

高中数学疑难问答

翟连林 王家宝 朱家庆 编
李瑞君 常克峰 杨志刚

4605

3

农业机械出版社

中国农业机械出版社

高中数学疑难问答

翟连林 王家宝 朱家庆 编
李瑞君 常克峰 杨志刚

中国农业机械出版社

本书为作者在长期教学实践中积累高中学生在学习高中代数、立体几何、平面三角以及平面解析几何中常常碰到的疑难问题共71个，并给出详细解答。

本书具有针对性强，分析、解答透彻等特点。如果要有的放矢地消灭在学习中的“拦路虎”，提高学习效率，那么，本书就是您的良师益友。

本书适合高中各年级学生阅读，也可供自学青年参考。

高中数学疑难问答

涅连林 王家宝 朱家庆 编
李瑞君 常克峰 杨志刚

*

责任编辑：蓝火金 版式设计：吴静霞

封面设计：方 芬 责任校对：

责任印制：王国光

*

中国农业机械出版社出版（北京阜成门外百万庄南街一号）

（北京市书刊出版业营业许可证出字第117号）

机械工业出版社印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行·新华书店经售

*

开本 $787 \times 1092^{1/32}$ · 印张 $7^{3/8}$ · 字数 162千字

1990年4月北京第一版·1990年4月北京第一次印刷

印数 0,001—9,400 · 定价：3.60元

*

ISBN 7-80032-110-X/G·41

目 录

第一章 代数..... 1

1. 集合 A 和 B 满足什么关系时, 下列各式才成立? (1)
 - (1) $A \cap B = A$; (2) $A \cup B = A$;
 - (3) $A \cap B = A \cup B$; (4) $A - B = \phi$.
2. 什么是分段函数? (1)
3. 任何函数都有反函数吗? (2)
4. 用不等式求函数的极值时, 应注意什么问题? (2)
5. 怎样用判别式求极值? (4)
6. 在什么情况下用判别式求极值容易发生错误? (5)
7. 函数 $y = \frac{a'x^2 + b'x + c'}{ax^2 + bx + c}$ ($a \neq 0$, a', b', c' 不全为零) 一定存在极值吗? (8)
8. 特殊数列求和有哪些常用方法? (12)
9. 如何求数列的通项公式? (21)
10. 证明不等式常用哪些技巧? (29)
11. 为什么不全为实数的复数不能比较大小? (32)
12. 两个数的和与积都为实数是这两个数一定都为实数的什么条件? (34)
13. 符号 $\sqrt[n]{}$ 表示什么? (37)
14. 什么叫三次原根? 它在复数计算中有哪些应用? (38)
15. 实系数一元二次方程根的判别式能不能推广到复系数一元二次方程中去? (42)
16. 如何利用复数证明三角恒等式? (43)
17. 怎样解有限制条件的排列组合应用题? (50)
18. 怎样解插“空档”的排列应用题? (54)

19. 怎样解组合应用题中的分组问题?	(55)
20. 已知二项式幂指数, 如何求其展开式里某些具有特殊性质的项?	(61)
21. 二项式幂指数未知时, 如何求其展开式的特定项? ...	(62)
22. 如何求几个二项式的和或积的展开式里的某些特定的项?	(64)
23. 如何求二项展开式中系数最大的项?	(66)
24. 怎样证明有关组合数的恒等式?	(67)
25. 如何用二项式定理证明整除问题?	(70)
26. 下面各题的解法错在何处? 为什么?	(72)
27. 函数 $y = f(u)$, $u = \varphi(x)$ 在怎样的条件下才能得到复合函数 $y = f[\varphi(x)]$?	(85)
28. 如何根据数列极限的定义证明数列的极限?	(86)
29. 函数 $y = f(x)$ 的自变量的增量和函数的增量一定是正值吗?	(87)
30. 计算极限时, 经常出现哪些错误?	(88)

