21世纪高等院校经典教材同步辅导
ERSHIYISHIJIGAODENGYUANXIAOJINGDIANJIAOCAITONGBUFUDAO

经济应用数学基础（二）

线性代数

（人大四版）

全程导学及习题全解

主编 周冬梅 杨莉

$$A=\begin{array}{cc}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{pmatrix} & \begin{array}{c}\mathrm{I}\\ \mathrm{II}\\ \mathrm{III}\\ \mathrm{IV}\end{array} \\ \begin{array}{ccc}甲 & 乙 & 丙\end{array} & \end{array}$$

◆知识归纳 梳理主线重点难点

◆习题详解 精确解答教材习题

◆提高练习 巩固知识迈向更高

$$B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix}\begin{array}{c}甲\\ 乙\\ 丙\end{array},\quad C=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \\ [illegible] & [illegible] \\ c_{41} & c_{42} \end{pmatrix}\begin{array}{c}\mathrm{I}\\ \mathrm{II}\\ \mathrm{III}\\ \mathrm{IV}\end{array}$$

单位 单位 　　　　 总收入 总利润

价格 利润

中国时代经济出版社

21世纪高等院校经典教材同步辅导

ERSHIYISHIJIGAODENGYUANXIAOJINGDIANJIAOCAITONGBUFUDAO

经济应用数学基础（二）

线性代数

（人大四版）

全程导学及习题全解

主编　周冬梅　杨莉

◆知识归纳　梳理主线重点难点

◆习题详解　精确解答教材习题

◆提高练习　巩固知识迈向更高

中国时代经济出版社

图书在版编目(CIP)数据

线性代数(人大四版)全程导学及习题全解/周冬梅,杨莉主编. —北京:中国时代经济出版社,2009.9

(21世纪高等院校经典教材同步辅导)

ISBN 978－7－80221－935－9

Ⅰ.线… Ⅱ.①周…②杨… Ⅲ.线性代数—高等学校—教学参考资料 Ⅳ.0151.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2009)第131895号

线性代数(人大四版)全程导学及习题全解

周冬梅 杨莉 主编

出版者	中国时代经济出版社
地址	北京市西城区车公庄大街乙5号鸿儒大厦B座
邮政编码	100044
电话	(010)68320825(发行部) (010)88361317(邮购)
传真	(010)68320634
发行	各地新华书店
印刷	北京鑫海达印刷有限公司
开本	787×1092 1/16
版次	2009年9月第1版
印次	2009年9月第1次印刷
印张	17.25
字数	160千字
印数	1～5000册
定价	19.00元
书号	ISBN 978－7－80221－935－9

前言

本书是人大版经济类《线性代数》（第四版，赵树嫄主编）教材的配套学习辅导用书，本书紧扣教材结构，便于广大读者与教材配套使用。

由于线性代数这门学科具有应用广泛，相对于数学类其他分支而言难度小的特点，在研究生入学数学考试中得分相对容易．因此如何把握住这些特点是本书贯穿的主脉。全书易读、易学、易掌握。

本辅导教材由以下几个部分组成：

• **知识结构图**

以图的形式概括了每章的基本内容，列出各知识点及其之间的联系，可使读者清晰把握各章知识的脉络。建议读者在学习的过程中自己总结出类似的框图，这样可从更高的层次加深理解所学内容。

• **重要性质定理及注释**

针对每一章中的重点、难点以及容易混淆的知识点进行了系统、全面的归纳和总结，并对重要的性质定理、公式和结论进行了综述及必要的证明。这部分内容希望读者反复琢磨，仔细体会，可帮助广大同学对相应内容理解的更加透彻，整体把握各章的精髓。

• **典型例题解答**

尽可能归纳了这门课程所涉及的重要的、典型的代表题型，这些例题具有涉及内容广、题型多、技巧性强的特点。书中对这些精选的题目进行了详细的解答，部分题给出了多种解题方法和思路、分析或题后的总结，有助于读者更好的掌握和理解．且可一定程度上解决读者在具体解题时缺乏思路．难以下手的困难。

