

线性代数

XIANXING DAISHU

修订版

刘金旺 李冬梅 主编

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1x} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2x} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mx} \end{pmatrix}$$

x

y



天津大学出版社
TIANJIN UNIVERSITY PRESS

线 性 代 数

(修订版)

主 编 刘金旺 李冬梅
主 审 黄云清

 天津大学出版社
TIANJIN UNIVERSITY PRESS

内 容 提 要

本书内容包括行列式、矩阵、向量组与矩阵的秩、线性方程组、特征值与二次型、线性空间与线性变换等内容,每章后还配有练习题。

本书适用于高等院校各专业的线性代数教学用书,也可作为考研、自学人员的参考用书。

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/刘金旺,李冬梅主编. —修订本. —天津:天津大学出版社,2010. 8

ISBN 978-7-5618-3514-2

I. ①线… II. ①刘……②李… III. ①线性代数 - 高等学校 - 教材 IV. ①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 146985 号

出版发行 天津大学出版社
出 版 人 杨欢
地 址 天津市卫津路 92 号天津大学内(邮编:300072)
电 话 发行部:022-27403647 邮购部:022-27402742
网 址 www. tjup. com
印 刷 肃宁县科发印刷厂
经 销 全国各地新华书店
开 本 169mm × 239mm
印 张 13.25
字 数 275 千
版 次 2010 年 8 月第 1 版
印 次 2010 年 8 月第 1 次
定 价 24.00 元

凡购本书,如有缺页、倒页、脱页等质量问题,烦请向我社发行部门联系调换

版权所有 侵权必究

再版前言

本书在使用过程中受到了教师和学生的充分肯定和好评,反映良好.为了更好地适应当前我国高等教育跨越式发展的需要,满足我国高校从精英教育向大众化教育转移阶段中对高校人才培养的要求,依据教育部颁布的最新的“高等学校工科数学课程教学基本要求”,我们在前版的基础上进行了修订.在修订中,根据我们多年的教学改革实践,结合国内外线性代数课程改革和各学科建设的最新成果,在保持原教材的系统和风格不变的前提下,使新版符合精品课程教材的需要,体现创新教学理念,有利于激发学生自主学习,有利于提高学生的综合素质和创新能力.

新版保持了原版结构严谨,叙述清晰准确,论证简明易懂,例题选配典型多样,难度层次分明,注明解题方法且加以总结等优点,在修订时,对一些叙述和证明进行了反复推敲,简化了一些证明过程,力求叙述和论证更加通俗易懂,便于自学.

根据广大同行和读者在使用原教材中的意见和建议,在保持原教材深广度不变的前提下,对习题的类型和数量进行了调整和充实.本书中除特别说明外,所有矩阵均指实矩阵.二次型也是实二次型.由于线性变换、 λ 矩阵的概念理科色彩较浓,我们加上星号,教师可根据需要选讲.为增强本书的可读性,方便教师教学,本次修订着重突出以下特点:

- (1)通过大量例题来阐明线性代数的思想,增加学生建立数学模型的意识;
- (2)通过一些实际例子的介绍,增强学生学习线性代数的兴趣;
- (3)用通俗的语言阐述基本概念,强化知识的连贯性与实用性;
- (4)淡化定量的推导,强调方法的训练.

本书由湖南科技大学数学与计算机科学学院刘金旺、李冬梅编写.由于编者水平有限,错误和不妥之处在所难免,恳请广大读者和各位同行批评指正.

编者
2010.6.

目 录

第1章 n 阶行列式	1
1.1 排列与逆序	1
1.2 行列式的定义	3
1.3 行列式的性质	7
1.4 行列式的计算	10
1.5 克拉默法则	17
*1.6 拉普拉斯定理	20
习题1	21
第2章 矩阵	25
2.1 矩阵的定义	25
2.2 矩阵的运算	28
2.3 矩阵的逆	34
2.4 矩阵的分块	38
习题2	43
第3章 向量组与矩阵的秩	48
3.1 n 维向量	48
3.2 线性相关与线性无关	50
3.3 线性相关性的判别定理	55
3.4 向量组的秩与矩阵的秩	59
3.5 矩阵的初等变换	63
3.6 初等矩阵与求矩阵的逆	67
*3.7 向量空间	71
习题3	73
第4章 线性方程组	77
4.1 消元法	77
4.2 线性方程组有解判别定理	80
4.3 线性方程组解的结构	84
习题4	93
第5章 特征值与二次型	96
5.1 向量的内积	96

