北京市教委特色专业建设资助项目

首都经济贸易大学统计学前沿文库

金融保险风险模型研究

JINRONG BAOXIAN FENGXIAN MOXING YANJIU

聂高琴/著

首都经济贸易大学出版社

北京市教委特色专业建设资助项目

首都经济贸易大学统计学前沿文库

金融保险风险模型研究

JINRONG BAOXIAN FENGXIAN MOXING YANJIU

聂高琴／著

首都经济贸易大学出版社

·北京·

图书在版编目(CIP)数据

金融保险风险模型研究/聂高琴著. —北京：首都经济贸易大学出版社，2009.12

ISBN 978-7-5638-1744-3

Ⅰ.金… Ⅱ.聂… Ⅲ.①金融—风险管理—研究②保险—风险管理—研究 Ⅳ.F830.2 F840.32

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 172685 号

金融保险风险模型研究

聂高琴 著

出版发行	首都经济贸易大学出版社
地　　址	北京市朝阳区红庙（邮编 100026）
电　　话	(010)65976483　65065761　65071505(传真)
网　　址	http://www.sjmcb.com
E-mail	publish@cueb.edu.cn
经　　销	全国新华书店
照　　排	首都经济贸易大学出版社激光照排服务部
印　　刷	北京泰锐印刷有限公司
开　　本	787 毫米×960 毫米　1/16
字　　数	101 千字
印　　张	5.75
版　　次	2009 年 12 月第 1 版第 1 次印刷
书　　号	ISBN 978-7-5638-1744-3/F·996
定　　价	15.00 元

出版总序

社会发展离不开数据，而数据必须使用统计方法来加以分析。自威廉·配第《政治算术》始，历史上几乎每一次对社会经济发展的深刻理解都是建立在统计分析方法变革的基础上的。正是这种变革所提供的各种数据分析工具加深了人们对社会经济本质的理解，使得人们的认识能够还原真实世界并与之无限接近。统计学数百年的发展历经两次方法上的“革命”：从最初不完整的全面调查方法到大样本统计推断，是统计方法的第一次革命；以大样本统计推断方法为基础，逐步发展出小样本统计推断方法，是统计方法的第二次革命。这两次革命都是建立于用样本数据推断总体特征这一思想，而抽样误差的干扰导致统计方法日益复杂，使其应用受到限制。目前，以数据挖掘方法为代表的统计学的第三次革命即将到来。数据挖掘是在继承已有统计理论的基础上，与计算机技术紧密结合，充分发挥计算机运算速度快、存储量大的特点，将统计方法从抽样推断向海量数据分析推进，是统计学、计算机技术、仿真计算、机器学习、人工智能甚至哲学思想相融合的新学科，体现了科学发展“螺旋式上升”的哲学内涵。

统计学的发展过程不只是方法上的创新过程，更是一个统计学应用领域不断拓展的过程。从宏观经济计量、宏观经济统计分析，到涵盖消费、收入分配、投资、对外贸易等领域的宏观经济统计专题分析、博弈论等传统经济统计学以及国民经济核算等，再到如今在金融统计、财政统计、精算与风险管理、管理统计或商务统计（含企业微观统计、微观金融、微观核算、微观经济计量等）、市场调查、数据挖掘、质量控制与试验设计等社会经济生活方方面面的广泛应用，统计学的思想和方法无处不绽放出闪耀的光芒，为引领人类社会朝着客观、公平、公正的方向发展提供了必不可少的工具，同时也

为政策制定和决策提供了广泛而坚实的数据基础。

首都经济贸易大学统计学院是全国首家将统计学和数学融合在一起的统计学院,注重从方法的深入研究和应用领域的积极开拓两个方面进行发展,是实现统计学全面而迅速地与国际实质性接轨的先行者。近年来,该学院不断吸收国外统计前沿思想的精髓,引进高端人才,加强国际交流与合作,产生了一大批具有重要价值的前沿成果。本套丛书就是从中挑选出来的优秀成果之一,充分展示了首都经济贸易大学统计学院当前的研究方向和科研实力。