• **考研提高题**

考研题的难度与教材的例题、教材课后的练习题的难度有一定的差距．有明显的台阶．本书在这部分内容的处理．可使读者较容易的迈上这个台阶。

• **教材习题详解**

教材习题详解部分，对原教材中的全部习题做了详细解答，站在使用者的角度给出解题的每一个步骤，解题过程脉路清晰。

读者可将书中内容的学习分为两个层次。第一层次：通过重点掌握课后习题的解答，基本掌握《线性代数》课程所要求的基本内容（本、专科要求）；第二层次：对全书进行系统的学习，达到对所学内容融会贯通，进而达到强化考研的目的。因此本书既可以作为高等院校文科各专业在校学生及自考生学习《线性代数》课程的教学辅导材料和复习参考书，也可作为文科考研强化复习的指导书。

本书由周冬梅、杨莉等老师编写。由于编者水平有限以及编写的时间仓促，书中难免有疏漏、不妥之处，恳请各位专家及广大读者批评指正。

在本书的策划、编写、审稿过程中得到中国时代经济出版社的大力支持和热情帮助，在此表示衷心的感谢！对《线性代数》教材作者赵树嫄教授，表示衷心的谢意！

编者

2009 年 8 月

目　录

第一章　行列式

【知识结构图】

- 行列式
  - 二、三阶行列式
  - n 阶行列式
    - 排列
    - 逆序数
    - n 阶行列式的定义
  - 行列式的性质
  - 行列式按行(列)展开
    - 代数余子式
    - 按一行(列)展开
    - 按 k 行(列)展开
  - 克莱姆法则　　方程个数=未知量个数

【重要性质定理及注释】

一、逆序数

在一个 n 级排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 中，如果有较大的数 i_t 排在较小的数 i_s 的前面，则称 i_t 与 i_s 构成一个逆序；排列中逆序的总数，称为逆序数，记为 $N(i_1\ i_2 \cdots i_n)$.

$N(i_1\ i_2 \cdots\ i_n)$的求值，是找出 $i_t(t=1,\cdots,n)$不应该排在其它数前面的数目总和.

二、n 阶行列式的三种定义形式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{N(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

或
$$= \sum_{i_1 i_2 \cdots i_n} (-1)^{N(i_1 i_2 \cdots i_n)} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n}$$

或
$$= \sum (-1)^{N(i_1 i_2 \cdots i_n)+N(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \cdots a_{i_n j_n}$$

可以证明，三种形式是等同的.

n 阶行列式的定义须注意三点：

①共有 $n!$ 个项；②每一项是取自不同行不同列的 n 个元素的乘积；③每项的符号由对应的下标构成的排列的逆序数决定.

三、n 阶行列式的性质

1. $D=D^{\mathrm{T}}$.

2. 互换行列式的任意两行(或两列),行列式改变符号.

3. 行列式中某行(或列)的所有元素的公因子可以提到行列式符号外面.

推论:行列式中有一行(或列)的元素为零,行列式的值为零.

4. 行列式中有两行(或两列)元素成比例,则行列式值为零.

推论:若行列式中有两行(或两列)元素完全相同,行列式的值等于零.

5. 若行列式的某一行(或列)的元素都是两数之和,则此行列式可写成两个行列式之和,这两个行列式分别以这两组数作为该行(或列)的元素,其余各行(列)与原行列式相同.

推论:如果将行列式某一行(或列)的每个元素都写成 m 个数的和,则此行列式可以写成 m 个行列式的和.

6. 将行列式的某行(或列)的 k 倍加到另一行(或列),其值不变.

四、几个特殊的行列式

1. 一阶行列式 $|a|=a$.

2. 上三角形行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & * & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

注:“$*$”区元素为不全为 0 的数,“0”区元素全为 0.

$$\begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ * & & a_{2n-1} & \\ & \iddots & & \\ a_{n-12} & & 0 & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2n-1}\cdots a_{n1}$$

注:此行式的计算可参考例 2.1 的解法.