5.2	方阵的特征值和特征向量	100
5.3	相似矩阵	104
5.4	化二次型为标准型	112
5.5	正定二次型	121
	习题 5	126
* 第 6 章	线性空间与线性变换	129
6.1	线性空间的定义与性质	129
6.2	维数、基与坐标	131
6.3	基变换与坐标变换	133
6.4	线性变换	135
6.5	线性变换的矩阵	137
	习题 6	141
* 第 7 章	λ 矩阵	144
7.1	λ 矩阵的概念	144
7.2	λ 矩阵的标准型	145
7.3	λ 矩阵的不变因子	149
7.4	矩阵的若当标准型	150
	习题 7	153
	习题参考答案	155
	附录	169

第 1 章 n 阶行列式

1.1 排列与逆序

在解线性方程组时经常要用到 2 阶和 3 阶行列式,我们规定它们的展开式分别为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}, \quad (1-1)$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}, \quad (1-2)$$

其中元素 a_{ij} 的两个下标 i 与 j 分别表示 a_{ij} 所在的行与列的序数.

我们先观察到式(1-2)的右端,它是一些乘积项的代数和,其中,每一个乘积项是位于不同行不同列的 3 个数相乘,这 3 个数的第 1 个下标是按自然顺序排列的,第 2 个下标有的则不按自然顺序排列.我们不禁要问:这个代数和的项数、每一项前的符号与第 2 个下标的排列顺序有无关系?有什么关系?为此我们引入全排列与逆序数等概念.

定义 1.1 由 $1, 2, \dots, n$ 组成的一个有序数组称为一个 n 级全排列(简称排列).

有序数组 12 和 21,由两个数构成,称为 2 级排列.有序数组 213 则称为 3 级排列,3 级排列的总数为 $3! = 6$ 个.4231 为 4 级排列,4 级排列的总数为 $4! = 24$ 个. n 级排列的总数是 $n(n-1)(n-2) \cdots 2 \cdot 1 = n!$,读为“ n 的阶乘”,记为 $n!$;随着 n 的增大而迅速增大,例如, $10! = 3\,628\,800$.

显然 $12 \cdots n$ 也是一个 n 级排列,这个排列具有自然顺序,就是按递增的顺序排起来的,其他的排列都或多或少地破坏自然顺序.

定义 1.2 在一个排列中,如果两个数(称为数对)的前后位置与大小顺序相反,即前面的数大于后面的数,那么称这两个数构成一个逆序(反序).一个排列中逆序的总数称为这个排列的逆序数.

一个排列 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 的逆序数,一般记为 $\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)$.

2 级排列 12 的逆序数为 0, 排列 21 的逆序数为 1, 排列 231 的数对 21, 31 均构成逆序, 而 23 不构成逆序, 因此排列 231 的逆序数为 2. 同理排列 213 的逆序数是 1, 即 $\tau(213) = 1$. 进一步我们有如下定义.

定义 1.3 逆序数为偶数的排列称为偶排列, 逆序数为奇数的排列称为奇排列.

2 级排列 12 为偶排列, 21 为奇排列; 3 级排列 231 为偶排列, 213 为奇排列.

例 1.1 计算以下各排列的逆序数, 并指出它们的奇偶性.

(1) 42351; (2) $135 \cdots (2n-1)246 \cdots (2n)$.

解 (1) 对于所给排列, 4 排在首位, 逆序个数为 0; 2 的前面有 1 个比它大的数, 逆序个数为 1; 3 的前面有 1 个比它大的数, 逆序个数为 1; 5 的前面没有比它大的数, 逆序个数为 0; 1 的前面有 4 个比它大的数, 逆序个数为 4. 把这些数加起来, 即

$$0 + 1 + 1 + 0 + 4 = 6,$$

故排列 42351 的逆序总数为 6, 即 $\tau(42531) = 6$, 因而是偶排列.

