定量問題

王邦珍編

學藝叢書

16

中華學藝社出版

學藝叢書

16

定量問題

王邦珍編

民國二十一年一月二十九日敝公司突遭國難總務處印刷所編譯所書棧房均被炸燬附設之涵芬樓東方圖書館尚公小學亦遭殃及盡付焚如三十五載之經營隳於一旦迭蒙各界慰問督望速圖恢復詞意懇摯銜感何窮敝館雖處境艱困不敢不勉爲其難因將需用較切各書先行覆印其他各書亦將次第出版惟是圖版裝製不能盡如原式事勢所限想荷鑒原謹布下忱統祈 垂詧

上海商務印書館謹啓

中華民國十七年七月初版
民國廿二年四月印行 國難後第一版

學藝叢書 定量問題一冊 (七九六)

每冊定價大洋玖角
外埠酌加運費匯費

編輯者 中華學藝社 王邦珍

發行兼印刷者 上海河南路 商務印書館

發行所 上海及各埠 商務印書館

目　　錄

定 量 問 題

第一章　線分及圓弧

1. 由二等邊三角形底邊上一點引等邊平行線，所得之平行四邊形有定周.

解 由底邊 AC 上任一點 O 引

$$OM \parallel BC, \quad ON \parallel BA,$$

則平行四邊形 $OMBN$ 有定周.

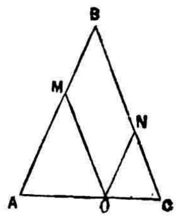

圖 1.

因 $\triangle OMA, ONC$ 俱為二等邊形，

$$\therefore \quad ON=NC, \ OM=AM$$

$$\therefore \quad BM+MO=AB, \quad BN+NO=BC$$

$$BM+MO+ON+NB=2AB=\text{cons.}$$

2. 由二等邊三角形底邊上一點引等邊垂線，則此二垂

線之和有定值.

解 由二等邊三角形 ABC 底邊 AC 上任一點 O,引 O…
ON 垂直於 AB,BC,則 $OM+ON$ 有定值.

引 CH 垂直 AB,OK 垂直 CH,CL 平行 AB 交 MO 延線於 L.

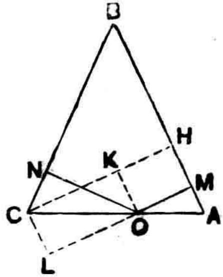

圖 2.

則 $ML=HC$

又 $\triangle OCN\equiv OCL$

$\therefore$ $ON=OL$

$\therefore$ $OM+ON=ML=HC$

$=\text{cons.}$

3. 由二等邊三角形底邊延線上一點引等邊垂線,則此兩垂線之差有定值.

4. 由二等邊三角形底邊上一點至等邊引定角直線,則此兩線之和有定值.

5. 由二等邊三角形底邊延線上任一點至等邊引定角直線,則此二線之和有定值.

解 由二等邊三角形 ABC 底邊 AC(或延線)上一點

引 OM, ON 使 $O\hat{M}A, O\hat{N}C$ 等定角，則 $OM+ON$ 有定值．

引 CH 平行 OM, OK 平行 AB, CL 平行 AB 交 MO 於 L.

其餘同 2 題按之卽得．

6. 由正三角形內一點至各邊引垂線其和有定值．

解　O 爲正三角形 ABC 內一點至各邊引垂線 OL, OM, ON 其和有定值．

過 O 引 DE 平行 AB 則 $\triangle CDE$ 爲等脚．

由 C 引 CH 垂直 AB 交 DE 於 F.

則　　$ON+OM=CF$

$\therefore\ \ OM+ON+OL=CH=\text{cons.}$

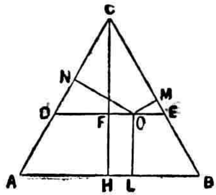

圖 3.

7. 由一點至正三角形之各邊引垂線，則其代數和有定值．

解　合 3,6 二題解之卽得．

8. 由正三角形內一點至各邊引定角直線，則其和有定

值.

解 O 為正三角形 ABC 內一點,引 OE, OD, OF 與各邊成定角 α,則 OD, OE, OF 之和有定值.