3. 下三角形行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ & & 0 & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ * & & & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

$$\begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & * & a_{2n-1} & \\ & \iddots & & \\ a_{n-12} & & 0 & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n} a_{2n-1} \cdots a_{n1}$$

4. 对角形行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & 0 \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$$

$$\begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & 0 & a_{2n-1} & \\ & \iddots & & \\ a_{n-12} & & 0 & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n} a_{2n-1} \cdots a_{n1}$$

5. 范德蒙行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1{}^2 & a_2{}^2 & a_3{}^2 & \cdots & a_n{}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1{}^{n-1} & a_2{}^{n-1} & a_3{}^{n-1} & \cdots & a_n{}^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (a_j - a_i)$$

五、行列式按行(或列)展开定理

1. 余子式和代数余子式

在 n 阶行列式 $D=|a_{ij}|$ 中划去元素 a_{ij} 所在的第 i 行及第 j 列，用余下来的元素按原来的次序所排成的 $n-1$ 阶行列式，称为元素 a_{ij} 的余子式，记作 M_{ij}. 而称

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

为元素 a_{ij} 的代数余子式.

2. 行列式按一行(或列)展开定理

$D=|a_{ij}|$ 等于它的任意一行(或列)各元素与其对应的代数余子式的乘积之和，即

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik}$$

$$D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}A_{kj}$$

$(i,j=1,2,\cdots,n)$

$D=|a_{ij}|$中的任意一行(或列)各元素与其它行(或列)对应元素的代数余子式的乘积之和等于零,即

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk}=0 \qquad (i\neq j)$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ki}A_{kj}=0 \qquad (i\neq j)$$

3.拉普拉斯定理

在n阶行列式$D=|a_{ij}|$中,任意取定k行(或列)$(1\leqslant k\leqslant n-1)$,则这$k$行(或列)中所有的$k$阶子式$M_i$(共有$C_n^k=s$个,记为$M_1,M_2,\cdots,M_s$)分别与它对应的代数余子式$A_i$乘积之和等于$D$,即

$$D=\sum_{i=1}^{s}M_iA_i=M_1A_1+M_2A_2+\cdots+M_sA_s$$

六.克莱姆法则

方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases}$$

称为n元非齐次线性方程组;当$b_1=b_2=\cdots=b_n=0$时,称为n元齐次线性方程组.则

$$n\text{个未知数}n\text{个方程}\begin{cases} \text{非齐次}\begin{cases} D\neq 0 & \text{唯一解 } x_1=\dfrac{D_1}{D}\cdots x_n=\dfrac{D_n}{D} \\ D=0 & \text{失效} \end{cases} \\ \text{齐　次}\begin{cases} D\neq 0 & \text{唯一零解} \\ D=0 & \text{有非零解(无穷多组解)} \end{cases} \end{cases}$$

其中$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$为系数行列式,$D_j(j=1,2,\cdots,n)$是将行列式$D$中第$j$列元素换成常数$b_1,b_2,\cdots b_n$,其余元素不变所得到的行列式.

七、应注意的问题

1.对角线法则只适合计算二阶、三阶行列式的值;

2.为防止计算错误,三阶行列式可采用如下形式:即主对角元素乘积减逆对角元

素乘积：

$$\begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$-a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

3. 行列式计算，一般情况下，解题思路是设法化成上(下)三角形行列式或对角行列式；

4. 克莱姆法则只适合解决方程个数＝未知量个数且 $D\neq 0$；齐次线性方程组总有解，至少有零解.

【典型例题解答】

例 1.1 求下列排列的逆序数，并确定它们的奇偶性.

(1) 13542 (2) $n(n-1)\cdots 321$

解：(1) 逆序为 32；54，52；42

$\therefore N(13542)=1+2+1=4$

(2) 数 n 构成的逆序数有 $n-1$ 个：

$n(n-1), n(n-2), \cdots, n3, n2, n1$

数 $n-1$ 构成的逆序有 $n-2$ 个：

$(n-1)(n-2), (n-1)(n-3), \cdots, (n-1)2, (n-1)1$

……

同理，数 3 构成的逆序有 2 个：32，31；数 2 构成的逆序有 1 个：21.