(2) 同理可得

$$\begin{aligned} \tau[135 \cdots (2n-1)246 \cdots (2n)] &= 0 + (n-1) + (n-2) + \cdots + 2 + 1 \\ &= \frac{n(n-1)}{2}. \end{aligned}$$

所给排列当 $n = 4k$ 或 $4k+1$ 时为偶排列, 当 $n = 4k+2$ 或 $4k+3$ 时为奇排列.

易见 231 是偶排列 (逆序数为 2), 我们把排列 231 中的 3 与 1 对换, 得到的排列 213 是奇排列 (逆序数为 1), 这两个排列的奇偶性正好相反, 事实上对一般的排列也是如此.

定义 1.4 在一个排列中, 将某两个数对调, 其余的数不动, 这种对排列的变换叫做对换, 将相邻两数对换, 叫做相邻对换 (邻换).

定理 1.1 一个排列中的任意两数对换, 排列改变奇偶性.

证 先证相邻对换的情形.

设排列为 $p_1 \cdots p_{i-1} p_i p_{i+1} p_{i+2} \cdots p_n$, 对换 p_i 与 p_{i+1} 排列就变为 $p_1 \cdots p_{i-1} p_{i+1} p_i p_{i+2} \cdots p_n$, 显然 $p_1, \cdots, p_{i-1}, p_{i+2}, \cdots, p_n$ 这些数的逆序数经过对换并不改变, 仅 p_i 与 p_{i+1} 两数的逆序数改变: 当 $p_i < p_{i+1}$ 时, 经对换后, $p_{i+1} p_i$ 是逆序, 新排列的逆序数增加 1, 当 $p_i > p_{i+1}$ 时, $p_{i+1} p_i$ 不是逆序, 新排列的逆序数减少 1, 所以排列 $p_1 \cdots p_{i-1} p_i p_{i+1} p_{i+2} \cdots p_n$ 与排列 $p_1 \cdots p_{i-1} p_{i+1} p_i p_{i+2} \cdots p_n$ 的逆序数相差 1, 奇偶性改变.

下证一般对换的情形.

设排列为 $p_1 \cdots p_{i-1} p_i p_{i+1} \cdots p_{i+m} p_{i+m+1} p_{i+m+2} \cdots p_n$, 对换 p_i 与 p_{i+m+1} , 先把 p_i 往后连续作 m 次相邻对换, 排列变为 $p_1 \cdots p_{i-1} p_{i+1} \cdots p_{i+m} p_i p_{i+m+1} p_{i+m+2} \cdots p_n$, 再把 p_{i+m+1} 往前连续作 $m+1$ 次相邻对换, 排列就变为 $p_1 \cdots p_{i-1} p_{i+m+1} p_{i+1} \cdots p_{i+m} p_i p_{i+m+2} \cdots p_n$,

从而实现了 p_i 与 p_{i+m+1} 的对换,它是经 $2m+1$ 次相邻对换而成,排列也就改变了 $2m+1$ 次奇偶性,所以两个排列的奇偶性相反.

1.2 行列式的定义

有了前面的准备,下面我们探讨 1.1 中式(1-1)、(1-2)右端各项的规律.

式(1-1)右端各项的第 1 个下标按自然顺序排列,对它们第 2 个下标进行观察:第 2 个下标由两个自然数 1 和 2 组成,只能构成两个 2 级排列:12 和 21,排列个数等于式(1-1)右端的项数,且排列 12 的逆序数为 0(偶排列),对应项的符号为“+”,而排列“21”的逆序数为 1(奇排列),所对应项的符号为“-”.

式(1-2)右端各项的第一个下标按自然顺序排列,第二个下标由自然数 1、2 和 3 组成,构成的三级排列共有 $3! = 6$ 个:123、231、312、321、132、213,这正好等于式(1-2)右端的项数,排列为 123、231、312 的逆序数分别为 0、2、2,它们均为偶排列,对应项的符号为“+”,排列 321、132、213 的逆序数分别为 3、1、1,它们都是奇排列,对应项的符号为“-”.综上所述:式(1-2)右端各项可写成 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$, 这里 $j_1j_2j_3$ 是 1、2、3 的一个 3 级排列,这种排列共有 6 个,等于式(1-2)右端的项数.当 $j_1j_2j_3$ 为偶排列时,项 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$ 前面的符号为正,当 $j_1j_2j_3$ 为奇排列时,项 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$ 前面的符号为负,各项所带符号均可以表示为 $(-1)^J$, 其中 $J = \tau(j_1j_2j_3)$ 为排列 $j_1j_2j_3$ 的逆序数.从而式(1-2)可写为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2j_3} (-1)^{\tau(j_1j_2j_3)} a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3},$$

$\sum_{j_1j_2j_3}$ 表示对全体 3 级排列求和.