本套丛书的执笔人均为首都经济贸易大学统计学院处于教学科研一线岗位的具有博士学位的青年教师,他们思维活跃,在充分掌握当代数理统计理论与方法的基础上,对实际问题展开了深入而具体的研究,在翔实的数据基础上,对社会经济生活发展的多方面提出了谏言。本套丛书的研究范围具体涵盖了收入分配、宏观经济分析、金融计量、金融数学、数理统计、市场调查、数据挖掘等方向的前沿内容。从这些著作当中,可以清晰地看到他们深厚的统计理论功底与解决实际应用问题的能力,从而为推动统计学真正与国际接轨和良好发展打下了坚实的学术基础。

纪　宏

2009 年 11 月

目 录

1　绪　论

1.1　研究目的和意义

在日益繁荣的现代社会,人类生活面临着诸多现实存在和潜在的各种风险。尽管人们无法预测或完全防范风险的发生,但可以通过购买保险来转移和分散风险。保险公司就是以承担风险、调节风险为主要业务的金融企业,其本身具有高风险特征。风险对于保险公司而言,是一把双刃剑,处理得当就意味着滚滚利润;一旦失控,公司将陷人破产深渊。为了能够持续盈利,更为了永久生存,保险公司必须不断磨砺自身管理风险的技能,以避免灾难性的损失;但同时还要承担更多的风险,拓展业务。因此,保险公司作为给他人提供保险保障的专业机构,对自身所经营风险进行正确和全面的认识是保障公司稳定经营的前提,其自身的风险管理无疑对公司的财务稳定和长远发展有着极其重要的意义。

风险理论是当今精算界和数学界研究的热门课题,是经营者和决策者对风险进行定量分析和预测的一般理论,其来源于保险公司的可行性研究。风险理论主要是利用概率论和随机过程的知识,处理保险事务中的随机风险模型,进而定量分析破产风险,为保险公司提供早期的预警系统,以提高保险业的经营管理能力和自身的竞争力。风险理论的核心内容是研究保险公司的破产问题,该问题的研究有其深刻的应用背景。在保险实务中,破产概率已成为衡量保险公司偿付能力的重要指标,是评估保险机构金融风险及其重要性的尺度。破产问题是保险公司业务经营和风险管理面对的重要问题,历来是保险公司极其重视的。因此,研究破产问题的风险理论,是防范和化解金融风险的重要理论依据,是保险公司度量风险的理论基础,对保险公司的稳定经营有着重要的指导意义。

1.2 研究背景和方法

在风险理论的发展过程中,早期对其作出贡献的有 Edmund Halley 和 Daniel Bernoulli。前者构造了世界上第一张生命表,后者提出了以极大效用原理作为决策法则的思想。较为系统的风险理论形成于20世纪初叶。现已公认,风险理论的研究溯源于瑞典精算师 Filip Lundberg,他在文献[1~3]中指出齐次 Poisson 过程是保险公司负债数据的一个主要模型。Lundberg 工作的严格化是以 Harald Cramér 为首的瑞典学派完成的,Cramér 将 Lundberg 的工作奠立在结实的数学基础之上,可参见文献[4~6],他们建立了风险理论与随机过程理论研究之间的关系。事实上,一类最重要的随机过程,即 Poisson 过程,正是 Lundberg 首次在其博士论文中提出的。Lundberg 和 Cramér 的工作被公认为经典风险理论的基本定理,其最为著名的成果是获得了经典风险模型下保险公司最终破产概率的 Cramér-Lundberg 型上界和 Cramér-Lundberg 逼近。

