西安交通大學

研究生创新教育系列教材

非线性动力系统的运动稳定性、分岔理论及其应用

张家忠 编著

西安交通大学出版社
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS

西安交通大学

研究生创新教育系列教材

非线性动力系统的运动稳定性、分岔理论及其应用

张家忠 编著

西安交通大学出版社

·西 安·

内容简介

本书对运动稳定性、分岔、突变、混沌以及分数维的一些基本理论及其在能源、动力及机械工程中的应用进行了较全面地介绍和论述，并增加了部分数学基础内容，以便自学。特别是在基本内容基础上，本书介绍了用于分析非线性连续介质动力学的惯性流形理论和数值方法，并根据非线性动力学理论的普适性，结合实际现象，对非线性动力学理论中的基本概念给出了一些具有启发性的解释。

本书可供大学理工科各专业的本科生、研究生以及相关科技人员阅读参考。

图书在版编目(CIP)数据

非线性动力系统的运动稳定性、分岔理论及其应用/张家忠编著.—西安:西安交通大学出版社,2010.7
ISBN 978-7-5605-3589-0

Ⅰ.①非… Ⅱ.①张… Ⅲ.①非线性-动力系统(数学-研究 Ⅳ.①O19

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 102768 号

书　　名 非线性动力系统的运动稳定性、分岔理论及其应用
编　　著 张家忠
责任编辑 叶　涛　田　华

出版发行 西安交通大学出版社
(西安市兴庆南路 10 号　邮政编码 710049)
网　　址 http://www.xjtupress.com
电　　话 (029)82668357　82667874(发行中心)
(029)82668315　82669096(总编办)
传　　真 (029)82668280
印　　刷 陕西宝石兰印务有限责任公司

开　　本 727mm×960mm　1/16　**印张** 15　**字数** 261 千字
版次印次 2010 年 7 月第 1 版　2010 年 7 月第 1 次印刷
书　　号 ISBN 978-7-5605-3589-0/O·338
定　　价 26.00 元

读者购书、书店添货、如发现印装质量问题，请与本社发行中心联系、调换。
订购热线:(029)82665248　(029)82665249
投稿热线:(029)82664954
读者信箱:jdlgy@yahoo.cn

绪 论

严格意义上,非线性问题在客观现实中是普遍存在的,而线性问题则是非线性现象在极端条件下的特例,是极不普遍的。目前,对于实际中的非线性问题,通常采用线性化处理进行简化,对于某些问题,这种方法是可行的(如双曲问题),而对于大多数问题(非双曲问题),这种线性化方法是不可行的。线性化处理的结果会将许多非线性现象“过滤”掉,从而使简化后的问题与原始问题不能够拓扑等价,这也正是 Hartman-Grosman 定理所描述的。

回忆以前学习弹性力学时,常常对一弹性体的变形采用或施加小变形的假设,以便对变形体在平衡状态附近进行 Taylor 展开,进一步进行线性化处理,从而简化了数学求解过程,构建了完美的线性弹性力学框架。然而,基于小变形假设的弹性力学框架在实际应用中却常常遇到困惑:工程实际发现,当结构处于大变形状态时仍然能够承载;这与线性化弹性力学分析得到的临界载荷相差较大。事实上,该类问题属于几何大变形问题,也称为几何非线性问题,其中包含丰富的分岔行为。对于该类问题,采用简单的线性化处理所得到的系统不再与原非线性问题拓扑等价,简化的线性系统不能够描述原系统的力学行为。因此,有必要对该类问题进行非线性建模、分析。

事实上,根据 Hartman-Grobman 定理,只有对于双曲平衡点采用线性化处理,方可保证线性简化后的系统与原系统拓扑等价。同时,对于非线性动力系统,线性系统的一些成熟理论,如叠加性等,也不再适用。特别地,对于一些强非线性动力系统,其动力学特性对初边值极端敏感,一些小的扰动(对于几何非线性大变形板壳类,可以理解为初始缺陷),可能导致系统最终处于另外一种平衡状态,本书将对此类缺陷分岔进行介绍。

