高中数学疑难问答

翟连林　王家宝　朱家庆
李瑞君　常克峰　杨志刚　编

中国农业机械出版社

农业机械出版社

高中数学疑难问答

翟连林　王家宝　朱家庆
李瑞君　常克峰　杨志刚　编

中国农业机械出版社

本书为作者在长期教学实践中积累高中学生在学习高中代数、立体几何、平面三角以及平面解析几何中常常碰到的疑难问题共71个，并给出详细解答。

本书具有针对性强，分析、解答透彻等特点。如果要有的放矢地消灭在学习中碰到的"拦路虎"，提高学习效率，那么，本书就是您的良师益友。

本书适合高中各年级学生阅读，也可供自学青年参考。

高中数学疑难问答

翟连林　王家宝　朱家庆
李瑞君　常克峰　杨志刚　编

*

责任编辑：蓝火金　版式设计：吴静霞
封面设计：方　芬　责任校对：
责任印制：王国光

*

中国农业机械出版社出版（北京阜成门外百万庄南街一号）
（北京市书刊出版业营业许可证出字第117号）
机械工业出版社印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行·新华书店经售

*

开本 787×1092 1/32·印张 7 3/8·字数 162千字
1990年4月北京第一版·1990年4月北京第一次印刷
印数 0,001—9,400·定价：3.60元

*

ISBN 7-80032-110-X/G·41

目　录

第一章 代 数

1. 集合A和B满足什么关系时，下列各式才成立？

（1）$A\cap B=A$；（2）$A\cup B=A$；

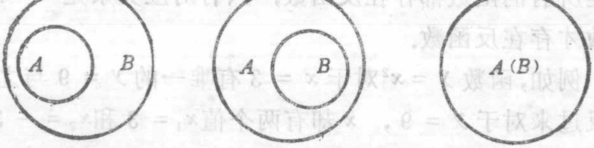
（3）$A\cap B=A\cup B$；（4）$A-B=\phi$.

答：（1）$A\subseteq B$时，有$A\cap B=A$（如图1-1 a）.

（2）$B\subseteq A$时，有$A\cup B=A$（如图1-1 b）.

（3）$A=B$时，有$A\cap B=A\cup B$（如图1-1 c）.

（4）$A=B$时，有$A-B=\phi$（如图1-1 c）.



a）　　b）　　c）

图 1-1

2. 什么是分段函数？

答：先看一个实际例子：

当携带行李乘火车时，行李重量不超过20公斤，不收运费．若超过20公斤，每超过1公斤收运费0.1元，试将运费P写成行李重量W的函数.

当$0\leqslant W\leqslant 20$时，运费$P=0$；而当$W>20$时，只有超过的部分（$W-20$）收运费，因而$P=0.1(W-20)$．于是函数$P(W)$可写成如下形式：

$$P(W)=\begin{cases}0 & (0\leqslant W\leqslant 20)\\ 0.1(W-20) & (20<W)\end{cases}$$

这里函数$P(W)$不是用一个式子，而是用两个解析式子来表示P与W之间的函数关系．这种用两个或几个解析式表示的函数叫做分段函数．

应该注意的是：分段函数虽然是由几个解析式表示出来的，但它们表示的是同一个函数，而不是几个不同的函数．

3．任何函数都有反函数吗？

答：不一定．

这是由反函数的定义所决定的．如果给定函数$y=f(x)$的对应关系f是一一映射，那么f的逆映射f^{-1}所确定的函数$x=f^{-1}(y)$叫做函数$y=f(x)$的反函数．因此，不是所有的函数都存在反函数，只有对应关系是一一映射的函数才存在反函数．

例如，函数$y=x^2$对于$x=3$有唯一的$y=9$与之对应，但反过来对于$y=9$，x却有两个值$x_1=3$和$x_2=-3$与之对应，即函数$y=x^2$的对应关系不是一一映射，因此$y=x^2$没有反函数．但如果只在区间$[0,+\infty)$上讨论函数$y=x^2$，则显然x与y在这个区间上一一映射，故其反函数$x=\sqrt{y}$存在．

4．用不等式求函数的极值时，应注意什么问题？

答：使用不等式求函数的极值，经常是用非负实数的算术平均值不小于它们的几何平均值这个性质，即若$a_1, a_2, \cdots, a_n$均为非负实数，则$a_1+a_2+\cdots+a_n\geqslant n\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdots a_n}$，用这个不等式求极值时，要注意必须具备以下三个条件：

（1）a_1，a_2，…，a_n必须是非负数；

（2）必须存在$a_1=a_2=\cdots=a_n$；

（3）这几个非负实数的和或积是定值.