第二章 立体几何 91

1. 一条直线及此直线外不共线的三点, 可确定几个平面?	(91)
2. 为什么说两两相交的 $n (n \geq 3)$ 条直线, 或者经过同一点, 或者在同一平面内?	(91)
3. 平面四边形的四个顶点, 分别在空间四边形的四条边上, 试问这平面四边形的对边如果相交, 它们的交点在何处? 如果不相交, 情况又如何?	(92)
4. 怎样用补形法求两条异面直线所成的角?	(92)
5. 怎样用辅助平面法求两条异面直线间的距离?	(95)
6. 怎样用“等体积法”求两异面直线间的距离?	(99)
7. 怎样用极值法求两条异面直线间的距离?	(102)
8. 怎样解关于平面图形的折转问题?	(104)

9. 怎样在非水平放置的平面上, 应用三垂线定理及其逆定理? (108)
 10. 在论证立体几何命题时, 什么情况宜于使用反证法? (111)
 11. 怎样将某些图形旋转适当的角度, 使空间问题转化为平面问题? (115)
 12. 怎样应用补形法解有关的体积问题? (116)
 13. 怎样作出多面体的截面? (118)
- 第三章 平面三角 124

1. 角 α 与角 $\frac{\alpha}{2}$ 所在的象限有怎样的关系? (124)
 2. 为什么在定义域内 $\sin \alpha$ 与 $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ 的符号是相同的? (125)
 3. 任何一个周期函数都有最小正周期吗? (126)
 4. 证明一个函数不是周期函数常用什么方法? (126)
 5. 如何证明 T 是周期函数 $f(x)$ 的最小正周期? (129)
 6. 什么是化简三角函数式的最后结果? (130)
 7. 如何用降幂法证明三角等式? (132)
 8. 怎样使用交叉相消法证明三角恒等式? (134)
 9. 应用万能置换公式要注意什么问题? (138)
 10. 证明条件等式有哪些常用方法? (141)
 11. 如何求三角函数的极值? (154)
 12. 如何用反三角函数表示非定义区间的角? (169)
- 第四章 解析几何 175

1. 任意一条直线都有斜率吗? (175)
2. 如何确定点到直线距离公式中 $Ax_0 + By_0 + C$ 的符号? (175)
3. 应用两直线的交角公式时应注意什么? (177)
4. 有同时与双曲线的两支都相切的直线吗? (180)

5. 怎样求曲线的轴对称曲线的方程? (180)
6. 如何讨论圆锥曲线系? (185)
7. 怎样解有关圆锥曲线系的问题? (187)
8. 怎样证明曲线过定点? (193)
9. 什么类型问题用圆锥曲线极坐标方程求解简便? (195)
10. 在极坐标系中, 经过极点的线段的中点极坐标是什么? (200)
11. 如何正确运用直线参数方程中参数 t 的几何意义? (203)
12. 哪些类型的问题用直线的参数方程求解较为简便? (207)
13. 解析几何中的极值问题常用哪些方法求解? (211)
14. 解析几何中, 哪些问题利用韦达定理来解比较简便? (217)
15. 怎样用参数法求轨迹方程? (220)
16. 如何讨论轨迹的纯粹性? (223)

第一章 代 数

1. 集合 A 和 B 满足什么关系时, 下列各式才成立?

(1) $A \cap B = A$; (2) $A \cup B = A$;

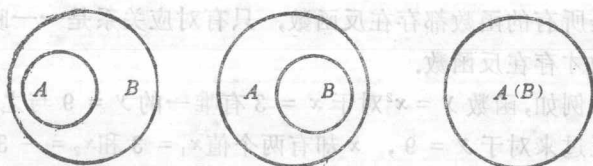
(3) $A \cap B = A \cup B$; (4) $A - B = \phi$.

答: (1) $A \subseteq B$ 时, 有 $A \cap B = A$ (如图 1-1 a).

(2) $B \subseteq A$ 时, 有 $A \cup B = A$ (如图 1-1 b).

