$\hat{\rho}=\pm(0.50+0.55)/2=\pm 0.525\text{m}$

例1-1中的$\hat{\rho}$值是将误差按绝对值的大小排列后求出的。在计算精度指标值时，通常取2～3位有效数字，并在数值前冠以"±"号，数值后写上单位。

4.极限误差

由中误差的定义知，中误差代表一组同精度观测误差平方的平均值之平方根的极限值。它不是代表个别误差的大小，而是代表误差分布的离散度的大小。因此，在一组同精度观测误差中，势必有一部分误差小于中误差，有一部分误差大于中误差。那么，比中误差大多少的误差是可能出现的偶然误差；比中误差大多少的误差又是不应该出现的误差呢。由概率论知，大于一倍中误差的偶然误差出现的概率是31.7%；大于二倍中误差的偶然误差出现的概率为4.5%；大于三倍中误差的偶然误差出现的概率只有0.3%。即误差出现在（$-m$，$+m$），（$-2m$，$+2m$），（$-3m$，$+3m$）中的概率分别为

$$P(-m<\Delta<+m)\approx 68.3\%$$

$$P(-2m<\Delta<+2m)\approx 95.5\%$$

$$P(-3m<\Delta<+3m)\approx 99.7\%$$

由此可见，大于三倍中误差的偶然误差出现的概率非常小。而小概率事件是实际上的不可能事件。所以，人们通常以三倍中误差作为偶然误差的极限值，记为$\Delta_{限}$，并称之为极限误差。即

$$\Delta_{限}=3\sigma \tag{1-13}$$

在实际工作中，人们为了保证观测值的质量，也常采用2σ作为极限误差。实用上则以$3m$或$2m$作为极限误差。

在测量中，如果某个误差超限（即超过了极限误差），就认为该误差是粗差，相应的观测值就舍去不用或返工重测。