继 Cramér 之后,Hans Gerber 成为当代风险理论的国际领先学者。他在1979 年写的《An Introduction to Mathematical Risk Theory》[7]一书,以严谨的概率论基础,简练清晰地论述了非寿险中的主要课题,在国际精算界广为留传,现已成为研究这一领域的经典著作。J. Grandell 在为他的著作《Aspects of Risk Theory》[8]所写的序言中指出:“任一掌握了 Gerber 著作[7]中所述的风险论知识的读者皆可视为是一精算师”。Gerber[9]首次将鞅方法引入风险理论的研究中,大大简化了推理过程,并得到了许多优美的结果。构造适当的鞅已成为处理破产问题最为常用的方法之一,如 Harrison[10]、Paulsen[11]、Dassios 和 Embrechts[12]等都采用了鞅证明技巧。Gerber 等不仅将鞅方法引入风险论中,而且深化了经典风险论的研究内容。Gerber[13]通过扩散过程来刻画通货膨胀等随机因素的影响,提出了带干扰的经典 Poisson 风险模型,首次把破产概率分解为与摆动和跳跃有关的分量形式,令人耳目一新,这项研究为理论与实际问题的探索开拓了新领域。Dufresne 和 Gerber[14]利用后向差分法,发现了该模型下生存概率满足的更新方程和卷积形式的表达式,Wang[15]证明了破产概率作为初始资金的函数的二次连续可微性,从而为

经典风险论中有关可微性的前提假定提供了保证。

经典风险理论的研究以往大都集中在破产概率的计算与估计上，研究范围较窄。由于保险业本身的需要和发展，进入20世纪80年代以后，许多与破产有关的问题开始被关注。Gerber等对于经典风险论的另一贡献是引入另外两个刻画保险公司破产情形的随机变量：破产前盈余与破产时赤字。Dufresne和Gerber[16]研究了破产前盈余与破产时赤字的联合分布，并将其密度表示为破产前盈余密度的函数形式。Dickson[17]、Willmot和Lin[18]及Schmidli[19]讨论了破产前盈余分布、破产时赤字分布的性质及其与破产概率之间的关系。Gerber[20]考虑了作为破产前盈余与破产时赤字的二元函数的罚金折现的期望值，并指出此期望值作为初始准备金的函数，是某个瑕疵更新方程的解。Lin和Willmot[21]通过复合几何随机变量的分布，给出了此瑕疵更新方程的明确解。Tsai和Willmot[22]、Chiu和Yin[23]在带干扰的环境下，进一步探讨了罚金折现函数，从而得到了一些相应的结果。

经典风险模型虽然简单明了，结果优美，但是忽略了诸如利息、折现等经济环境因素。而在实际生活中，这些因素客观存在，势必影响到保险公司的经营状况。近年来，带利率的风险模型是风险分析研究中的热点之一。Sundt和Teugels[24]在常利率的条件下，得到了复合Poissin模型下破产概率的相关估计。Yang[25~27]运用[24]中的类似方法，得到了常利率下破产前盈余、破产时赤字的联合分布及边缘分布的积分方程与上下界。此后，出现了大量这方面的文献，如Sundt和Teugels[28]、Klüppelberg和Stadtmüller[29]、Cai和Dickson[30]。

早期的Cramér-Lundberg模型采用齐次Poisson过程来描述索赔的到达。而对Poisson过程最自然的推广是更新过程。Andersen[31]首先用更新过程来表示理赔过程，建立了Sparre Andersen风险模型。一类特殊的更新过程是索赔到达间隔时间服从Erlang(2)分布的点过程——Erlang(2)过程，随着Erlang(2)过程在排对论中被日益充分研究，人们发现有些理赔过程能够很好地利用Erlang(2)过程来近似。Dickson和Hipp[32][33]利用更新论证，研究了Erlang(2)风险模型的终极生存概

率和破产时刻矩的问题；Cheng 和 Tang[34]则考虑了破产前盈余额和破产时亏损额的矩；孙立娟和汪荣明[35]给出了生存概率所满足的微积分方程和指数型积分方程。