(3) $A = B$ 时, 有 $A \cap B = A \cup B$ (如图 1-1 c).

(4) $A = B$ 时, 有 $A - B = \phi$ (如图 1-1 c).



a)

b)

c)

图 1-1

2. 什么是分段函数?

答: 先看一个实际例子:

当携带行李乘火车时, 行李重量不超过 20 公斤, 不收运费. 若超过 20 公斤, 每超过 1 公斤收运费 0.1 元, 试将运费 P 写成行李重量 W 的函数.

当 $0 \leq W \leq 20$ 时, 运费 $P = 0$; 而当 $W > 20$ 时, 只有超过的部分 $(W - 20)$ 收运费, 因而 $P = 0.1(W - 20)$. 于是函数 $P(W)$ 可写成如下形式:

$$P(W) = \begin{cases} 0 & (0 \leq W \leq 20) \\ 0.1(W - 20) & (20 < W) \end{cases}$$

这里函数 $P(W)$ 不是用一个式子，而是用两个解析式子来表示 P 与 W 之间的函数关系。这种用两个或几个解析式表示的函数叫做分段函数。

应该注意的是：分段函数虽然是由几个解析式表示出来的，但它们表示的是同一个函数，而不是几个不同的函数。

3. 任何函数都有反函数吗？

答：不一定。

这是由反函数的定义所决定的。如果给定函数 $y = f(x)$ 的对应关系 f 是一一映射，那么 f 的逆映射 f^{-1} 所确定的函数 $x = f^{-1}(y)$ 叫做函数 $y = f(x)$ 的反函数。因此，不是所有的函数都存在反函数，只有对应关系是一一映射的函数才存在反函数。

例如，函数 $y = x^2$ 对于 $x = 3$ 有唯一的 $y = 9$ 与之对应，但反过来对于 $y = 9$ ， x 却有两个值 $x_1 = 3$ 和 $x_2 = -3$ 与之对应，即函数 $y = x^2$ 的对应关系不是一一映射，因此 $y = x^2$ 没有反函数。但如果只在区间 $[0, +\infty)$ 上讨论函数 $y = x^2$ ，则显然 x 与 y 在这个区间上一一映射，故其反函数 $x = \sqrt{y}$ 存在。

4. 用不等式求函数的极值时，应注意什么问题？

答：使用不等式求函数的极值，经常是用非负实数的算术平均值不小于它们的几何平均值这个性质，即若 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 均为非负实数，则 $a_1 + a_2 + \dots + a_n \geq n \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdots a_n}$ ，用这个不等式求极值时，要注意必须具备以下三个条件：

(1) $a_1, a_2, \dots, a_n$ 必须是非负数；

(2) 必须存在 $a_1 = a_2 = \dots = a_n$ ；

(3) 这几个非负实数的和或积是定值。

这三个条件是缺一不可的，如果忽视了这一点，将导致错误的结果。

例1 求 $\log_a b + \log_b c + \log_c a$ 的最小值。

解：∵ $\log_a b + \log_b c + \log_c a \geq 3\sqrt[3]{\log_a b \cdot \log_b c \cdot \log_c a}$
 $= 3$

∴ $\log_a b + \log_b c + \log_c a$ 的最小值为 3。

这个结论是错误的。因为由对数定义可知，原式中的 a ， b ， c 都是不等于 1 的正数，因此 $\log_a b$ ， $\log_b c$ ， $\log_c a$ 三者之中可能有负数，这就违背了条件(1)。

如设 $a = 2$ ， $b = \frac{1}{2}$ ， $c = \frac{1}{2}$ 时

$$\begin{aligned}\log_a b + \log_b c + \log_c a &= \log_2 \frac{1}{2} + \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} + \log_{\frac{1}{2}} 2 \\ &= -1 + 1 - 1 \\ &= -1 < 3\end{aligned}$$