能源与动力工程专业中包含有许多传统而又基础的学科,其大多数方程为强非线性耗散动力方程,如流体动力学、多相流、传热学等,包含着丰富的非线性特性。如果采用经典的线性化方法,系统中的非线性行为将被“过滤”掉,有可能出现规律性失真。另外,大多数学者对该类动力学方程的求解单纯采用直接数值积分方法获得其稳定解,并没有完全跟踪出非稳定的解分枝。而且,对于某些非线性特性,如非稳定的解分枝的跟踪,在实验中不能完整观察到。在这种情况下,就需要借助于特殊的数值分析方法,确定出非稳定分枝解或非稳定平衡位置(如非稳定周

期解、静载荷屈曲中两鞍-结分岔点间的非稳定曲线)。除此之外,目前对于各类失稳现象的定量研究还存在很多的问题,如复杂流-固耦合中,Hopf 分岔导致周期颤振的判断指标、周期解失稳的 Floquet 乘子等的确定。而这些结构稳定性和分岔分析正是探索、解释各类非线性现象的产生、演化机理的有力工具,因而,结合非线性科学的一些前沿理论对能源与动力工程领域中的一些难题进行分析势在必行。进一步,还可以基于非线性动力学中具有普适性的理论,如奇异性理论,对已有的力学、数学模型进行完善,使其更加接近实际。

国外一些著名大学,如:Duke University, Princeton University, Maryland University,MIT,CIT 等都开展了非线性科学的普及教育,并且定期或不定期召开工程学科与科学学科联合的非线性科学研讨会,在各个领域涌现出一批研究非线性现象的开创者,相继产生了一批高品质的原始创新。特别是从非线性动力系统角度,对古老的湍流问题做出了一些开创性的工作。

非线性科学正在成为跨学科的研究前沿。例如物理学中关于对称和守恒、对称破缺和相变的思想正在日益增多的新领域中得到应用。2008 年的诺贝尔物理奖得主的成就正是在于提出了亚原子物理的对称性自发破缺机制。虽然各门传统学科中都有自己的非线性课题,但非线性科学却不是这些课题的总和。事实上,非线性科学揭示了各种非线性现象的共性,并发展了处理它们的普适方法。能源与动力类学科具有丰富的研究背景和基础,普及非线性科学理论是急需的项目和课题,这也是编写本教材的动机之一。

非线性动力学不仅涉及到数学、力学、化学和物理学等基础学科,同时也影响到自然科学、工程技术和社会科学的众多领域,是一门跨专业的重要新学科,是具有普适性的理论体系。

当代自然科学有五大难题需要解决:(1)宇宙的起源和演化;(2)地球的起源和演化;(3)生命与智力的起源;(4)物质结构之谜;(5)非线性科学和复杂性研究。前四个都涉及到由大量粒子组成的复杂系统的演变规律,并且它们推动了正在兴起的跨学科的第五方面的研究领域——非线性科学。

假如一个系统可以分成若干部分,而系统整体的效能是这几个部分效能的简单叠加,则该系统就是线性系统。从数学角度,线性系统用线性函数描述,线性函数方程遵从叠加原理,即方程的不同解叠加起来仍然是原方程的解,这也是线性系统最为本质的特征之一。而对于非线性系统,叠加原理不成立,通过部分效能的简单叠加是不能获得系统的整体效能的。很明显,在现实世界中,许多系统都是非线性系统,非线性系统千姿百态,描述它们的微分方程也非常复杂。

那么,非线性科学的研究范围到底有多大?目前为大家所公认的观点是,非线性科学主要包括耗散结构论、协同论、突变论和混沌。

耗散结构论　热力学第二定律预言宇宙的演化将朝着熵增的方向发展，也就是事物的发展将越来越无序。然而进化论指出，生物总是从低级到高级，从无序向有序进化，这与热力学第二定律相矛盾。事实上，耗散结构论成功地解决了这一矛盾。耗散结构理论认为：一个远离平衡态的非线性开放系统不断地与外界交换物质和能量，当系统内部某个参量的变化达到一定程度时，系统可能发生突变即非平衡相变，而由原来的混沌无序状态转变为一种在时间上、空间上或功能上的有序状态。这种在远离平衡的非线性区域形成的、新的、稳定的宏观有序结构，由于需要不断与外界交换物质或能量方能维持，因此被称为耗散结构。

协同论　非线性系统内部的若干子系统之间是相互协调的，当此类子系统被组合到一起时，将会涌现出有序的行为。协同论认为，对于千差万别的系统，即使其属性截然不同，一旦它们处于一个共同环境之中，各个系统间将出现相互影响而又相互合作的关系。因而，协同论也可以认为是一门研究自然界以及人类社会中各种系统的发展、演变、转化以及协调的内在规律的理论。