所以 $N[n(n-1)\cdots 321]=(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1$

$$=\frac{n(n-1)}{2}$$

当 $n=4k, 4k+1, 4k+2, 4k+3$ 时，分别有 $\frac{n(n-1)}{2}=2k(4k-1), 2k(4k+1), (2k+1)(4k+1), (2k+1)(4k+3)$.

故当 $n=4k, 4k+1$ 时为偶排列；

$n=4k+2, 4k+3$ 时为奇排列.

其中 k 为非负整数.

例 1.2 证明：n 阶行列式 $|a_{ij}|$ 中等于零的元素个数大于 n^2-n，则此行列式 $|a_{ij}|=0$.

证明：因为 n 阶行列式共有 n 行 n 列，即 $|a_{ij}|$ 中元素的个数为 n^2 个，又已知 $|a_{ij}|$ 中零元素个数大于 n^2-n 个，所以 $|a_{ij}|$ 中不等于零的元素个数小于 $n^2-(n^2-n)=n$ 个，故行列式 $|a_{ij}|$ 中至少有一行(或一列)的元素全为零，由此可知 $|a_{ij}|=0$.

例 1.3 利用行列式性质证明下式

$$\begin{vmatrix} b_1+c_1 & c_1+a_1 & a_1+b_1 \\ b_2+c_2 & c_2+a_2 & a_2+b_2 \\ b_3+c_3 & c_3+a_3 & a_3+b_3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

证明:方法一:

$$左 \overset{①}{=} \begin{vmatrix} b_1 & c_1+a_1 & a_1+b_1 \\ b_2 & c_2+a_2 & a_2+b_2 \\ b_3 & c_3+a_3 & a_3+b_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_1 & c_1+a_1 & a_1+b_1 \\ c_2 & c_2+a_2 & a_2+b_2 \\ c_3 & c_3+a_3 & a_3+b_3 \end{vmatrix}$$

$$\overset{②}{=} \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & a_1+b_1 \\ b_2 & c_2 & a_2+b_2 \\ b_3 & c_3 & a_3+b_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & a_1 & a_1+b_1 \\ b_2 & a_2 & a_2+b_2 \\ b_3 & a_3 & a_3+b_3 \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} c_1 & c_1 & a_1+b_1 \\ c_2 & c_2 & a_2+b_2 \\ c_3 & c_3 & a_3+b_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_1 & a_1 & a_1+b_1 \\ c_2 & a_2 & a_2+b_2 \\ c_3 & a_3 & a_3+b_3 \end{vmatrix}$$

$$\overset{③}{=} \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & a_1 \\ b_2 & c_2 & a_2 \\ b_3 & c_3 & a_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_1 & a_1 & b_1 \\ c_2 & a_2 & b_2 \\ c_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$\overset{④}{=} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 右$$

① 由第一列拆成两个行列式;

② 每个行列式均由第二列拆成两个行列式;

③ 接着拆项,且行列式中两列元素相同,值为 0;

④ 每个行列式均两次互换两列位置.

方法二:

$$左 \overset{①}{=} \begin{vmatrix} -2a_1 & c_1+a_1 & a_1+b_1 \\ -2a_2 & c_2+a_2 & a_2+b_2 \\ -2a_3 & c_3+a_3 & a_3+b_3 \end{vmatrix} \overset{②}{=} -2\begin{vmatrix} a_1 & c_1+a_1 & a_1+b_1 \\ a_2 & c_2+a_2 & a_2+b_2 \\ a_3 & c_3+a_3 & a_3+b_3 \end{vmatrix}$$

$$\overset{③}{=} -2\begin{vmatrix} a_1 & c_1 & b_1 \\ a_2 & c_2 & b_2 \\ a_3 & c_3 & b_3 \end{vmatrix} \overset{④}{=} 2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 右$$

① 用−1 乘以第二列和第三列,再分别加到第一列上;

② 将第一列的公共因子提出来;

③ 用−1 乘以第一列,分别加到第二列与第三列;

④ 第二列与第三列互换位置.