显然，3 不是这个和的最小值。

例2 当 x 为何值时，函数 $y = (x-1)^2 + 4x^2$ ($x \geq 1$) 取极值。

解：∵ $(x-1)^2 \geq 0$ ， $4x^2 > 0$

$$\begin{aligned}\therefore y &= (x-1)^2 + 4x^2 \geq 2\sqrt{(x-1)^2 \cdot 4x^2} \\ &= 2(x-1) \cdot 2x \\ &= 4x(x-1)\end{aligned}$$

∴ 当 $(x-1)^2 = 4x^2$ 时，函数 $y = (x-1)^2 + 4x^2$ 取极小值。

这样的解法是错误的，因为它违背了条件(3)，即 $4x$

$x(x-1)$ 不是常数. 正确解法为

$$\begin{aligned} y &= (x-1)^2 + 4x^2 \\ &= 5x^2 - 2x + 1 \\ &= 5\left(x - \frac{1}{5}\right)^2 + \frac{4}{5} \end{aligned}$$

当 $x = \frac{1}{5}$ 时, $y_{\min} = \frac{4}{5}$.

5. 怎样用判别式求极值?

答: 首先将函数式化成关于自变量的一元二次方程, 然后利用自变量为实数, 即方程有实根, 其判别式 $\Delta \geq 0$ 的性质, 得到关于函数为未知量的不等式, 解此关于函数的不等式, 求得函数的极值.

例1 在 $\triangle ABC$ 中, 求 $\cos A \cos B \cos C$ 的极值.

证明: 设 $y = \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C$

$$\text{则 } 2y = [\cos(A+B) + \cos(A-B)] \cdot \cos C$$

$$\cos^2 C - \cos(A-B) \cos C + 2y = 0$$

$\because \cos C$ 为实数

$$\therefore \Delta = \cos^2(A-B) - 8y \geq 0$$

$$\text{即 } 8y \leq \cos^2(A-B) \leq 1$$

故 $\cos A \cos B \cos C$ 的极大值为 $\frac{1}{8}$.

注: 由上例不难看出, 用判别式求函数的极值时, 关键在于找到关于自变量的二次方程 (特别注意绝不是关于表示函数字母的二次方程), 在这个二次方程中, 各项系数为表示函数的字母的代数式.

例2 若 $f(x) = \frac{2x-1}{x^2+ax+b}$ 的最大值为 1, 最小值为

-1, 求 a 、 b 的值.

解: 设 $y = \frac{2x-1}{x^2+ax+b}$

则 $yx^2 + (ay-2)x + by + 1 = 0$

这是一个关于 x 的二次方程, 又 x 是实数, 因此判别式

$$\Delta = (ay-2)^2 - 4y(by+1) \geq 0$$

即 $(a^2-4b)y^2 - 4y(a+1) + 4 \geq 0$

又原函数的最大值为 1, 最小值为 -1, 则 1 与 -1 为方程 $(a^2-4b)y^2 - 4(a+1)y + 4 = 0$ 的两根.

由韦达定理, 得

$$0 \leq \begin{cases} -\frac{4(a+1)}{a^2-4b} = 0 \\ 0 \geq \frac{4}{a^2-4b} = -1 \end{cases}$$

解之, 得 $a = -1$, $b = \frac{5}{4}$.

6. 在什么情况下用判别式求极值容易发生错误?

答: 用判别式求函数极值的方法巧妙、简捷, 但这个方
法不是万能的. 有些函数若不能化成关于自变量的一元二次
方程, 就不能用判别式求极值. 另外, 即使能化成一元二次
方程, 也不一定能用判别式法. 若不慎用了判别式法, 就可
能会出现错误.

下面三个求极值的例子, 其结果都是错误的.