这三个条件是缺一不可的，如果忽视了这一点，将导致错误的结果.

例 1 求$\log_a b+\log_b c+\log_c a$的最小值.

解： ∵ $\log_a b+\log_b c+\log_c a\geqslant 3\sqrt[3]{\log_a b\cdot\log_b c\cdot\log_c a}$

$=3$

∴ $\log_a b+\log_b c+\log_c a$的最小值为3.

这个结论是错误的. 因为由对数定义可知，原式中的a，b，c都是不等于1的正数，因此$\log_a b$，$\log_b c$，$\log_c a$三者之中可能有负数，这就违背了条件（1）.

如设 $a=2$，$b=\frac{1}{2}$，$c=\frac{1}{2}$时

$$\log_a b+\log_b c+\log_c a=\log_2\frac{1}{2}+\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{2}+\log_{\frac{1}{2}}2$$

$$=-1+1-1$$

$$=-1<3$$

显然，3不是这个和的最小值.

例 2 当x为何值时，函数$y=(x-1)^2+4x^2(x\geqslant 1)$取极值.

解： ∵ $(x-1)^2\geqslant 0$，$4x^2>0$

∴ $y=(x-1)^2+4x^2\geqslant 2\sqrt{(x-1)^2\cdot 4x^2}$

$=2(x-1)\cdot 2x$

$=4x(x-1)$

∴ 当$(x-1)^2=4x^2$时，函数$y=(x-1)^2+4x^2$取极小值.

这样的解法是错误的，因为它违背了条件（3），即$4x$

$x(x-1)$不是常数. 正确解法为

$$\begin{aligned} y &= (x-1)^2+4x^2 \\ &= 5x^2-2x+1 \\ &= 5\left(x-\frac{1}{5}\right)^2+\frac{4}{5} \end{aligned}$$

当$x=\frac{1}{5}$时，$y_{min}=\frac{4}{5}$.

5. 怎样用判别式求极值?

答: 首先将函数式化成关于自变量的一元二次方程，然后利用自变量为实数，即方程有实根，其判别式$\varDelta \geqslant 0$的性质，得到关于函数为未知量的不等式，解此关于函数的不等式，求得函数的极值.

例 1 在$\triangle ABC$中，求$\cos A\cos B\cos C$的极值.

证明: 设$y=\cos A\cdot\cos B\cdot\cos C$

则 $2y=[\cos(A+B)+\cos(A-B)]\cdot\cos C$

$$\cos^2 C-\cos(A-B)\cos C+2y=0$$

$\because$ $\cos C$为实数

$\therefore$ $$\varDelta=\cos^2(A-B)-8y\geqslant 0$$

即 $8y\leqslant\cos^2(A-B)\leqslant 1$

故$\cos A\cos B\cos C$的极大值为$\frac{1}{8}$.

注: 由上例不难看出，用判别式求函数的极值时，关键在于找到关于自变量的二次方程（特别注意绝不是关于表示函数字母的二次方程），在这个二次方程中，各项系数为表示函数的字母的代数式.

例 2 若$f(x)=\dfrac{2x-1}{x^2+ax+b}$的最大值为1，最小值为

-1，求 a、b 的值.

解：设 $y=\dfrac{2x-1}{x^2+ax+b}$

则 $$yx^2+(ay-2)x+by+1=0$$

这是一个关于 x 的二次方程，又 x 是实数，因此判别式

$$\Delta=(ay-2)^2-4y(by+1)\geqslant 0$$

即 $$(a^2-4b)y^2-4y(a+1)+4\geqslant 0$$

又原函数的最大值为 1，最小值为 -1，则 1 与 -1 为方程 $(a^2-4b)y^2-4(a+1)y+4=0$ 的两根.

