21世纪普通高等教育规划教材

高等数学

上册

刘勇　成志新　主编

化学工业出版社

本书分上、下两册.上册包括预备知识、一元微积分和向量代数与空间解析几何，下册包括多元微积分、级数理论与微分方程.本书内容精练、篇幅紧凑，用通俗易懂的语言表达基本的数学概念与方法，通过较多的例题阐明用数学方法处理一些应用问题的思路，启发学生学习高等数学的兴趣，使本书更具吸引性和可读性.

本书可作为高等理工科、特别是师范院校非数学类专业的教材，也可供其他学习高等数学的广大读者作为教材或教学参考书.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学(上、下册)/刘勇，成志新主编.—北京：化学工业出版社，2010.7

21世纪普通高等教育规划教材

ISBN 978-7-122-08290-9

Ⅰ.高… Ⅱ.①刘…②成… Ⅲ.高等数学-高等学校-教材Ⅳ.O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2010)第101811号

责任编辑：袁俊红　唐旭华　杨　宇　　　装帧设计：韩　飞

责任校对：陈　静

出版发行：化学工业出版社（北京市东城区青年湖南街13号　邮政编码100011）

印　　刷：北京市振南印刷有限责任公司

装　　订：三河市宇新装订厂

850mm×1168mm　1/32　印张13¾　字数355千字　2010年8月北京第1版第1次印刷

购书咨询：010-64518888(传真：010-64519686)　售后服务：010-64518899

网　　址：http://www.cip.com.cn

凡购买本书，如有缺损质量问题，本社销售中心负责调换。

定　　价：30.00元

前 言

高等数学是我国高校理工类各专业的一门重要基础课程,作为一种多学科共同使用的、精确的科学语言,它对学生后续课程的学习和思维素质的培养起着重要的作用.

近年来我国高等教育大幅度扩大招生规模,使得需要学习高等数学的学生人数与日俱增.与之相比,高等师范院校的高等数学教材建设相对缓慢.为此,在化学工业出版社的组织协助下,盐城师范学院的教师着手编写了这本适合上述学生使用的高等数学教材.

在编写过程中,我们较充分地交流了彼此的教学心得与体会,分析高等理工科,特别是师范院校学生的特点,认为他们主要是通过这一课程的学习,掌握高等数学中最基本的概念与思想方法,初步学会用数学方法去分析处理各类应用问题.因此,在编写这部教材时我们尽可能地用直观的、通俗的方式表述数学基本概念,贯彻少而精的原则,多配备例题,以阐明分析问题的思路与解题方法为主,便于学生理解并掌握基本概念与方法.

本书分上下两册.上册分为三部分,内容包括预备知识、一元微积分、向量代数与空间解析几何;下册分为两部分,内容包含多元微积分、级数理论与微分方程.少数带“*”的节与段落可以根据所使用专业的需要进行取舍.每节后附有适量的练习题,练习题分为A、B两组,A组为基础题,B组为提高题,此外每章后附有综合练习题,希望能满足不同学生的学习需要.

本书由刘勇、成志新主编,孙映成、王参军担任副主编.其中第一部分由宝鸡文理学院王参军执笔,第二、五部分由盐城师范学院刘勇执笔,第三、四部分由盐城师范学院成志新执笔,练习题由盐城师范

学院孙映成执笔，此外，参加本书编写的还有：戴风明、陆斌、王超、左飞、董秀珍，全书由刘勇统稿.

本书的出版得到了江苏省教育厅自然科学基金、盐城师范学院高层次人才资金的资助；在本书的编写过程中，盐城师范学院教务处、数学科学学院的领导做了大量的协调工作，推动了本书的写作；此外，盐城师范学院数学科学学院高等数学教研室的全体老师为本书的出版付出了辛勤的劳动，在此一并表示衷心的感谢.

由于编者学识和阅历所限，加之编写时间仓促，书中不当和疏漏之处在所难免，敬请各位同行和广大读者不吝赐教.