注意,本题不能如下求证:

$$\text{左}=\begin{vmatrix} b_1 & c_1 & a_1 \\ b_2 & c_2 & a_2 \\ b_3 & c_3 & a_3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} c_1 & a_1 & b_1 \\ c_2 & a_2 & b_2 \\ c_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix}=\text{右}$$

原因是数运算满足交换律,若利用上式有

$$\text{原题左}=\begin{vmatrix} b_1+c_1 & c_1+a_1 & b_1+a_1 \\ b_2+c_2 & c_2+a_2 & b_2+a_2 \\ b_3+c_3 & c_3+a_3 & b_3+a_3 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} b_1 & c_1 & b_1 \\ b_2 & c_2 & b_2 \\ b_3 & c_3 & b_3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} c_1 & a_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 & a_2 \\ c_3 & a_3 & a_3 \end{vmatrix}$$

$$=0+0=0$$

出现错误结论.

例 1.4 证明:若 n 阶行列式 $|a_{ij}|$ 中每一行的诸元素之和为零,则 $|a_{ij}|=0$.

证明:将 $|a_{ij}|$ 中第 2 列到第 n 列均加到第 1 列上,则所得的行列式的第 1 列为零列,故行列式值必等于零.

例 1.5 证明:

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ * & * & b_{11} & b_{12} \\ * & * & b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}$$

(注:其中“*”为任意数)

证明:方法一:按第一行展开

$$D=a_{11}\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & 0 & 0 \\ * & b_{11} & b_{12} \\ * & b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}+a_{12}\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_{21} & 0 & 0 \\ * & b_{11} & b_{12} \\ * & b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}$$

再按第一行展开

$$=a_{11}a_{22}\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}-a_{12}a_{21}\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}$$

方法二:应用拉普拉斯定理,按第一行和第二行展开,由于

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & 0 \end{vmatrix}=0,\quad \begin{vmatrix} a_{12} & 0 \\ a_{22} & 0 \end{vmatrix}=0$$

有 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}(-1)^{1+2+1+2}\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}$

例 1.6 计算 n 阶范德蒙行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1{}^2 & a_2{}^2 & \cdots & a_n{}^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1{}^{n-1} & a_2{}^{n-1} & \cdots & a_n{}^{n-1} \end{vmatrix}$$

解:这个行列式的特点是后行各元素比前行各元素的次数多 1. 利用行列式性质进行变换,将 D_n 的第一列中除第一行的元素外全变为零. 注意,从下往上逐行变换.

$$D_n \xlongequal[\cdots r_2-a_1r_1]{\substack{r_n-a_1r_{n-1}\\ r_{n-1}-a_1r_{n-2}}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a_2-a_1 & \cdots & a_n-a_1 \\ 0 & a_2(a_2-a_1) & \cdots & a_n(a_n-a_1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_2^{n-2}(a_2-a_1) & \cdots & a_n^{n-2}(a_n-a_1) \end{vmatrix}$$

其中 r 表示对行进行运算.

按第一列展开,再提出各列的公因子,得

$$D_n=(a_2-a_1)(a_3-a_1)\cdots(a_n-a_1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_2^2 & a_3^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_2^{n-2} & a_3^{n-2} & \cdots & a_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

$$=(a_2-a_1)(a_3-a_1)\cdots(a_n-a_1)D_{n-1}$$

显然 D_{n-1} 也是范德蒙行列式. 同理可得

$$D_{n-1}=(a_3-a_2)(a_4-a_2)\cdots(a_n-a_2)D_{n-2}$$

其中 D_{n-2} 是 $n-2$ 阶范德蒙行列式. 依次逐渐降阶,最后有

$$D_2=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a_{n-1} & a_n \end{vmatrix}=a_n-a_{n-1}$$

故 $D_n=(a_2-a_1)(a_3-a_1)\cdots(a_n-a_1)$

$\cdot(a_3-a_2)\cdots(a_n-a_2)$

……

$\cdot(a_n-a_{n-1})$

记为 $D_n=\prod\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}(a_j-a_i)$

例 1.7　计算行列式

$$D=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\4&-1&3&2\\16&1&9&4\\64&-1&27&8\end{vmatrix}$$

分析:此行列式是范德蒙行列式,其中 $a_1=4,a_2=-1,a_3=3,a_4=2$.