突变论　在自然界和人类社会活动中，除了渐变的和连续光滑的变化现象外，还存在着大量的突然变化和跃迁现象，如岩石的破裂、桥梁的崩塌、细胞的分裂、生物的变异、情绪的波动、经济危机等等。突变论正是针对该类问题提出的理论，该理论从此类问题的方程描述出发，旨在揭示从一种稳定组态跃迁到另一种稳定组态时出现的现象及其规律。例如：经济危机模型，它表现了经济危机在爆发时是一种突变，并且具有折叠型突变的特征，而在经济危机后的复苏则是缓慢的，它是经济行为沿着"折叠曲面"缓慢滑升的渐变。此外，古代就有"物极必反，大道无形"等说法，也可视为突变理论的一种诠释。突变论与耗散结构论、协同论一起，在有序与无序的转变机制上，把系统的形成、结构和发展联系起来，成为推动非线性系统科学发展的重要理论基础。

混沌理论　这里的混沌并不等同于无序和混乱，而是指确定的系统中由于内随机性而产生的一种外在的、复杂的、貌似无规则的运动，更像是没有周期性的秩序（对一个完全确定的系统，在一定系统参数条件下，能自发地产生随机特性，称为内随机性）。对混沌的研究是从对微分方程的求解开始的。20 世纪初，一些数学家和天文学家发现某些特殊的微分方程的可解性以及解值对初始条件极为敏感，初始条件的细微差别可能导致解值的巨大偏差，甚至产生无解现象。中国有句古话："失之毫厘，谬以千里"，用来描述混沌极为确切。1963 年，美国气象学家洛伦兹在计算机上用他所建立的微分方程模拟气候变化时，偶然发现输入初始条件的极细微差别会引起模拟结果的巨大变化，后来被称为"蝴蝶效应"。一般认为，20 世纪的科学传世之作只有三件：相对论、量子力学和混沌理论。就像一位物理学家所陈述的，相对论否定了牛顿对绝对空间与时间的描述；量子理论否定了牛顿对于

控制下测量过程的梦想；而混沌理论则粉碎了拉普拉斯对因果决定论可预测度所存的幻影。

近年来，国内外许多高校都开设了非线性动力学或混沌动力学之类的课程，但大部分内容只涉及到"小自由度"的有限维非线性系统，还缺乏将其理论应用于多自由度、连续介质非线性动力系统或无穷维动力系统等更加接近实际情况的教材。事实上，现实生活中存在的非线性问题大都是连续介质动力系统，而现有的非线性动力学理论难以机械地应用于其中。本书的目的之一，就是介绍如何将非线性科学中的先进理论和分析方法，合理地应用于实际中的复杂问题中，并深入探索出所观察的非线性现象。

笔者长期致力于非线性动力学的研究及教学，为研究生开设了"非线性动力系统的运动稳定性、分岔及其数值方法"课程，吸引了能源与动力、电信、电气、机械、力学等学院的学生前来学习。在教学过程中，编者越来越清楚地认识到要想使学生将极度抽象的非线性理论消化、吸收并应用于所学专业中是一相当困难的过程，这也成为了编者在教学中一直思考的问题。为此，在日常的授课中，笔者做出了一些尝试，结合能源与动力类专业的实际问题对分岔理论给出形象直观的解释，使学生从感性认识出发，加深理性思考，提高对非线性理论的认识、理解和掌握，取得了显著的成效。一些研究生通过本课程的学习，成功地将非线性科学中的分岔理论应用于所学专业，发现了一些新现象和相应的解释。目前，已有的非线性科学教材大多由数学工作者编写，其中过多的抽象数学理论、大篇幅的数学推导，使得学生阅读较为困难，难以自学。编写一本易于工程专业研究生学习的教材，以适应当今非线性科学的蓬勃发展和广泛应用，帮助研究生迅速进入这一跨学科的新领域，是能源与动力专业类研究生及指导教师的一个心愿，这也是编写本书的目的之一。事实上，我校原建力学院、电信学院早在 1987 年就开始先后开设过此领域和方面的研究生课程，并取得了一些成效。