例 1 求函数 $y = 2x + \sqrt{x}$ 的极小值

解: 原函数变形为

$$y^2 + 4x^2 - 4xy - x = 0$$

即

$$4x^2 - (4y+1)x + y^2 = 0$$

$\therefore x$ 为实数, 故判别式

$$\Delta = (4y + 1)^2 - 4 \cdot 4 \cdot y^2 \geq 0$$

得

$$y \geq -\frac{1}{8}$$

$\therefore$ 原函数的极小值为 $-\frac{1}{8}$.

例 2 求函数 $y = x + \sqrt{3 - 2x - x^2}$ 的最大值和最小值.

解: 原式可化为

$$2x^2 + 2(1 - y)x + y^2 - 3 = 0$$

$\therefore x$ 为实数, 故判别式

$$\Delta = 4(1 - y)^2 - 8(y^2 - 3) \geq 0$$

即

$$y^2 + 2y - 7 \leq 0$$

解之, 得

$$-2\sqrt{2} - 1 \leq y \leq 2\sqrt{2} - 1$$

故

$$y_{\text{最大值}} = 2\sqrt{2} - 1$$

$$y_{\text{最小值}} = -2\sqrt{2} - 1$$

例 3 求函数 $y = \frac{x^2 - 5x + 1}{x^2 - x + 1}$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上的最大值和最小值.

解: 将原函数化为

$$(1 - y)x^2 + (y - 5)x + (1 - y) = 0$$

$\therefore x$ 为实数, 故判别式

$$\Delta = (y - 5)^2 - 4(1 - y)^2 \geq 0$$

即

$$3y^2 + 2y - 21 \leq 0$$

解之, 得

$$-3 \leq y \leq \frac{7}{3}$$

故函数的最大值为 $\frac{7}{3}$ ，最小值为 -3 。

为什么说以上三例都是错的呢？

首先看例1所给的函数是 $y = 2x + \sqrt{x}$ ，它的定义域为 $[0, +\infty)$ ，值域是 $[0, +\infty)$ ，变形后函数值域为 $y \geq -\frac{1}{8}$ ，极小值为 $-\frac{1}{8}$ ，而 $-\frac{1}{8} \notin [0, +\infty)$ ，因而这个结果是错误的。产生错误的原因在于把原函数两边平方后，自变量 x 的变化范围和函数 y 的变化范围都扩大所致。从所给函数式 $y = 2x + \sqrt{x}$ 可以看出，当 $x = 0$ 时，函数 y 的极小值为0。

下面用求导法求函数 $y = 2x + \sqrt{x}$ 的极值。

解：求 $y = 2x + \sqrt{x}$ 的导数，得

$$y' = 2 + \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

当 $x > 0$ 时

$$\text{有 } y' = 2 + \frac{1}{2\sqrt{x}} > 0 \text{ 成立}$$

故函数 y 在区间 $(0, +\infty)$ 内是增函数。

$\therefore$ 当 $x = 0$ 时，函数的极小值 $y_{\min} = 0$ 。

再看例2所给函数定义域为 $[-3, 1]$ ，值域为 $[-3, 2\sqrt{2}-1]$ ，而求出的函数最小值为 $-2\sqrt{2}-1$ ，显然是错误的。其原因在变形时扩大了函数的定义域和值域的范围。事实上

$$y' = \frac{\sqrt{3-2x-x^2}-x-1}{\sqrt{3-2x-x^2}}$$

由 $y' = 0$ ，得

$$x = -1 \pm \sqrt{2}$$

$$\therefore y|_{x=-3} = -3, y|_{x=1} = 1$$

$$y|_{x=-1+\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} - 1, y|_{x=-1-\sqrt{2}} = -1$$