考虑风险及规模变化的一个自然的办法是用 Cox 过程来描述索赔的发生。Cox 过程是在允许强度随机变化意义下对 Poisson 过程的推广，把它作为刻画“风险波动”的模型比较合适，这更能反映保险公司的实际运作情况。Ammeter[36]最早把 Cox 过程用于保险风险中，Grandell 的专著[8]重点讨论了索赔次数过程为 Cox 过程的情形，其单位时间内的保费收入假定为常数。但在保险实务中，保费收入会受到许多因素的影响，如公司的瞬时盈余、市场中的利率和通货膨胀率等。于是有学者探讨了保费随机变化的 Cox 风险模型，如：Jasiulewicz[37]研究了一类保费率依赖于当前盈余的 Cox 风险模型，获得了破产概率的积分方程；Wu 和 Wei[38]则讨论了保费收入随索赔强度而变化的 Cox 风险过程，得到了生存概率的积分方程，并通过 Laplace 变换求解了该方程；Liu 和 Hu[39]在[38]的基础上，考虑了带干扰且变保费的 Cox 模型下生存概率的渐近性质。关于变保费风险模型的研究还可参见 Asmussen[40]。

最近几年，随机控制理论在处理保险风险问题中逐渐得到很好的应用和发展。显然，市场中有很多控制变量可以随我们所用，如投资、再保险、新风险业务等。给定一个最优化标准和一定的控制变量，通过标准的控制工具 HJB 方程，最优解可以定义出来，甚至计算出来，值函数的光滑性也可以证明。Browne[41]是最早把索赔过程和投资考虑在同一个模型中，他得到一个令人惊讶的结果：最小化破产概率的最优投资策略是保险公司投资固定数量的资金在风险市场中。Hipp 和 Taksar[42]将经典 Poisson 模型的研究扩展到新险种控制问题中，讨论了保险公司为使破产概率达到最小应采取的新险种业务最优比例问题，但他只证明了最优解的存在性，未能给出其显示解。

1.3 本书研究内容

经典风险模型总是假定保险公司单位时间内的保费收入一成不变。而

在实际生活中,保险公司的保费率会随着公司瞬时盈余的多寡和随机环境的变化而有所调整。本书第二章考虑保单的到达过程为 Poisson 过程,且每次收取的保费设为随机变量,同时考虑到随机因素的影响,研究了带干扰的双 Poisson 风险模型,得到了破产概率的一般公式和 Lundberg 上界;借鉴 Wang 等[15][43]中的方法,利用风险过程的齐次强马氏性,获得了破产前最大盈余分布与破产时赤字分布的积分方程。

Gerber 和 Shiu[20]首次在经典模型下,提出罚金折现期望函数的概念,立即引起广大学者的兴趣。本书第三章考察 Erlang(2)风险模型的罚金函数性质。对于常利率下的 Erlang(2)风险过程,利用更新论证,得到了罚金函数的微积分方程及破产前盈余和破产时赤字联合分布的递推公式,且在无利率的特殊情形下,获得了罚金函数的瑕疵更新方程和卷积形式的解,从而推广了[33][34]中的一些相应结果。Lin 和 Willmot[44]在复合 Poisson 模型下,考虑了一类红利政策对罚金函数的影响,但其假定红利的发放率与保费率相等,必然会导致公司以概率 1 破产。鉴于此,本书第三章还在一种更贴近保险实务的红利政策下,研究了保险公司发放红利时 Erlang(2)风险过程的罚金函数,采用一定的数学技巧,获得了有红利时罚金函数与无红利时罚金函数之间的关系,并给出了数值例子。

本书第四章主要研究了强度过程为马氏跳过程的 Cox 风险模型。首先,考虑了带常利率的 Cox 风险过程,利用 Cox 过程的性质,得到了条件罚金函数与平稳情形时罚金函数的积分方程。其次,讨论了带扩散扰动项且保费率依赖索赔强度的 Cox 风险模型,获得了罚金期望值的瑕疵更新方程和 Cramér-Lundberg 渐近性质。最后,我们建立了一类双险种的 Cox 风险过程,并假定两类风险的索赔次数过程彼此相关,利用鞅论的知识,给出了破产概率的 Lundberg 型上界。