现在,把上述规则推广到 n 阶行列式去,从而给出 n 阶行列式的定义.

定义 1.5 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

等于所有取自不同行不同列的 n 个元素的乘积

$$a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n} \quad (1-3)$$

的代数和,这里 $j_1j_2\cdots j_n$ 是 $1, 2, \cdots, n$ 的一个排列,每一项(1-3)都按下列规则带有符号:当 $j_1j_2\cdots j_n$ 是偶排列时,(1-3)带有正号;当 $j_1j_2\cdots j_n$ 是奇排列时,(1-3)带有负

号. 这一定义可以写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}, \quad (1-4)$$

这里 $\sum_{j_1 j_2 \cdots j_n}$ 表示对所有 n 级排列求和.

例 1.2 计算 4 阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}.$$

解 根据定义, D 是 $4! = 24$ 项的代数和, 但每一个乘积项 $a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3} a_{4j_4}$ 中只要有一个元素为 0, 乘积项就等于 0, 所以只需计算展开式中不明显为 0 的项. 由于第 1 行元素除 a_{11} 外全为 0, 故只需考虑 $j_1 = 1$, 第 2 行元素中只有 a_{21}, a_{22} 不为 0, 现已取 $j_1 = 1$, 故必须取 $j_2 = 2$, 同理必须取 $j_3 = 3, j_4 = 4$, 这就是说行列式展开式中不为 0 的项只可能是 $a_{11} a_{22} a_{33} a_{44}$, 而列标排列 1234 的逆序数为 0, 即此项符号为正, 因此行列式 $D = a_{11} a_{22} a_{33} a_{44}$.

行列式中, 从左上角到右下角的直线称为主对角线. 主对角线以上的元素全为零 (即 $i < j$ 时元素 $a_{ij} = 0$) 的行列式称为下三角行列式, 它等于主对角线上各元素的乘积. 主对角线以下的元素全为零 (即 $i > j$ 时元素 $a_{ij} = 0$) 的行列式称为上三角行列式, 同理可证它等于主对角线上各元素的乘积. 行列式中, 除主对角线上的元素以外, 其他元素全为零 (即 $i \neq j$ 时元素 $a_{ij} = 0$) 的行列式称为对角行列式, 由上面可知它等于对主对角线上元素的乘积, 即

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}.$$

例 1.3 证明

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n} a_{2,n-1} \cdots a_{n-1,2} a_{n1},$$

上面的行列式中, 未写出的元素都是 0.

证 由于行列式的值为 $\sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^J a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$, 只需对可能不为0的乘积项 $(-1)^J a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$ 求和, 考虑第 n 行元素 a_{nj_n} , 知 $j_n = 1$, 再考虑第 $n-1$ 行元素 $a_{n-1, j_{n-1}}$, 知 $j_{n-1} = 1$ 或 $j_{n-1} = 2$, 由于 $j_n = 1$, 知 $j_{n-1} = 2$, 如此类推 $j_2 = n-1, j_1 = n$, 可能不为0的乘积项对应的排列 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 只能是排列 $n(n-1) \cdots 21$, 它的逆序数为 $J = 0 + 1 + 2 + \cdots + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2}$, 所以行列式的值为

$$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n} a_{2, n-1} \cdots a_{n-1, 2} a_{n1}.$$

由此可见

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 \\ a_{41} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = a_{14} a_{23} a_{32} a_{41}.$$

例 1.4 设

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{11} & \cdots & c_{1k} & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nk} & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix},$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}, D_2 = \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix},$$

证明 $D = D_1 D_2$.