编者

2010 年 5 月

上册目录

第1部分　预备知识

第 2 部分 一元微积分

第 3 部分　向量代数与空间解析几何

第1部分　预备知识

第1章　集　　合

§1.1　集合概念

1.1.1　集合概念

定义 1.1.1　具有某种特定性质的事物的总体称为**集合**(简称**集**),而组成集合的事物称为集合的**元素**.

下面举几个集合的例子.

【例 1.1.1】　全体自然数.

【例 1.1.2】　某学校的全体学生.

【例 1.1.3】　方程 $x^2+2x+1=0$ 的一切根.

习惯上,我们用带标号或不带标号的大写字母表示集合,如 A,B,M,X_i 等,用带标号或不带标号的小写字母表示集合中的元素,如 a,b,m,x_i 等.

对于集合应该注意以下几点.

① 集合中的元素是确定的,即对于集合 A,任一元素 a 或属于此集合,或不属于此集合,两者必居其一.若 a 是集合 A 的元素,则用 $a\in A$ 表示,若 a 不是集合 A 的元素,则用 $a\notin A$ 表示.

② 集合中的每个元素都不相同,即集合 $A=\{a,b,c,d,d\}$ 与集合 $B=\{a,b,c,d\}$ 是一样的.

③ 集合中的每个元素排列顺序不唯一,即集合 $A=\{a,b,c,d\}$ 与集合 $B=\{b,a,d,c\}$ 是一样的.

1.1.2 集合的表示方法

(1) 列举法

把集合的全体元素一一列举出来. 例如 $A=\{a,b,c,d,e,f,g\}$, $B=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$.

(2) 描述法

若集合 M 是由具有某种性质 P 的元素 x 的全体所组成,则 M 可表示为 $M=\{x|x$ 具有性质 $P\}$. 例如,单位圆周上的点所组成的集合可表示为 $M=\{(x,y)|x^2+y^2=1$, 且 $x,y\in\mathbf{R}\}$.

1.1.3 集合的类型

定义 1.1.2 元素的个数只有有限个的集合,称为**有限集**. 元素的个数是无限个的集合,称为**无限集**. 不含任何元素的集合称为空集,记为$\varnothing$. 与空集相对应的集合是全集,一个集合如果包含所研究内容的所有元素,称此集合为**全集**,记为 E.

【例 1.1.4】 某学校的全体学生构成的集合是有限集.

【例 1.1.5】 自然数集 $\mathbf{N}$ 是无限集.

【例 1.1.6】 $A=\{x|x^2+1=0$ 且 $x\in\mathbf{R}\}$是空集.

1.1.4 几个数集

$\mathbf{N}$ 表示所有自然数构成的集合,称为**自然数集**.

$\mathbf{N}=\{0,1,2,\cdots,n,\cdots\}$, $\mathbf{N}^+=\{1,2,\cdots,n,\cdots\}$.

$\mathbf{R}$ 表示所有实数构成的集合,称为**实数集**.

$\mathbf{Z}$ 表示所有整数构成的集合,称为**整数集**.

$\mathbf{Z}=\{\cdots,-n,\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots,n,\cdots\}$.

$\mathbf{Q}$ 表示所有有理数构成的集合,称为**有理数集**.

$$\mathbf{Q}=\left\{\frac{q}{p}\,\middle|\,q\in\mathbf{Z},p\in\mathbf{N}^+,\text{且 } p \text{ 与 } q \text{ 互为质数}\right\}.$$

§1.2 集合间的关系与运算

1.2.1 集合间的关系

集合间一般有两种关系:“相等”关系与“包含”关系.

定义 1.2.1 对于两个集合 A 与 B,如果集合 A 的任一个元素

都是集合 B 的元素，则称 A 是 B 的**子集**，记为 $A\subset B$(读作 A 包含于 B)或 $B\supset A$(读作 B 包含 A).

定义 1.2.2 如果集合 A 与集合 B 互为子集，即 $A\subset B$ 且 $B\subset A$，则称集合 A 与集合 B **相等**，记作 $A=B$.