经典风险论假定索赔过程具有独立增量,而在保险实务中,索赔到达往往存在某种相依性。Ambagaspitiya[45]和 Cossette[46]分别针对连续时间风险模型与离散时间风险模型,构造了不同风险业务索赔到达过程之间的相依性。在[47]中,Guo 等建立了一类主索赔和副索赔与时间相关的风险模型,得到了破产概率的上下界。本书第五章讨论该模型的罚金函数问题,利

用 Rouchér 定理和 Laplace 变换，求解了罚金函数所满足的微积分方程，并通过数值例子，获得了破产前瞬时盈余的折现概率密度。

本书第六章研究了常利率下保险风险的一类最优控制问题，即保险公司为使破产概率达到最小，如何选择新风险业务的最优比例问题。通过随机控制理论，导出了最优比例和最小破产概率的明确表达式，并利用数值例子，分析了利率因素和初始资金对最优比例及破产概率的影响。

2 随机保费率下带干扰的风险模型

经典风险模型的一个基本假定为:单位时间按常速率取得保单。而在实际情况下,保险公司受风险经营中诸多因素的影响,单位时间内收到的保单数往往是随机变化的。孙立娟等[48]采用 Poisson 过程来描述保单的到达次数,但其每次收取的保费依然假定为常数。在保险实务中,保费率并不是一成不变的,有的与奖惩相结合,有的与利率变动相结合,有的要根据公司的盈余进行一定的调整。本章将保费收入推广为复合 Poisson 过程,同时考虑到随机因素的存在,通过添加 Brownian 运动来刻画其影响,建立了带扰动的双 Poisson 盈余过程,从而将破产概率的表达式和指数上界推广到了更一般的情形,并利用风险过程的齐次强马氏性,得到了破产前最大盈余分布与破产时赤字分布的积分方程。

2.1 模型的引入

定义 **2.1.1** 设 $u\geqslant 0,\sigma>0$,在某概率空间(Ω,F,P)上,给定:

1)取值于$(0,+\infty)$上的独立同分布随机变量序列 $C=\{C_i\}_{i=1}^{+\infty}$,且 C_i $(i\geqslant 1)$的分布函数为 G,p_k 表示其 k 阶矩;

2)参数为 $\alpha(0<\alpha<+\infty)$的齐次 Poisson 过程 $M=\{M(t),t\geqslant 0\}$;

3)取值于$(0,+\infty)$上的独立同分布随机变量序列 $X=\{X_j\}_{j=1}^{+\infty}$,且 X_j $(j\geqslant 1)$的分布函数为 F,f_k 表示其 k 阶矩;

4)参数为 $\beta(0<\beta<+\infty)$的齐次 Poisson 过程 $N=\{N(t),t\geqslant 0\}$;

5)标准 Brownian 运动 $W=\{W(t),t\geqslant 0\}$;

6)假定过程 C,M,X,N,W 相互独立.

令

$$R(t) = u + \sum_{i=1}^{M(t)} C_i - \sum_{j=1}^{N(t)} X_j + \sigma W(t), t \geqslant 0. \tag{2.1.1}$$

$$S(t) = \sum_{i=1}^{M(t)} C_i - \sum_{j=1}^{N(t)} X_j + \sigma W(t), t \geqslant 0. \tag{2.1.2}$$

则称过程$\{R(t), t \geqslant 0\}$为随机保费率下带干扰的风险模型，称过程$\{S(t), t \geqslant 0\}$为盈利过程。

实际应用描述：$u \geqslant 0$表示保险公司的初始资本；$M(t)$为保单到达过程，即表示保险公司在$(0,t]$内收到的保单数，C_i为第i张保单的保费额；$N(t)$为理赔过程，即表示$(0,t]$内发生的理赔次数，X_j为第j次的理赔额；$W(t)$表示风险经营中随机因素的影响。$R(t)$则为保险公司在时刻t的盈余资本，$S(t)$则是保险公司在时刻t的盈利。由定义易知，盈余过程$\{R(t), t \geqslant 0\}$具有平稳独立增量。