解:$D=\prod\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}(a_j-a_i)$

$=(a_2-a_1)(a_3-a_1)(a_4-a_1)(a_3-a_2)(a_4-a_2)(a_4-a_3)$

$=(-1-4)(3-4)(2-4)(3+1)(2+1)(2-3)=120$

例 1.8　解方程

$$f(x)=\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1\\1&1-x&1&\cdots&1\\1&1&2-x&\cdots&1\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\1&1&1&\cdots&(n-1)-x\end{vmatrix}=0$$

解:方法一:

$$\because f(x)=\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1\\1&1-x&1&\cdots&1\\1&1&2-x&\cdots&1\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\1&1&1&\cdots&(n-1)-x\end{vmatrix}$$

$$\overset{①}{=}\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1\\0&-x&0&\cdots&0\\0&0&1-x&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&\cdots&(n-2)-x\end{vmatrix}$$

$=(-1)^{n-1}x(x-1)\cdots(x-n+2)$

其中①是各行减去第一行对应元素.

由题设知

$$f(x)=(-1)^{n-1}x(x-1)\cdots(x-n+2)=0$$

所以 $x_1=0,x_2=1,\cdots,x_{n-1}=n-2$ 是原方程的解.

方法二:由题设知,当 $x=0,1,2,\cdots,n-2$ 时,由于行列式中有两列对应元素相同,行列式值为零,因此 $f(x)$ 可写成

$$f(x)=Ax(x-1)\cdots(x-n+2)$$

于是原方程 $f(x)=Ax(x-1)\cdots(x-n+2)=0$ 的解为

$$x_1=0,x_2=1,\cdots,x_{n-1}=n-2$$

例 1.9 设 $f(x)=\begin{vmatrix}1 & x-1 & 2x-1\\1 & x-2 & 3x-2\\1 & x-3 & 4x-3\end{vmatrix}$，证明存在 $\xi\in(0,1)$，使 $f'(\xi)=0$.

证明：$\because f(x)$ 是关于 x 的二次多项式，在 $[0,1]$ 上连续，$(0,1)$ 内可导，且

$$f(0)=\begin{vmatrix}1 & -1 & -1\\1 & -2 & -2\\1 & -3 & -3\end{vmatrix}=0,\quad f(1)=\begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\1 & -1 & 1\\1 & -2 & 1\end{vmatrix}=0$$

由罗尔定理知，存在 $\xi\in(0,1)$，使 $f'(\xi)=0$.

【考研提高题】

考研题中关于行列式内容的出题，和后续内容，如矩阵、向量联系较多，故这里的题型较少.

例 1.10 计算 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix}a & b & 0 & \cdots & 0 & 0\\0 & a & b & \cdots & 0 & 0\\0 & 0 & a & \cdots & 0 & 0\\\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\0 & 0 & 0 & \cdots & a & b\\b & 0 & 0 & \cdots & 0 & a\end{vmatrix}$$

解：方法一：利用行列式展开定理.

按第一列展开，可得一个 $(n-1)$ 阶的上三角行列式，及一个 $(n-1)$ 阶下三角行列式，于是转化为三角行列式.

$$D=(-1)^{1+1}a\begin{vmatrix}a & b & 0 & \cdots & 0 & 0\\0 & a & b & \cdots & 0 & 0\\0 & 0 & a & \cdots & 0 & 0\\\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\0 & 0 & 0 & \cdots & a & b\\0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a\end{vmatrix}$$