定义 1.2.3 若 $A\subset B$ 且 $A\neq B$，则称 A 是 B 的**真子集**，记作 $A\subsetneqq B$. 例如，$\mathbf{N}\subsetneqq\mathbf{Z}\subsetneqq\mathbf{Q}\subsetneqq\mathbf{R}$.

定理 1.2.1 对任一集合 A，必有 $\varnothing\subset A\subset E$.

1.2.2 集合的运算

定义 1.2.4 设 A,B 是两个集合，由所有属于 A 或者属于 B 的元素组成的集合称为 A 与 B 的**并集**(简称**并**)，记作 $A\cup B$，即

$$A\cup B=\{x\mid x\in A \text{ 或 } x\in B\}.$$

【例 1.2.1】 $A=\{1,2,3,4\}$，$B=\{3,4,5,6\}$，则

$$A\cup B=\{1,2,3,4,5,6\}.$$

定义 1.2.5 设 A、B 是两个集合，由所有既属于 A 又属于 B 的元素组成的集合称为 A 与 B 的**交集**(简称**交**)，记作 $A\cap B$，即

$$A\cap B=\{x\mid x\in A \text{ 且 } x\in B\}.$$

【例 1.2.2】 $A=\{1,2,3,4\}$，$B=\{3,4,5,6\}$，则

$$A\cap B=\{3,4\}.$$

定义 1.2.6 设 A、B 是两个集合，若 $A\cap B=\varnothing$，则称 A 与 B 是**分离的**.

定义 1.2.7 设 A、B 是两个集合，由所有属于 A 而不属于 B 的元素组成的集合称为 A 与 B 的**差集**(简称**差**)，记作

$$A\backslash B，即 A\backslash B=\{x\mid x\in A \text{ 且 } x\notin B\}.$$

【例 1.2.3】 $A=\{1,2,3,4\}$，$B=\{3,4,5,6\}$，则 $A\backslash B=\{1,2\}$.

定义 1.2.8 称 $E\backslash A$ 为集合 A 的**余集**或**补集**，记作 A^c.

定义 1.2.9 设 A、B 是两个集合，由属于 A 而不属于 B 的元素或者由属于 B 而不属于 A 的元素组成的集合称为 A 与 B 的**对称差**，记作 $A\Delta B$，即

$$A\Delta B=(A\backslash B)\cup(B\backslash A).$$

【例 1.2.4】 $A=\{1,2,3,4\}, B=\{3,4,5,6\}$，则

$$A\Delta B=\{1,2,5,6\}.$$

1.2.3 集合运算的法则

设 A,B,C 为任意三个集合，则

① 交换律 $A\cup B=B\cup A, A\cap B=B\cap A$；

② 结合律 $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C), (A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$；

③ 分配律 $(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C), (A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$；

④ 对偶律 $(A\cup B)^c=A^c\cap B^c, (A\cap B)^c=A^c\cup B^c$.

$(A\cup B)^c=A^c\cap B^c$ 的证明：

$x\in(A\cup B)^c\Leftrightarrow x\notin A\cup B\Leftrightarrow x\notin A$ 且 $x\notin B\Leftrightarrow x\in A^c$ 且 $x\in B^c\Leftrightarrow x\in A^c\cap B^c$，所以

$$(A\cup B)^c=A^c\cap B^c.$$

1.2.4 幂集、序对、直积（笛卡儿乘积）

定义 1.2.10 由集合 A 的所有子集所组成的集合称为集合 A 的**幂集**，记为 2^A 或 $\rho(A)$.

【例 1.2.5】 $A=\{1,2\}$，则 $\rho(A)=\{\varnothing,\{1\},\{2\},\{1,2\}\}$.

定理 1.2.2 若集合 A 是含有 n 个元素的有限集合，则 $\rho(A)$ 是含有 2^n 个元素的集合.

定义 1.2.11 由两个元素 x 和 y 按照一定顺序排列成的二元组称为一个**有序对**或**序偶**，记为 (x,y).