为了保证公司的稳定经营，假定$\alpha p_1 > \beta f_1$，由此定义安全负荷系数为：

$$\rho = \frac{\alpha p_1}{\beta f_1} - 1 > 0.$$

破产时刻为：$T_u = \inf\{t \geqslant 0 : R(t) \leqslant 0\}$，以及最终破产概率为：

$$\psi(u) = P(T_u < \infty \mid R(0) = u).$$

记

$$h(r) = \int_0^{+\infty} e^{rx} dF(x) - 1,$$

且假定$\exists r_\infty > 0$，使得：当$r \uparrow r_\infty$时，$h(r) \to +\infty$，允许$r_\infty = +\infty$（见文献[8]第一章假设4）.

2.2 破产概率的一般公式与指数上界

引理 **2.2.1** 对于盈利过程$\{S(t), t \geqslant 0\}$，存在函数$g(r)$，使得$Ee^{-rS(t)} = e^{tg(r)}$，并且方程$g(r) = 0$存在唯一的正解R，并称之为调节系数。

证明 由于过程C, M, X, N, W相互独立，则有：

$$Ee^{-rS(t)} = E\left[\exp\left(-r\sum_{i=1}^{M(t)} C_i + r\sum_{j=1}^{N(t)} X_j - r\sigma W(t)\right)\right]$$

$$= E\left[\exp\left(-r\sum_{i=1}^{M(t)} C_i\right)\right]\cdot E\left[\exp\left(r\sum_{j=1}^{N(t)} X_j\right)\right]\cdot E[\exp(-r\sigma W(t))]$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(\alpha t)^m e^{-\alpha t}}{m!}[M_{C_i}(-r)]^m\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\beta t)^n e^{-\beta t}}{n!}[M_{X_j}(r)]^n\cdot e^{\frac{r^2\sigma^2 t}{2}}$$

$$= \exp\left\{\left[\alpha(M_{C_i}(-r)-1)+\beta(M_{X_j}(r)-1)+\frac{r^2\sigma^2}{2}\right]t\right\}.$$

从而

$$g(r)=\alpha(M_{C_i}(-r)-1)+\beta(M_{X_j}(r)-1)+\frac{r^2\sigma^2}{2}$$

其中,$M_{C_i}(\cdot)$,$M_{X_j}(\cdot)$分别表示保费额和理赔额的矩母函数。于是,

$$g(0)=0, g'(0)=-\alpha p_1+\beta f_1<0,$$

$$g''(r)=\alpha E[C_i^2 e^{-rC_i}]+\beta E[X_j^2 e^{rX_j}]+\sigma^2>0.$$

即 $g(r)$为凸函数,故方程 $g(r)=0$ 至多有两个解,$r=0$ 为其平凡解。且当 $r\uparrow r_\infty$时,有 $g(r)\uparrow+\infty$。因此,方程 $g(r)=0$ 有且只有一个正解,记为 R。

即引理得证。

定理 **2.2.1** 对于风险模型$\{R(t),t\geqslant 0\}$,其最终破产概率为

$$\psi(u)=\frac{e^{-Ru}}{E[e^{-R\cdot R(T_u)}\mid T_u<\infty]},$$

式中,R 为调节系数。

证明 由全概率公式知:

$$E[e^{-rR(t)}]=E[e^{-rR(t)}\mid T_u\leqslant t]P(T_u\leqslant t)+E[e^{-rR(t)}\mid T_u>t]P(T_u>t). \tag{2.2.1}$$

由 $R(t)=u+S(t)$知,

$$E[e^{-rR(t)}]=e^{-ru}E[e^{-rS(t)}]$$

$$=\exp\left\{-ru+\left[\alpha(M_{C_i}(-r)-1)+\beta(M_{X_j}(r)-1)+\frac{r^2\sigma^2}{2}\right]t\right\}.$$