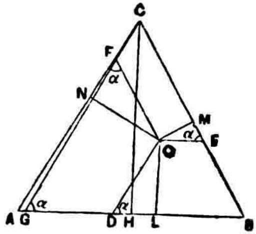

圖 4.

引 OL, OM, ON 垂直於三邊,CH 垂直 AB, CG 與 AB 成 α 角.

由題 6 得

$$OL+OM+ON=CH$$

$$\therefore \quad OL\csc\alpha+OM\csc\alpha+ON\csc\alpha=CH\csc\alpha$$

即 $$OD+OE+OF=CG=\text{cons.}$$

9. 由正多邊形內一點至各邊或其延線引垂線,其和有定值.

解 正多邊形 $ABCD\cdots\cdots$ 之一邊為 a, 則

$$ABCD\cdots\cdots=\triangle APB+BPC+\cdots\cdots$$

$$=\tfrac{1}{2}(PE+PF+\cdots\cdots)a$$

但 P 為正多邊形形內一點,PE, PF, $\cdots\cdots$ 為由 P 至 AB, BC, $\cdots\cdots$ 各邊之垂線.

設 r 為其內半徑，n 為其邊數，則得

$$ABCD\cdots\cdots=\tfrac{1}{2}nar$$

$$\therefore\qquad PE+PF+\cdots\cdots\cdots=nr$$

即垂線之和有定長。

10. $\triangle ABC$ 底 BC 有定長有定位，A 為任意點，邊 AB，AC 之中點為 D，E，則線分 DE 有定長。

解　$$DE=\tfrac{1}{2}BC=\text{cons.}$$

11. $\triangle ABC$ 底 BC 之中點為 M，過 M 引 PMQ 交 AB，AC 於 P，Q，若 $AP=AQ$ 則 $BP:CQ$ 為定比。

解　由 B 引 AC 平行線交 QP 於 N 則

$$P\hat{N}B=P\hat{Q}A=Q\hat{P}A=B\hat{P}N$$

故　$\triangle PBN$ 為等脚。

$$\therefore\qquad BP=BN$$

然　$$\triangle BMN\equiv MCQ$$

$$\therefore\qquad CQ=BN=BP$$

即　$$BP:CQ=1$$

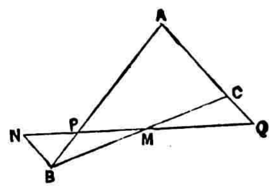

圖 5.

12. 過任意 $\triangle ABC$ 之頂點 B, C 引 BP, CQ 垂直於 BA, CA; 且 BP, CQ 各等於 BA, CA. 次引 PM, QN 垂直於 BC 之延線, 若 B, C 俱爲銳角, 則

$$\frac{BC}{PM+QN}=\text{cons.}$$

若 B, C 有一爲鈍角, 則

$$\frac{BC}{PM\sim QN}=\text{cons.}$$

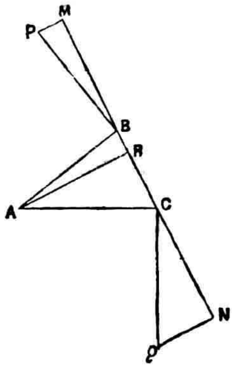

圖 6.

解 引 $AR\perp BC$

則 $PM=BR$,

$QN=CR$

$\therefore \quad PM\pm QN=BC$

$\therefore \quad \dfrac{BC}{PM\pm QN}=1$

13. $\triangle ABC$ 底邊 BC 上向外側作正三角形 BCD, 頂點 A 動於 D 爲中心之定圓周上, 在 AC 邊上向外作正三角形 ACE, 則 BE 有定長.

解 $\triangle ACD\equiv BCE$

$\therefore \quad BE=AD=\text{cons.}$

14. X 為 $\triangle ABC$ 邊 BC 上之一動點，則

圓 ABX 之半徑：圓 ACX 之半徑 $=$ cons.