由于能源与动力工程含有丰富的非线性现象，因此，为了充分利用能动类学科中丰富的研究资源，本书基于非线性动力学理论的普适性，结合实际现象，对非线性理论中的基本概念给出了一些具有启发性的解释，并给出一些算法的原理；同时，借助非线性动力学相关理论和方法，对能源、动力领域中的一些问题获得了新的认识。例如：结合转子系统中的油膜涡动、透平叶片的颤振、层流通向湍流的途径、机翼绕流的分离等实际现象，应用泛函分析基本概念、动力系统、流、拓扑、不动点、奇异性、分岔、突变、混沌、奇怪吸引子、惯性流形、分形、自组织、伪弧长延拓法等理论，给出具有启发性的解释。

本课程将对运动稳定性、分岔、突变以及混沌的一些基本理论及其在能源、动力及机械工程中的应用进行了较全面地介绍和论述，并对一些常用的数值分岔方

法进行详细地推导。主要内容共分为 5 章。

第 1 章主要给出了非线性动力系统的定性描述，包括动力系统的数学定义、运动稳定性、相平面和奇点的种类及其判别指标、结构稳定性及分岔、双曲平衡点的局部结构稳定性、非双曲平衡点的局部结构稳定性、极限环等内容，是进一步学习非线性动力学分析方法的基础；同时，为进一步深入地研究非线性动力学，增加了微分流形等现代分析基础等内容。

第 2 章介绍了分岔及突变的基本理论，主要包括：向量场的分岔、映射的分岔、周期解的稳定性和分岔、同宿、异宿轨道分岔、缺陷分岔、突变等理论，为研究非线性动力系统的基本工具，是本书的重点内容；同时，结合实际问题，给出了分岔理论的具体应用。

第 3 章系统介绍了混沌系统的基本理论，着重介绍了通向混沌的途径，相对于几条常规途径，增加了危机、混沌瞬态、吸引域边界变形等途径，使得对混沌有一感性认识；包括吸引子、通向混沌的途径、混沌的概念及特征、混沌的微观结构和行为的描述、Lyapunov 指数、分形与分维等内容，使得对于混沌等非线性现象能够进行定量描述。

第 4 章简单介绍了目前发展的分析非线性连续介质（或无穷维）动力系统的方法：惯性流形理论，用以分析能源与动力类专业中的流体动力学、板壳动力学、传热学、热力学等问题。主要包括：惯性流形、近似惯性流形及时滞惯性流形、时滞惯性流形在浅拱动力屈曲分析中的应用、多级有限元构造 N－S 方程的近似惯性流等内容，为开发大规模的、高效数值方法提供了理论基础，特别是非线性无穷维动力系统的降维，如复杂的流体动力学的运动稳定性及数值分岔分析。

第 5 章主要介绍笔者及课题组成员近几年关于非线性动力学的应用方面所做的一些研究工作，主要包括：转子-有限长气体轴承系统中的非线性动力学、浅拱结构动力屈曲中多平衡位置的稳定性及分岔、机翼绕流边界层分离的分岔特性、低速气流中二元叶片的颤振、非线性小世界网络动力学等内容。主要目的是拓展非线性动力学在实际中连续介质、非均匀介质动力系统中的应用。

其中，关于简单极限点的逼近、简单分歧点的逼近、多重分枝问题的延拓跟踪方法以及奇异性的内容，已有较详细的专著，在本教材中不再论述。

笔者基于自己的研究结果及多年的教学积累，撰写此易于工程专业研究生接受的教材，以适应当今非线性科学的发展，并反映非线性理论各方面的基本内容和最新进展，希望对研究生迅速进入这一跨学科的新领域有所帮助。该教材也可作为自然科学和工程技术研究人员的自学材料。考虑到非线性科学涉及的学科较多，对数学的要求较高，为了使工科学生尽快具有所需的数学基础，同时考虑到读者使用本教材时查阅的方便，教材中安排了数学分析、泛函分析、微分流形等相关

内容，给出了一些定理的证明，并对一些较为抽象的数学定义进行了更加深入和具体的注释和说明。需要提醒的是：由于非线性动力学仍处于发展阶段，一些现象的定义尚在完善中，一些非线性动力学术语的翻译尚未统一，因此书中主要根据我们的理解对其进行定义，并列出其原始的英语术语。