由韦达定理，得

$$\begin{cases}\dfrac{4(a+1)}{a^2-4b}=0\\[2ex]\dfrac{4}{a^2-4b}=-1\end{cases}$$

解之，得 $a=-1$，$b=\dfrac{5}{4}$.

6. 在什么情况下用判别式求极值容易发生错误？

答：用判别式求函数极值的方法巧妙、简捷，但这个方法不是万能的. 有些函数若不能化成关于自变量的一元二次方程，就不能用判别式求极值. 另外，既使能化成一元二次方程，也不一定能用判别式法. 若不慎用了判别式法，就可能会出现错误.

下面三个求极值的例子，其结果都是错误的.

例 1 求函数 $y=2x+\sqrt{x}$ 的极小值

解：原函数变形为

$$y^2+4x^2-4xy-x=0$$

即 $$4x^2-(4y+1)x+y^2=0$$

$\because$ x 为实数，故判别式

$$\Delta=(4y+1)^2-4\cdot4\cdot y^2\geqslant0$$

得 $$y\geqslant-\frac{1}{8}$$

$\therefore$ 原函数的极小值为 $-\frac{1}{8}$.

例 2 求函数 $y=x+\sqrt{3-2x-x^2}$ 的最大值和最小值.

解： 原式可化为

$$2x^2+2(1-y)x+y^2-3=0$$

$\because$ x 为实数，故判别式

$$\Delta=4(1-y)^2-8(y^2-3)\geqslant0$$

即 $$y^2+2y-7\leqslant0$$

解之，得

$$-2\sqrt{2}-1\leqslant y\leqslant2\sqrt{2}-1$$

故 $$y_{\text{最大值}}=2\sqrt{2}-1$$
$$y_{\text{最小值}}=-2\sqrt{2}-1$$

例 3 求函数 $y=\dfrac{x^2-5x+1}{x^2-x+1}$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上的最大值和最小值.

解： 将原函数化为

$$(1-y)x^2+(y-5)x+(1-y)=0$$

$\because$ x 为实数，故判别式

$$\Delta=(y-5)^2-4(1-y)^2\geqslant0$$

即 $$3y^2+2y-21\leqslant0$$

解之，得 $$-3\leqslant y\leqslant\frac{7}{3}$$

故函数的最大值为$\frac{7}{3}$，最小值为-3．

为什么说以上三例都是错的呢？

首先看例1所给的函数是$y=2x+\sqrt{x}$，它的定义域为$[0，+\infty)$，值域是$[0，+\infty)$，变形后函数值域为$y\geqslant-\frac{1}{8}$，极小值为$-\frac{1}{8}$，而$-\frac{1}{8}\notin[0，+\infty)$，因而这个结果是错误的．产生错误的原因在于把原函数两边平方后，自变量x的变化范围和函数y的变化范围都扩大所致．从所给函数式$y=2x+\sqrt{x}$可以看出，当$x=0$时，函数y的极小值为0．

下面用求导法求函数$y=2x+\sqrt{x}$的极值．

解：求$y=2x+\sqrt{x}$的导数，得

$$y'=2+\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

当　$x>0$时

有　$y'=2+\frac{1}{2\sqrt{x}}>0$　成立

故函数y在区间$(0，+\infty)$内是增函数．

∴　当$x=0$时，函数的极小值$y_{min}=0$．

再看例2所给函数定义域为$[-3，1]$，值域为$[-3，2\sqrt{2}-1]$，而求出的函数最小值为$-2\sqrt{2}-1$，显然是错误的．其原因在变形时扩大了函数的定义域和值域的范围．事实上

$$y'=\frac{\sqrt{3-2x-x^2}-x-1}{\sqrt{3-2x-x^2}}$$

由　$y'=0$，得

$$x = -1 \pm \sqrt{2}$$

$\because \quad y|_{x=-3} = -3$， $y|_{x=1} = 1$

$y|_{x=-1+\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} - 1$， $y|_{x=-1-\sqrt{2}} = -1$

$\therefore \quad y_{最大值} = 2\sqrt{2} - 1$， $y|_{最小值} = -3$

最后再研究例3，函数变形后，定义域与值域虽然未发生变化，但求出的最大值所对应的 x 值在函数的定义域之外. 事实上

$$y' = \frac{4(x^2 - 1)}{(x^2 - x + 1)^2}$$

令 $y' = 0$，得 $x = \pm 1$

$\because \quad -1 \notin [0, +\infty)$，故舍去.