解　引　$AD \perp BC$

以 R_1, R_2 表 $\triangle ABX, ACX$ 之外半徑，則

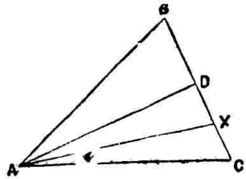

圖 7.

$$R_1 \cdot AD = AB \cdot AX,$$

$$R_2 \cdot AD = AC \cdot AX$$

$$\therefore\quad R_1 : R_2 = AB : AC$$

$$= \text{cons.}$$

15. 線分 BC 與其外任一點 A 成 BAC 角，作此角之內外二等分線，交 BC 及其延線於 D, E，則

$$\frac{1}{BD} + \frac{1}{BE} = \text{cons.}$$

解　B, D, C, E 為調和列點。

$$\therefore\quad \frac{1}{BD} + \frac{1}{BE} = \frac{2}{BC} = \text{cons.}$$

16. 二等邊 $\triangle ABC$，底角 B, C 之二等分線交對邊於 X，

Y,則 $XY:YB$ 及 $XY:XC$ 爲定比。

解 $\triangle BXC \equiv CYB$

$\therefore \quad XY \parallel CB$

$\therefore \quad B\hat{X}Y = C\hat{B}X = X\hat{B}Y$

$\therefore \quad XY = BY$

同理 $XY = XC$

故 $XY:BY, XY:XC$ 俱爲定比。

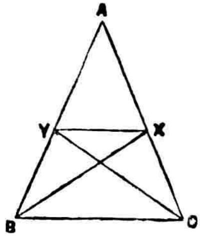

圖 8.

17. 過 $\triangle ABC$ 之內心 O 引 XY 平行 BC 交 AB, AC 於 X, Y, 則 $BX+CY:XY$ 爲定比。

解 $X\hat{O}B = O\hat{B}C$

$= O\hat{B}X$

$\therefore \quad BX = XO$

同理 $CY = YO$

$\therefore \quad BX+CY:XY = 1$

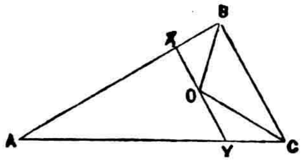

圖 9.

18. 由高線分任意三角形爲二個直角三角形,作其內接圓,由是二倍三高線之和減六圓直徑之和其差爲常數。

解 $\triangle ABC$ 之高爲 AD,作 $\triangle ABD$ 之內接圓 O,切點爲E,F,G.

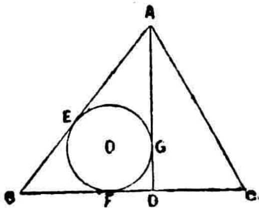

圖 10.

則 $AE=AG$

$EB=FB$

$DG=DF$

故 O 圓之直徑 $=AD+BD-AB$ (1)

同樣 $\triangle ADC$ 內切圓之直徑 $=CD+AD-AC$ (2)

(1),(2)相加爲

$$2AD+BD+DC-AB-AC=2AD+BC-AB-AC$$

故六圓直徑之和爲

$$\Sigma(2AD+BC-AB-AC)$$

$\therefore$ 2(三高之和)$-$(六圓直徑之和)

$=AB+BC+CA$

$=$cons.

19. $\triangle ABC$ 邊 $BC>CA$,在 BC 上取一點 D,使 BD 等 BA, BC 之半和;又於 BA 延線上取 E 點,使 BE 等 BD.DE 聯線交 AC 於 F, 則 $CF:FA$ 爲定比.

解　過 AC 邊中點引 $A\hat{B}C$ 二等分線之垂線,交 BA,BC 於 E',D', 而 BD',BE' 常等於 $\dfrac{BA+BC}{2}$.

故 F 必爲 AC 邊中點.

$$\therefore \qquad CF:FA=1$$

20. 直角二等邊 $\triangle ABC$, 過 A 引 AD 平行 BC, 使 BD 等 BC. AC,BD 交於 E, 則 $CE:CD$ 爲定比.

解　引　$DF\perp BC$

則　$DF=\dfrac{BC}{2}=\dfrac{BD}{2}$

$\therefore$　$D\hat{B}F=30°$

$B\hat{D}C=75°=B\hat{C}D$

然　$A\hat{C}B=45°$

$\therefore$　$A\hat{C}D=30°$

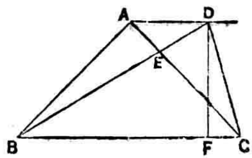

圖 11.