笔者结合自己的经历，深感在读书期间，扎实地阅读、理解一些基础课程知识，扩大视野，远比一些急功近利的“小创新”重要，厚积薄发，打下良好的基础，终生受益。同时，也希望通过非线性动力学的学习和研究，启发培养学生的探索、发现自然科学中新现象的思想方法，领悟怀疑、批判是科学研究的真谛，并提高学生现代数学、力学等当今科学研究中的“基频”理论水平，只有深刻理解和掌握了精美数学语言的人，才能在浩瀚的非线性科学中自如地畅游。从而使得研究生在选题时能够结合非线性理论，在所从事的专业中，洞察到一些新颖的、前人未曾探索的问题，或者能够对一些古老的基础问题另辟蹊径。

本教材第 3 章的混沌系统，以及第 5 章的非线性小世界网络动力学是由刘雁博士完成，第 5 章的部分应用内容是由我们课题组的老师、博士生、硕士生完成，他们是：孙旭、康伟、任晟、雷鹏飞、李凯伦、梅冠华、康真、陈丽莺、许丽娜、苏哲、周志宏、党南南、汪小杰、梁腾飞、冯培华、陈嘉辉、王佐等。本书是在作者为研究生开设的《非线性动力系统的运动稳定性、分岔及其数值方法》课程讲义的基础上整理完成的，感谢教学过程中选学过该课程的所有同学们，正是他们求知的热情、积极的思考和提问，激励我不断完善讲义，最终完成了此教材的编写。

限于作者的水平，并且非线性科学仍在飞速发展，一些新的理论和数值分析方法不断涌现，因此本书不足之处在所难免，恳请读者不吝指正，不胜感谢。

张家忠

2010 年 6 月

目　录

第 1 章　非线性动力系统的定性描述

本章主要介绍用以描述非线性动力系统的有关基础理论和概念，其中包括：微分方程和映射的理论、运动稳定性的数学描述、方程解的结构稳定性和分岔、不变流形及其性质、中心流形、奇点的种类、极限环和吸引子等基础内容，作为后面深入学习非线性科学的基础。

1.1　动力系统的数学定义

对动力系统(dynamic system)的研究起源于 19 世纪，当时 Poincaré 等人通过对经典力学和微分方程稳定性理论的研究，提出了动力学系统的概念。但直到 20 世纪 60 年代，由于微分几何和微分拓扑研究的发展，动力系统理论才开始取得重大的发展。

一般讲，动力系统理论主要是研究系统随时间演化的全局完整性行为。对于一般的系统(如由振动理论描述的动力学方程等)，其状态在相空间中按照一定的规律演化，而该类规律一般由微分方程、差分方程等描述，为了解系统的行为变化特性，需要研究从一切可能的初始状态出发的系统状态的各种演化行为(例如平衡状态、周期解、长时间行为等)以及它们的相互关系和稳定性。

根据目前所分析的对象，动力系统可以分为两大类：连续的和离散的，分别由微分方程和映射描述。在讲述动力系统之前，首先给出微分方程和映射的概念及相关理论，以便更加深入地理解和分析动力系统。

1.1.1　微分方程

对于关于时间连续的演化系统，其演化过程一般可以由一系列常微分方程(关于时间的导数)描述。请注意：在实际中，许多动力系统都具有空间分布特征，即其演化过程应由偏微分发展方程描述，作为基础教材，本章仅讨论常微分方程描述的动力系统。在后面的章节中，将介绍非线性动力学理论在流体动力学中(由非线性偏微分发展方程描述)的应用。

考虑定义在区域 $D\subseteq\mathbf{R}^n$ 上的一阶常微分方程

$$\dot{x} = f(x) \qquad x \in \mathbf{R}^n, t \in \mathbf{R} \tag{1.1.1}$$

对于方程(1.1.1)描述的系统 S,其中 $x\in\mathbf{R}^n$,$f(x)\in\mathbf{C}^1(\mathbf{R}^n,\mathbf{R}^n)$是一系列线性或非线性函数;设 $f(x)$在定义域 D 上连续,且满足解的唯一性条件,每个解的存在区间都是$(-\infty,+\infty)$,即方程(1.1.1)是随时间演变的系统,称之为古典动力系统。