有序对 (x,y) 具有以下性质：

① 当 $x\neq y$ 时，$(x,y)\neq(y,x)$；

② $(x,y)=(u,v)$ 的充要条件是 $x=u$ 且 $y=v$.

定义 1.2.12 设 A,B 是两个集合，在集合 A 中任意取一个元素 x，在集合 B 中任意取一个元素 y，组成一个有序对 (x,y)，把这样的有序对作为新元素，它们的全体组成的集合称为集合 A 与集合 B 的**直积**或**笛卡儿乘积**，记为 $A\times B$，即

$$A\times B=\{(x,y)\mid x\in A \text{ 且 } y\in B\}.$$

例如，$\mathbf{R}\times\mathbf{R}=\{(x,y)\mid x\in\mathbf{R}\text{ 且 }y\in\mathbf{R}\}$，即为 xOy 面上全体点的集合，$\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ 通常记作 $\mathbf{R}^2$.

直积具有以下性质：

① 对任意集合 A 有 $A\times\varnothing=\varnothing$，$\varnothing\times A=\varnothing$；

② 直积不满足交换律，即 $A\times B\neq B\times A$（当 $A\neq\varnothing$ 且 $B\neq\varnothing$ 且 $A\neq B$ 时）；

③ 直积不满足结合律，即 $(A\times B)\times C\neq A\times(B\times C)$（当 $A\neq\varnothing$ 且 $B\neq\varnothing$ 且 $C\neq\varnothing$ 时）；

④ 直积对并和交运算满足分配律，即

$$A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$$

$$(B\cup C)\times A=(B\times A)\cup(C\times A)$$

$$A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$$

$$(B\cap C)\times A=(B\times A)\cap(C\times A)$$

⑤ $A\subset C$ 且 $B\subset D\Rightarrow A\times B\subset C\times D$.

【例 1.2.6】 设 A,B,C,D 为任意集合，判断下列命题是否正确.

① $A\times B=A\times C\Rightarrow B=C$；

② $A\backslash(B\times C)=(A\backslash B)\times(A\backslash C)$；

③ $A=B$ 且 $C=D\Rightarrow A\times C=B\times D$；

④ 存在集合 A，使得 $A\subset A\times A$.

解 ①不一定正确，当 $A=\varnothing$，$B=\{1\}$，$C=\{2\}$ 时有 $A\times B=\varnothing=A\times C$，但 $B\neq C$.

② 不一定正确，当 $A=B=\{1\}$，$C=\{2\}$ 时有

$$A\backslash(B\times C)=\{1\}\backslash\{(1,2)\}=\{1\}$$

$$(A\backslash B)\times(A\backslash C)=\varnothing\times\{1\}=\varnothing.$$

③ 正确. 根据等量代换原理可得.

④ 正确. 当 $A=\varnothing$ 时有 $A\subset A\times A$ 成立.

§1.3 区间和邻域

定义 1.3.1 设 a 和 b 都是实数,且 $a<b$,称数集

$$\{x|a<x<b\}$$

为**开区间**,记为(a,b),即

$$(a,b)=\{x|a<x<b\}.$$

类似地有

$$[a,b]=\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$$

称为**闭区间**,

$$[a,b)=\{x|a\leqslant x<b\},$$

$$(a,b]=\{x|a<x\leqslant b\}$$

称为**半开区间**. 这里 a 和 b 称为区间(a,b),$[a,b]$,$[a,b)$,$(a,b]$的端点. 以上这些区间都称为**有限区间**. 数 $b-a$ 称为区间的长度.

引进记号$+\infty$(正无穷大)及$-\infty$(负无穷大),可类似表示无限区间,例如

$$[a,+\infty)=\{x|x\geqslant a\},$$

$$(a,+\infty)=\{x|x>a\},$$

$$(-\infty,b]=\{x|x\leqslant b\},$$

$$(-\infty,b)=\{x|x<b\},$$

$$(-\infty,+\infty)=\{x||x|<+\infty\}.$$

定义 1.3.2 以点 a 为中心的任何开区间称为点 a 的**邻域**,记作 $U(a)$. 设 δ 是一正数,则称开区间$(a-\delta,a+\delta)$为点 a 的 δ 邻域,记作 $U(a,\delta)$,即

$$U(a,\delta)=\{x|a-\delta<x<a+\delta\}=\{x||x-a|<\delta\},$$

其中点 a 称为邻域的中心,δ 称为邻域的半径(图 1-1).