$$\text{证 记 } D = \begin{vmatrix} d_{11} & \cdots & d_{1, k+n} \\ \vdots & & \vdots \\ d_{k+n, 1} & \cdots & d_{k+n, k+n} \end{vmatrix},$$

其中

$$\begin{aligned} d_{ij} &= a_{ij} \quad (i, j = 1, 2, \cdots, k); \\ d_{k+i, j} &= c_{ij} \quad (i = 1, 2, \cdots, n; j = 1, 2, \cdots, k); \\ d_{k+i, k+j} &= b_{ij} \quad (i, j = 1, 2, \cdots, n); \\ d_{i, k+j} &= 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, k; j = 1, 2, \cdots, n). \end{aligned}$$

考察 D 的一般项, $(-1)^R d_{1r_1} d_{2r_2} \cdots d_{kr_k} d_{k+1, r_{k+1}} \cdots d_{k+n, r_{k+n}}, R$ 是排列 $r_1 r_2 \cdots r_k r_{k+1} \cdots r_{k+n}$ 的逆序数, 由于 $d_{i, k+j} = 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, k; j = 1, 2, \cdots, n)$, 可见 $r_1, r_2, \cdots, r_k$ 均不可

能大于 k 值, 否则该项为 0, 故 $r_1, r_2, \dots, r_k$ 只能在 $1, 2, \dots, k$ 中选取, 从而 $r_{k+1}, r_{k+2}, \dots, r_{k+n}$ 只能在 $k+1, k+2, \dots, k+n$ 中选取, 于是 D 中不为 0 的项可以记作

$$(-1)^R a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{kp_k} b_{1q_1} b_{2q_2} \cdots b_{nq_n},$$

这里 $p_i = r_i, q_i = r_{k+i} - k, 1 \leq r_i \leq k, k+1 \leq r_{k+i} \leq k+n, R$ 也就是排列 $p_1 p_2 \cdots p_k (k+q_1) \cdots (k+q_n)$ 的逆序数, 以 P, Q 分别表示排列 $p_1 p_2 \cdots p_k$ 与 $q_1 q_2 \cdots q_n$ 的逆序数, 则有 $R = P + Q$, 于是

$$\begin{aligned} D &= \sum_{p_1 \cdots p_k} \sum_{q_1 \cdots q_n} (-1)^{P+Q} a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{kp_k} b_{1q_1} b_{2q_2} \cdots b_{nq_n} \\ &= \sum_{p_1 \cdots p_k} (-1)^P a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{kp_k} \left(\sum_{q_1 \cdots q_n} (-1)^Q b_{1q_1} b_{2q_2} \cdots b_{nq_n} \right) \\ &= \sum_{p_1 \cdots p_k} (-1)^P a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{kp_k} D_2 \\ &= D_1 D_2. \end{aligned}$$

由于数的乘法是可交换的, 所以行列式各项中的元素的顺序也可任意交换, 例如四阶行列式中乘积 $a_{11} a_{22} a_{33} a_{44}$ 可以写成 $a_{22} a_{11} a_{44} a_{33}$, 一般 n 阶行列式中乘积 $a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$ 可以写成 $a_{p_1 q_1} a_{p_2 q_2} \cdots a_{p_n q_n}$, 其中 $p_1 p_2 \cdots p_n$ 与 $q_1 q_2 \cdots q_n$ 都是 n 级排列.

定理 1.2 n 阶行列式的项可以写成

$$(-1)^{S+T} a_{p_1 q_1} a_{p_2 q_2} \cdots a_{p_n q_n},$$

其中 S 与 T 分别是 n 级排列 $p_1 p_2 \cdots p_n$ 与 $q_1 q_2 \cdots q_n$ 的逆序数.