对于高阶常微分方程,只要把各阶导数当作新的变量,其同样可以化为一阶常微分方程组。如对于二阶常微分方程

$$\ddot{x}=f(x,\dot{x})\qquad x\in\mathbf{R}^n,t\in\mathbf{R}\tag{1.1.2}$$

令 $y=\dot{x}$,则上式便可化为一阶常微分方程组

$$\begin{cases}\dot{x}=y\\ \dot{y}=f(x,y)\end{cases}\qquad x\in\mathbf{R}^n,t\in\mathbf{R}\tag{1.1.3}$$

例 1.1.1 对于常见的机械振动控制方程,以单自由度弹簧-质量块组成的有阻尼受迫振动系统为例,其通式为

$$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=f(t)\tag{1.1.4}$$

该方程通过下列变换:$y=\dot{x}$,将转化为关于时间一阶导数的微分方程

$$\begin{cases}\dot{x}=y\\ \dot{y}=\dfrac{1}{m}[f(x)-cy-kx]\end{cases}\tag{1.1.5}$$

即形同方程(1.1.1)所描述的动力系统。

如果上列方程中的函数 f 是线性的,即满足叠加性,则所描述系统为线性动力系统(linear dynamic system);否则,为非线性动力系统(nonlinear dynamic system)。如果函数 f 中不显含时间变量,则所描述系统称为自治动力系统(autonomous dynamic system);否则,称为非自治动力系统(non-autonomous dynamic system)。

对于非自治动力系统

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=f(x,t),\quad x(0)=x_0\tag{1.1.6}$$

可以通过下列的变换转化为自治动力系统

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=f(x,\theta)\\ \dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=1\end{cases}\qquad 且有\begin{cases}x(t_0)=x_0\\ \theta(t_0)=t_0\end{cases}\tag{1.1.7}$$

如果方程(1.1.6)是一周期性的非自治动力系统,即:存在 $T>0$,使得 $f(x,t+T)=f(x,t)$,$\forall t\in\mathbf{R}$,则通过下面的变换转化为周期性的自治动力系统

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f\left(x, \dfrac{\theta T}{2\pi}\right) \\ \dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \dfrac{2\pi}{T} \end{cases} \quad \text{且有} \begin{cases} x(t_0) = x_0 \\ \theta(t_0) = 2\pi t_0 / T \end{cases} \tag{1.1.8}$$

这样方程(1.1.6)就转化为以 2π 为周期的动力系统。

下面对线性齐次常系数微分动力系统进行详细地介绍,因为此类方程在非线性动力学问题的分析中经常用到。

$$\dot{x} = \boldsymbol{A}x \qquad x \in \mathbf{R}^n, t \in \mathbf{R} \tag{1.1.9}$$

其中 $\boldsymbol{A}$ 为 $n \times n$ 常值矩阵。

在高等数学教材中,对于标量形式的微分方程 $\dot{x}=ax$,a 为任意常数,它的解为 $x(t)=\mathrm{e}^{at}c$,c 为与初时条件有关的常数。事实上,线性齐次常系数微分方程(1.1.9)(向量形式)同样有类似的解。为此,下面引入矩阵指数函数。

定义 1.1.1　设 $\boldsymbol{A}$ 是一 $n \times n$ 的常值矩阵,则其所对应的矩阵指数函数为

$$\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t} = I + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \boldsymbol{A}^k \tag{1.1.10}$$

其中 $t \in (-\infty, +\infty)$。

定理 1.1.1　令 $J \in (-\infty, +\infty)$,并设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 皆为 $n \times n$ 常值矩阵,则存在下列性质:

(1) $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t_1}\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t_2} = \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(t_1+t_2)}$, $\quad \forall t_1, t_2 \in J$;

(2) 若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$,则 $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}\mathrm{e}^{\boldsymbol{B}t} = \mathrm{e}^{(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})t}$, $\quad \forall t \in J$;

(3) $(\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t})^{-1} = \mathrm{e}^{-\boldsymbol{A}t}$, $\quad t \in J$;

(4) 如果 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{BT}$,$\boldsymbol{T}$ 为一个 $n \times n$ 非奇异常值矩阵,则 $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t} = \boldsymbol{T}^{-1}\mathrm{e}^{\boldsymbol{B}T}\boldsymbol{T}$;