定义 1.3.3 点 a 的 δ 邻域去掉中心 a 后,称为点 a 的**去心 δ 邻域**,记作 $\mathring{U}(a,\delta)$,即

$$\mathring{U}(a,\delta)=\{x|0<|x-a|<\delta\}.$$

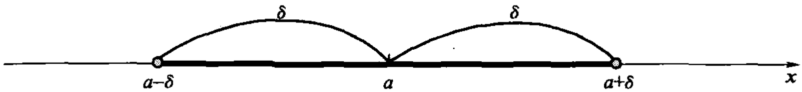

图 1-1

习题 1

[A 组]

1. 设 $A=\{a,b,c\}$，下面式子中哪些是正确的？

   (1) $\varnothing\in A$；(2) $a\notin A$；(3) $\{a\}<A$；(4) $b\in A$；(5) $b\subset A$.

2. 设 $A=\{a,b\}$，$B=\{b,c\}$，$C=\{c,d\}$. 求 $A\cup B$，$A\cap B$，$A\backslash B$，$A\Delta B$，$A\times B$.

3. 设全集为 $\mathbf{R}$，$A=\{x\mid x\leqslant b\}$，求 $A\cap\varnothing$，$A\cup\varnothing$，$A\cap\mathbf{R}$，$A\cup\mathbf{R}$，A^c，$A\cap A^c$，$A\cup A^c$.

4. 用区间表示适合下列不等式的变量 x 的变化范围：

   (1) $|x|<3$；(2) $|x-2|\leqslant 1$；(3) $0<|x-1|<1$；(4) $|x-2|>0.1$.

5. 求邻域半径 δ，使 $x\in U(1,\delta)$ 时，$|2x-2|<\varepsilon$. 又若 ε 分别为 0.1，0.2 时，上述 δ 各为多少？

[B 组]

1. 设 $A=\{x\mid |x|\leqslant 1\}$，$B=\{x\mid x^2+4x+3<0\}$. 求集合 C，使其满足下列条件：

   (1) $C\subseteq(A\cup B)\cap C$；(2) C 有两个元素；(3) $C\cap B\neq\varnothing$.

2. 已知 $A=\{x\mid |x-a|<4\}$，$B=\{x\mid |x-2|>3\}$ 且 $A\cup B=\mathbf{R}$，求 a 的取值范围.

3. 已知集合 $M=\{(x,y)\mid x-y=0\}$，$N=\{(x,y)\mid x^2-y^2=0\}$，求 $M\cap N$.

4. 已知集合 $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$，求该集合具有下列性质的子集个数：每个子集至少有 2 个元素，且每个子集中任意两个元素差的绝对值大于 1.

综合习题 1

1. 已知集合 $M=\{x\mid 2x^2-5x-3=0\}$，$N=\{x\mid mx=1\}$，若 $N\subsetneqq M$，求实数 m 的取值组成的集合.

2. 已知 $\mathbf{R}$ 为实数集，集合 $A=\{x\mid x^2-3x+2\leqslant 0\}$，若 $B\cup A^c=\mathbf{R}$，$B\cap A^c=\{x\mid 0<x<1$ 或 $2<x<3\}$，求集合 B.