证 该项中任意两元素互换, 行下标与列下标同时对换, 由定理 1.1 知 n 级排列 $p_1 p_2 \cdots p_n$ 与 $q_1 q_2 \cdots q_n$ 同时改变奇偶性, 于是 $S+T$ 的奇偶性不变, 如果将排列 $p_1 p_2 \cdots p_n$ 对换为自然顺序 $12 \cdots n$ (逆序数为 0), 排列 $q_1 q_2 \cdots q_n$ 也相应对换为 $j_1 j_2 \cdots j_n$ (逆序数为 J), 则有

$$(-1)^{S+T} a_{p_1 q_1} a_{p_2 q_2} \cdots a_{p_n q_n} = (-1)^J a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}.$$

由定理 1.2 可知, 当取定一个列下标的排列 $q_1 q_2 \cdots q_n$ 时 (当然也可以取定一个行下标的排列 $p_1 p_2 \cdots p_n$), 行列式的定义可写为

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\ &= \sum_{p_1 p_2 \cdots p_n} (-1)^{\tau(p_1 p_2 \cdots p_n) + \tau(q_1 q_2 \cdots q_n)} a_{p_1 q_1} a_{p_2 q_2} \cdots a_{p_n q_n}. \end{aligned} \quad (1-5)$$

在 4 级行列式 D 中取定列下标的排列 2413, 我们有

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = \sum_{p_1 p_2 p_3 p_4} (-1)^{\tau(p_1 p_2 p_3 p_4) + \tau(2413)} a_{p_1 2} a_{p_2 4} a_{p_3 1} a_{p_4 3}.$$

若将行列式中各项的列下标按自然顺序排列(相当于取定 $q_1 q_2 \cdots q_n = 12 \cdots n$), 而相应行下标排列为 $i_1 i_2 \cdots i_n$, 于是行列式又可定义为

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{i_1 i_2 \cdots i_n} (-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n}. \quad (1-6)$$

1.3 行列式的性质

直接从定义计算行列式的值有时是相当麻烦的, 下面我们研究行列式的性质. 把行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

的行换成同序数的列得到的行列式

$$D' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

称为行列式 D 的转置行列式.

性质 1 行列式的值与它的转置行列式的值相等.

证 记

$$D' = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix},$$

即 $b_{ij} = a_{ji} (i, j = 1, 2, \cdots, n)$, 按行列式定义

$$D' = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} b_{1j_1} b_{2j_2} \cdots b_{nj_n}$$

$$= \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{j_1 1} a_{j_2 2} \cdots a_{j_n n} = D.$$

性质 2 互换行列式的两行(列), 行列式的值反号.

证

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} & \cdots & a_{1q} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2p} & \cdots & a_{2q} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{np} & \cdots & a_{nq} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

交换第 p, q 两列得行列式

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1q} & \cdots & a_{1p} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2q} & \cdots & a_{2p} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nq} & \cdots & a_{np} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

将 D 与 D_1 按式(1-6)计算, 对于 D 中任一项

$$(-1)^I a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_p p} \cdots a_{i_q q} \cdots a_{i_n n},$$

其中 I 为排列 $i_1 \cdots i_p \cdots i_q \cdots i_n$ 的逆序数, 在 D_1 中必有对应一项

$$(-1)^{I_1} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_q q} \cdots a_{i_p p} \cdots a_{i_n n}$$

(当 $j \neq p, q$ 时, 第 j 列元素取 a_{ij} , 第 p 列元素取 $a_{i_q p}$, 第 q 列元素取 $a_{i_p q}$), 其中 I_1 为排列 $i_1 \cdots i_q \cdots i_p \cdots i_n$ 的逆序数, 而

$$i_1 \cdots i_p \cdots i_q \cdots i_n$$

与

$$i_1 \cdots i_q \cdots i_p \cdots i_n$$

只经过一次对换, 由定理 1.1 知, $(-1)^I$ 与 $(-1)^{I_1}$ 相差一个符号, 又因

$$a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_q q} \cdots a_{i_p p} \cdots a_{i_n n} = a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_p p} \cdots a_{i_q q} \cdots a_{i_n n},$$

所以对于 D 中任一项, D_1 中必定有一项与它的符号相反而绝对值相等, 又 D 与 D_1 的项数相同, 所以 $D = -D_1$.

交换行列式第 i 行和第 j 行两行, 记作 $r(i, j)$, 交换行列式第 i 列和第 j 列两列, 记作 $c(i, j)$.

推论 若行列式有两行(列)元素对应相等, 则行列式的值为零.

利用行列式的定义不难证明以下 4 条性质.

性质 3 行列式的某一行(列)中所有元素都乘以同一个数 k , 等于用数 k 乘以此行列式.

第 i 行(列)乘以数 k , 记作 $r(i(k))$ [$c(i(k))$].