(5) 如果 $\boldsymbol{A}=\mathrm{diag}(\boldsymbol{A}_1, \cdots, \boldsymbol{A}_s)$, 则 $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t} = \mathrm{diag}(\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}_1 t}, \cdots, \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}_s t})$, 其中 $\boldsymbol{A}_i$ 是 $n_i \times n_i$ 矩阵,$i=1,\cdots,s$, 且 $n_1+\cdots+n_s=n$。

则进一步,方程(1.1.9)满足初时条件 $x(t_0)=x_0$ 的特解为

$$x = \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(t-t_0)} x_0 \tag{1.1.11}$$

1.1.2　映射

一般地,设 X,Y 是两个集合,如果按某种对应法则 f,对于 X 中的每一个元素,在 Y 中都有唯一的元素与之对应,那么这样的对应称为映射,记作 $f: X \to Y$。在详细介绍映射之前,首先给出矢量空间中的一些基本概念。

作为回顾,在直线 $\mathbf{R}^1$ 上两点 x_1 与 x_2 ($x_1 \neq x_2$)之间的距离,通常表示为:$d(x_1, x_2) = |x_2 - x_1|$。在一元函数极限中,用 $|x_n - A|$,$n=1,2,3,\cdots$,表示动点与定点 A 之间距离的变化。

而平面($\mathbf{R}^2$)上两点之间的距离通常为:$d(M_1,M_2)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$,(其中$(x_1,y_1)$和$(x_2,y_2)$分别为$M_1,M_2$的坐标)。

在三维空间($\mathbf{R}^3$)中,设$M_1(x_1,y_1,z_1)\in\mathbf{R}^3$,$M_2(x_2,y_2,z_2)\in\mathbf{R}^3$,则两点间的距离为:$d(M_1,M_2)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$,分析以上从解析几何中引出的距离,不难发现它们都具有三个基本性质:

(1) 正定性:$d(M_1,M_2)\geqslant 0$,$d(M_1,M_2)=0\Leftrightarrow M_1=M_2$;

(2) 对称性:$d(M_1,M_2)=d(M_2,M_1)$;

(3) 三角不等式:$d(M_1,M_3)\leqslant d(M_1,M_2)+d(M_2,M_3)$。

定义 1.1.2 若集合 X 中任意两个元素 x,y 都对应于一个实数 $d(x,y)$,使得

(1) $d(x,y)\geqslant 0$,当且仅当 $x=y$ 时,$d(x,y)=0$;

(2) $d(x,y)=d(y,x)$;

(3) $d(x,z)\leqslant d(x,y)+d(y,z)$

则称 X 为距离空间,记作$\langle X,d\rangle$,称 $d(x,y)$为 x 与 y 之间的距离。

对于距离的概念,其在动力系统数值逼近的误差估计中非常重要,如:在相空间定义一合适的距离,即一种度量,可使得二阶耗散动力系统问题的误差分析成为可能。

定义 1.1.3 如果线性空间 X 上赋有距离 $d(\cdot,\cdot)$,使得元素的加法和数乘按距离所确定的极限是连续的,即:

(1) $d(x_n,x)\to 0$,$d(y_n,y)\to 0\Rightarrow d(x_n+y_n,x+y)\to 0$;

(2) $d(x_n,x)\to 0\Rightarrow d(\alpha x_n,x)\to 0$,对任意数 $\alpha\in K$ (K 为数域);

(3) $\alpha_n\to\alpha$,$x\in X\Rightarrow d(\alpha_n x,\alpha x)\to 0$。

那么 X 称为线性距离空间。

回想最初的实数定义,并不包含无理数,使得实数这一工具无法描述现实中的一些尺度,如:边长为 1 的正方形,其对角线为$\sqrt{2}$。目前的实数定义,就是把有理数集加以完备化,即将无理数集“增加”于实数中。事实上,只有完备化的空间,极限运算才能够进行,即经典分析的技巧才可以使用。因此,对各种空间常要考虑其完备性。

定义 1.1.4 设$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$是距离空间$\langle X,d\rangle$中的序列,如果对任给的 $\varepsilon>0$,都有自然数 N,当 $n,m\geqslant N$ 时,使得:$d(x_n,x_m)<\varepsilon$,则称$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$为 Cauchy 序列。但命题的逆不真。

定义 1.1.5 若距离空间$\langle X,d\rangle$中任何 Cauchy 序列都收敛,则称$\langle X,d\rangle$为完备的距离空间。

换言之,某空间的完备化,就是将空间中序列的极限值“增加补充”到该空间