因此　$CD=CE$

$$\therefore \qquad CD:CE=1=\text{cons.}$$

21. $\triangle ABC$ 邊 BC 上任取一點 P, $\triangle ABP,ACP$ 外半徑之比有定值.

解　$\triangle ABP, ACP$ 之外半徑爲 r, r'，由 A 引 BC 垂線爲 h.

則
$$AB \cdot AP = 2r \cdot h,$$
$$AC \cdot AP = 2r' \cdot h$$

∴
$$\frac{r}{r'} = \frac{AB}{AC} = \text{cons.}$$

22. $\triangle ABC$ 底邊 BC 上取一點 P，引 PM 平行於其對應中線交二邊於 M, N，則 $PM + PN$ 有定長.

解　引 CH 平行 AB 交中線於 A'，PM 於 H，則

$$PN = PH$$

∴
$$PM + PN = MH$$
$$= AA'$$

即
$$PM + PN = 2AD$$
$$= \text{cons.}$$

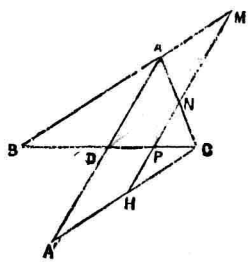

圖 12.

23. 過定角 MAN 內二等分線上定點 O 引直線 MON 交二邊於 M, N，則 $\dfrac{1}{AM} + \dfrac{1}{AN}$ 有定值.

解　設 $AM=m$, $AN=n$,

由 O 至邊之距離為 h,

則　$$2\triangle AMN=mh+nh$$

$$=mn\sin\theta$$

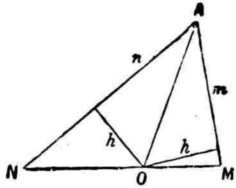

圖 13.

θ 表定角 MAN.

$$\therefore\quad \frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\frac{\sin\theta}{h}=\text{cons.}$$

24. 過 $\triangle ABC$ 形內一點 P 平行於三邊引線分 DE, FG, HI 交各邊於 D, E, F, G, H, I, 則

$$\frac{DE}{BC}+\frac{FG}{CA}+\frac{IH}{AB}$$

有定值.

解　$$DE \parallel BC,\ FG \parallel AC$$

$$\therefore\quad \frac{DE}{BC}=\frac{AD}{AB},$$

$$\frac{FG}{CA}=\frac{BG}{AB}$$

$$\therefore\ \frac{DE}{BC}+\frac{FG}{CA}+\frac{IH}{AB}=\frac{AD}{AB}+\frac{BG}{AB}+\frac{IH}{AB}$$

$$=\frac{AD+BG+IH}{AB}\qquad(1)$$

然　$IH=PH+PI$

$$=BD+AG$$

故(1)之分子爲

$$AD+BG+BD+AG$$

$$=AD+BD+BG+AG$$

$$=2AB$$

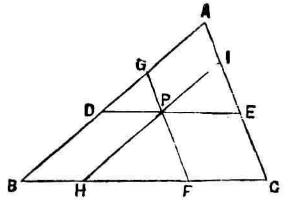

圖 14.

$$\therefore\quad \frac{DE}{BC}+\frac{FG}{CA}+\frac{IH}{AB}=2=\text{cons.}$$

25. 過 $\triangle ABC$ 內一點 O, 由頂點至對邊引直線 Aa, Bb, Cc, 則 $\Sigma\dfrac{Oa}{Aa}$ 爲定值.

解

$$\frac{\triangle BOC}{\triangle ABC}=\frac{Oa}{Aa}$$

$$\frac{\triangle AOC}{\triangle ABC}=\frac{Ob}{Bb}$$

$$\frac{\triangle BOA}{\triangle ABC}=\frac{Oc}{Cc}$$

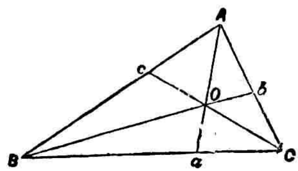

圖 15.

$$\therefore\quad \frac{Oa}{Aa}+\frac{Ob}{Bb}+\frac{Oc}{Cc}$$

$$=\frac{\triangle BOC+COA+AOB}{\triangle ABC}$$

$$=1=\text{cons.}$$