又 $y|_{x=0} = 1$，$y|_{x=1} = -3$

故所给函数的最大值为1，最小值为 -3.

注：对于用判别式求极值出现错误的原因，可归纳为以下两个方面：

（1）在函数变形为关于自变量的一元二次方程的过程中，改变了函数的定义域和值域.

（2）由于判别式法是在实数范围内讨论函数的极值的. 如果所给函数的定义域仅是实数的某一子集时，就可能出现所求得的极值所对应的自变量的值不属于函数的定义域，如果这种情况出现，那么所求的极值就是错误的.

因此，在用判别式法求极值时，要留心所给函数的定义域和值域.

7. 函数 $y = \dfrac{a'x^2 + b'x + c'}{ax^2 + bx + c}$（$a \neq 0$，$a'$、$b'$、$c'$不全为零）一定存在极值吗？

答：形如 $y=\dfrac{a'x^2+b'x+c'}{ax^2+bx+c}$（$a\neq 0$，$a'$、$b'$、$c'$不全为零）的函数的极值不一定存在.

例 1　求函数 $y=\dfrac{x^2+x+1}{x^2+2x+1}$ 的极值.

解：原式化为

$$(1-y)x^2+(1-2y)x+(1-y)=0$$

$\because$　x 为实数

$\therefore$　$\Delta\geqslant 0$

即　$$(1-2y)^2-4(1-y)^2\geqslant 0$$

解之，得　$y\geqslant\dfrac{3}{4}$

故函数有极小值　$y_{\min}=\dfrac{3}{4}$。

例 2　讨论 $y=\dfrac{x^2-4}{x^2-2x-3}$ 的极值

解：将原式化为

$$(1-y)x^2+2yx-(4-3y)=0$$

$\because$　$\Delta=4y^2+4(1-y)(4-3y)$

$=4(4y^2-7y+4)$

而对于任意 $y\in R$，恒有 $\Delta=4(4y^2-7y+4)>0$

即函数 $y=\dfrac{x^2-4}{x^2-2x-3}$ 无极值.

由以上两例可看出，形如 $y=\dfrac{a'x^2+b'x+c'}{ax^2+bx+c}$（$a\neq 0$，$a'$、$b'$、$c'$不全为 0）的函数并非一定存在极值.

由于 $y=\dfrac{a'x^2+b'x+c'}{ax^2+bx+c}$（$a\neq 0$，$a'$、$b'$、$c'$不全为

0） ①

经过适当的变形，可化为

$$y = R + \frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c}$$

的形式. 而①和 $y_1 = \frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c}$ 极值存在与否是一致的. 因此，我们给出下面判别极值存在的方法.

定理：函数 $y = \frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c}$ 存在极值的主要条件是：

（1） $A \neq 0$ 且 $\Delta = b^2 - 4ac < 0$

（2） $A = 0$，$y_0 = ax^2 + bx + c$ 的极值存在且不为 0.

这样，形如 $y = \frac{a'x^2 + b'x + c'}{ax^2 + bx + c}$ 的函数，只要先变形为 $y = R + \frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c}$ 的形式，然后依定理判断 $y_1 = \frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c}$ 是否存在极值. 若存在，再利用判别式法即可求得其极值.

例如，下列函数是否存在极值，若存在，试求出其极值.

（1） $y = \frac{4x - 1}{3x^2 - 7x - 2}$；

（2） $y = \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$；

（3） $y = \frac{6x^2 - 4x + 3}{3x^2 - 2x + 1}$.

解：（1） 由于 $A = 4 \neq 0$

而 $\Delta = (-7)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-2)$

$= 73 > 0$