3. 已知函数 $f(x)=x^2+px+q$，且集合 $A=\{x\mid x=f(x)\}$，$B=\{x\mid f(f(x))=$

第 2 章　映射与函数

§2.1　映　射

2.1.1　映射的概念

定义 2.1.1　设 X,Y 是两个非空集合,如果按照某种法则 f,使得对于集合 X 中每个元素 x 在集合 Y 中都有唯一的元素 y 与之对应,则称 f 为从 X 到 Y 的**映射**,记作

$$f:X\to Y,$$

其中 y 称为元素 x(在映射 f 下)的**像**,并记作 $f(x)$,即

$$y=f(x),$$

而元素 x 称为元素 y(在映射 f 下)的一个**原像**;集合 X 称为映射 f 的**定义域**,记作 D_f,即 $D_f=X$;X 中所有元素的像所组成的集合称为映射 f 的**值域**,记为 R_f 或 $f(X)$,即

$$R_f=f(X)=\{f(x)\mid x\in X\}.$$

映射的定义中需要注意的问题:

① 构成一个映射必须具备以下三个要素:集合 X,即定义域 $D_f=X$;集合 Y,即值域的范围:$R_f\subset Y$;对应法则 f,使对每个 $x\in X$,有唯一确定的 $y=f(x)$与之对应.

② 对每个 $x\in X$,元素 x 的像 y 是唯一的;而对每个 $y\in R_f$,元素 y 的原像不一定是唯一的;映射 f 的值域 R_f 是 Y 的一个子集,即 $R_f\subset Y$,不一定 $R_f=Y$.

【例 2.1.1】　设 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$,对每个 $x\in\mathbf{R}$,$f(x)=x^2$. 显然,f 是一个映射,f 的定义域 $D_f=\mathbf{R}$,值域 $R_f=\{y\mid y\geqslant 0\}$,它是 $\mathbf{R}$ 的一个真子集. 对于 R_f 中的元素 y,除 $y\neq 0$ 外,它的原像不是唯一的. 如$y=4$

的原像就有 $x=2$ 和 $x=-2$ 两个.

【例 2.1.2】 设 $X=\{(x,y)\mid x^2+y^2=1\}$,$Y=\{(x,0)\mid |x|\leqslant 1\}$,$f:X\to Y$,对每个$(x,y)\in X$,有唯一确定的$(x,0)\in Y$ 与之对应. 显然 f 是一个映射,f 的定义域 $D_f=X$,值域 $R_f=Y$. 在几何上,这个映射表示将平面上一个圆心在原点的单位圆周上的点投影到 x 轴上的区间$[-1,1]$上.

【例 2.1.3】 设 $f:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$,对每个 $x\in[0,+\infty)$,$f(x)=x^2$. f 是一个映射,f 的定义域 $D_f=[0,+\infty)$,值域 $R_f=[0,+\infty)$.

定义 2.1.2 设 f 是从集合 X 到集合 Y 的映射,若 $R_f=Y$,即 Y 中任一元素 y 都是 X 中某元素的像,则称 f 为 X 到 Y 上的映射或**满射**;若对 X 中任意两个不同元素 $x_1\neq x_2$,它们的像 $f(x_1)\neq f(x_2)$,则称 f 为 X 到 Y 的**单射**;若映射 f 既是单射,又是满射,则称 f 为**一一映射(或双射)**.

上面例 2.1.1 中的映射,既不是单射又不是满射;例 2.1.2 中的映射不是单射但是满射;例 2.1.3 中的映射既是单射又是满射,因此是一一映射.

2.1.2 逆映射与复合映射

定义 2.1.3 设 f 是 X 到 Y 的单射,则由定义,对每个 $y\in R_f$,有唯一的 $x\in X$ 适合 $f(x)=y$,于是,我们可定义一个从 R_f 到 X 的新映射 g,即

$$g:R_f\to X,$$

对每个 $y\in R_f$,规定 $g(y)=x$,这里 x 满足 $f(x)=y$. 这个映射 g 称为 f 的**逆映射**,记作 f^{-1},其定义域 R_f,值域 X.

根据上述定义可知,只有单射才存在逆映射. 所以例 2.1.3 中的映射 f 存在逆映射 f^{-1},

$$f^{-1}=\sqrt{x},x\in[0,+\infty),$$

其中定义域 $D_f^{-1}=[0,+\infty)$,值域 $R_f^{-1}=[0,+\infty)$.

定义 2.1.4 设有两个映射