记(2.2.1)式右端第一项为 K_1,在 K_1 中,将 $R(t)$写成:

$$R(t)=R(T_u)+R(t)-R(T_u)=R(T_u)+S(t)-S(T_u).$$

对于给定的 T_u,$S(t)-S(T_u)$与 $R(T_u)$独立,于是有:

$$K_1=E[e^{-rR(T_u)}\cdot e^{-r(S(t)-S(T_u))}\mid T_u\leqslant t]P(T_u\leqslant t)$$

$$=E[\exp\{-rR(T_u)\}\cdot\exp\{[\alpha(M_{C_i}(-r)-1)+\beta(M_{X_j}(r)-1)$$

$$+\frac{r^2\sigma^2}{2}](t-T_u)\}\mid T_u\leqslant t]P(T_u\leqslant t).$$

取 $r=R$,即为调节系数,利用引理2.2.1,则式(2.2.1)可化简为:

$$e^{-Ru}=E[e^{-R\cdot R(T_u)}\mid T_u\leqslant t]P(T_u\leqslant t)+E[e^{-R\cdot R(t)}\mid T_u>t]P(T_u>t). \tag{2.2.2}$$

当令 $t\to\infty$ 时,式(2.2.2)右端第一项即为:

$$E[e^{-R\cdot R(T_u)}\mid T_u<\infty]P(T_u<\infty).$$

若能证明当 $t\to\infty$ 时,式(2.2.2)右端第二项(记为 K_2)趋于0,则定理得证。

于是,记 $\eta=\alpha p_1-\beta f_1$,$\theta^2=\alpha p_2+\beta f_2+\sigma^2$,有:

$$E[R(t)]=u+\alpha p_1t-\beta f_1t=u+\eta t,Var[R(t)]=(\alpha p_2+\beta f_2+\sigma^2)t=\theta^2t.$$

考察:$\Lambda=u+\eta t-\theta t^{\frac{2}{3}}$,只要 t 充分大,则 Λ 是正的,且当 $t\to\infty$ 时,$\Lambda\to\infty$。现将 K_2 用 $R(t)$ 与 Λ 的值拆成两项,即得:

$$\begin{aligned}K_2&=E[e^{-R\cdot R(t)}\mid T_u>t,0\leqslant R(t)\leqslant\Lambda]P(T_u>t,0\leqslant R(t)\leqslant\Lambda)\\&\quad+E[e^{-R\cdot R(t)}\mid T_u>t,R(t)>\Lambda]P(T_u>t,R(t)>\Lambda)\\&\leqslant P(0\leqslant R(t)\leqslant\Lambda)+e^{-R\Lambda}.\end{aligned}$$

由 Chebychev 不等式知:

$$P(0\leqslant R(t)\leqslant\Lambda)\leqslant P(\mid R(t)-E[R(t)]\mid\geqslant\theta t^{\frac{2}{3}})\leqslant\frac{Var[R(t)]}{\theta^2t^{\frac{4}{3}}}=t^{-\frac{1}{3}}.$$

于是,当 $t\to\infty$ 时,$K_2\to0$。故,令 $t\to\infty$,由式(2.2.2)可得:

$$\psi(u)=\frac{e^{-Ru}}{E[e^{-R\cdot R(T_u)}\mid T_u<\infty]}.$$

定理证毕。

因为,当 $T_u<\infty$ 时,有 $R(T_u)\leqslant0$,从而根据定理2.2.1有如下结论:

推论 **2.2.1** 对于风险模型$\{R(t),t\geqslant0\}$,其最终破产概率满足 Lundberg 不等式:

$$\psi(u)\leqslant e^{-Ru}.$$

这是破产概率的一个指数上界,只与调节系数和初始资本有关,即将 Lundberg 不等式推广到了更一般的情形。

下面将通过具体实例,分析破产概率与初始资本、保费额及理赔额之间