性质 4 行列式中若有两行(列)元素对应成比例, 则此行列式的值为零.

性质5 若行列式的某行(列)的元素都是两个数之和,例如

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} + a'_{i1} & a_{i2} + a'_{i2} & \cdots & a_{in} + a'_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

则行列式 D 等于下列两个行列式之和:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a'_{i1} & a'_{i2} & \cdots & a'_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

性质6 把行列式某一行(列)的元素乘以数 k , 加到另一行(列)对应的元素上去, 行列式的值不变.

例如, 以数 k 乘以第 i 行(列)上的元素加到第 j 行(列)对应元素上, 记作 $r(j+i(k))$ 或 $c(j+i(k))$, 放在等号的上面, 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \xrightarrow{r(j+i(k))} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} + ka_{i1} & a_{j2} + ka_{i2} & \cdots & a_{jn} + ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (i \neq j).$$

例 1.5 计算 4 阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} -4 & 3 & 1 & -5 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \\ -3 & 3 & -5 & 1 \end{vmatrix}.$$

解

$$\begin{aligned}
 D &= \begin{vmatrix} -4 & 3 & 1 & -5 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \\ -3 & 3 & -5 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{c(1,3)} - \begin{vmatrix} 1 & 3 & -4 & -5 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 3 & -3 & 1 \end{vmatrix} \\
 &\xrightarrow{\substack{r(2+1(-1)), \\ r(4+1(5))}} - \begin{vmatrix} 1 & 3 & -4 & -5 \\ 0 & -4 & 6 & 8 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 18 & -23 & -24 \end{vmatrix} \xrightarrow{r(2,3)} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -4 & -5 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -4 & 6 & 8 \\ 0 & 18 & -23 & -24 \end{vmatrix} \\
 &\xrightarrow{\substack{r(3+2(4)) \\ r(4+2(-18))}} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -4 & -5 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 16 \\ 0 & 0 & -5 & -60 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 3 & -4 & -5 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & -5 & -60 \end{vmatrix} \\
 &\xrightarrow{\substack{r(4+3(5)) \\ 2}} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -4 & -5 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & -20 \end{vmatrix} = -40.
 \end{aligned}$$

例 1.6 计算 4 阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} 0 & b & 0 & -b \\ b & 0 & -b & 0 \\ a & 0 & a & b \\ 0 & a & b & a \end{vmatrix}.$$

解

$$\begin{aligned}
 D &= \begin{vmatrix} 0 & b & 0 & -b \\ b & 0 & -b & 0 \\ a & 0 & a & b \\ 0 & a & b & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & b & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 2a & b \\ 0 & a & b & 2a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 2a & b \\ b & 2a \end{vmatrix} \\
 &= -b^2(4a^2 - b^2).
 \end{aligned}$$

1.4 行列式的计算

定义 1.6 在行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

中划去元素 a_{ij} 所在的第 i 行与第 j 列,剩下的 $(n-1)^2$ 个元素按原来的顺序排成一个 $n-1$ 级的行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为元素 a_{ij} 的余子式,记为 M_{ij} . 记

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij},$$

A_{ij} 叫做元素 a_{ij} 的代数余子式.

由定义 1.6 可知, A_{ij} 与行列式中第 i 行、第 j 列的元素无关.

引理 在 n 阶行列式 D 中,如果第 i 行元素除 a_{ij} 外全部为零,那么该行列式等于 a_{ij} 与它的代数余子式的乘积,即

$$D = a_{ij} A_{ij}.$$

证 先证 $i=1, j=1$ 的情形,即

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_2 j_3 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_2 j_3 \cdots j_n)} a_{11} a_{2j_2} a_{3j_3} \cdots a_{nj_n} \\ &= a_{11} \sum_{j_2 j_3 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_2 j_3 \cdots j_n)} a_{2j_2} a_{3j_3} \cdots a_{nj_n} \\ &= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\ &= a_{11} M_{11} = a_{11} (-1)^{1+1} M_{11} = a_{11} A_{11}. \end{aligned}$$

对一般情形,只要适当交换 D 的行与列的位置,即可得到结论.

定理 1.3 行列式 D 等于它的任一行(列)的各元素与其对应的代数余子式乘