$$\therefore y|_{\text{最大值}} = 2\sqrt{2} - 1, y|_{\text{最小值}} = -3$$

最后再研究例3，函数变形后，定义域与值域虽然未发生变化，但求出的最大值所对应的 x 值在函数的定义域之外。事实上

$$y' = \frac{4(x^2 - 1)}{(x^2 - x + 1)^2}$$

$$\text{令 } y' = 0, \text{ 得 } x = \pm 1$$

$$\therefore -1 \notin [0, +\infty), \text{ 故舍去.}$$

$$\text{又 } y|_{x=0} = 1, y|_{x=1} = -3$$

故所给函数的最大值为1，最小值为-3。

注：对于用判别式求极值出现错误的原因，可归纳为以下两个方面：

(1) 在函数变形为关于自变量的一元二次方程的过程中，改变了函数的定义域和值域。

(2) 由于判别式法是在实数范围内讨论函数的极值的。如果所给函数的定义域仅是实数的某一子集时，就可能出现所求得的极值所对应的自变量的值不属于函数的定义域，如果这种情况出现，那么所求的极值就是错误的。

因此，在用判别式法求极值时，要留心所给函数的定义域和值域。

$$7. \text{ 函数 } y = \frac{a'x^2 + b'x + c'}{ax^2 + bx + c} \quad (a \neq 0, a', b', c' \text{ 不全}$$

为零)一定存在极值吗?

① 答: 形如 $y = \frac{a'x^2 + b'x + c'}{ax^2 + bx + c}$ ($a \neq 0, a', b', c'$ 不全为零) 的函数的极值不一定存在.

例 1 求函数 $y = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 2x + 1}$ 的极值.

解: 原式化为

$$(1-y)x^2 + (1-2y)x + (1-y) = 0$$

$\therefore x$ 为实数

$$\therefore \Delta \geq 0$$

$$\text{即 } (1-2y)^2 - 4(1-y)^2 \geq 0 \quad (1)$$

解之, 得

$$y \geq \frac{3}{4} \quad (2)$$

故函数有极小值 $y_{\min} = \frac{3}{4}$.

例 2 讨论 $y = \frac{x^2 - 4}{x^2 - 2x - 3}$ 的极值

解: 将原式化为

$$(1-y)x^2 + 2yx - (4-3y) = 0$$

$$\therefore \Delta = 4y^2 + 4(1-y)(4-3y)$$

$$= 4(4y^2 - 7y + 4) \quad (1)$$

而对于任意 $y \in R$, 恒有 $\Delta = 4(4y^2 - 7y + 4) > 0$

即函数 $y = \frac{x^2 - 4}{x^2 - 2x - 3}$ 无极值. (2)

由以上两例可看出, 形如 $y = \frac{a'x^2 + b'x + c'}{ax^2 + bx + c}$ ($a \neq 0, a', b', c'$ 不全为 0) 的函数并非一定存在极值.

由于 $y = \frac{a'x^2 + b'x + c'}{ax^2 + bx + c}$ ($a \neq 0, a', b', c'$ 不全为

0)

①

经过适当的变形,可化为

$$y = R + \frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c}$$

的形式. 而①和 $y_1 = \frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c}$ 极值存在与否是一致的. 因此, 我们给出下面判别极值存在的方法.

定理: 函数 $y = \frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c}$ 存在极值的主要条件是:

(1) $A \neq 0$ 且 $\Delta = b^2 - 4ac < 0$

(2) $A = 0$, $y_0 = \frac{B}{c}$ 的极值存在且不为 0.

这样, 形如 $y = \frac{a'x^2 + b'x + c'}{ax^2 + bx + c}$ 的函数, 只要先变形为

$y = R + \frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c}$ 的形式, 然后依定理判断 $y_1 =$

$\frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c}$ 是否存在极值. 若存在, 再利用判别式法即可求得其极值.

例如, 下列函数是否存在极值, 若存在, 试求出其极值.

(1) $y = \frac{4x - 1}{3x^2 - 7x - 2};$

(2) $y = \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1};$

(3) $y = \frac{6x^2 - 4x + 3}{3x^2 - 2x + 1}.$

解: (1) 由于 $A = 4 \neq 0$

而 $\Delta = (-7)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-2)$

$$= 73 > 0$$