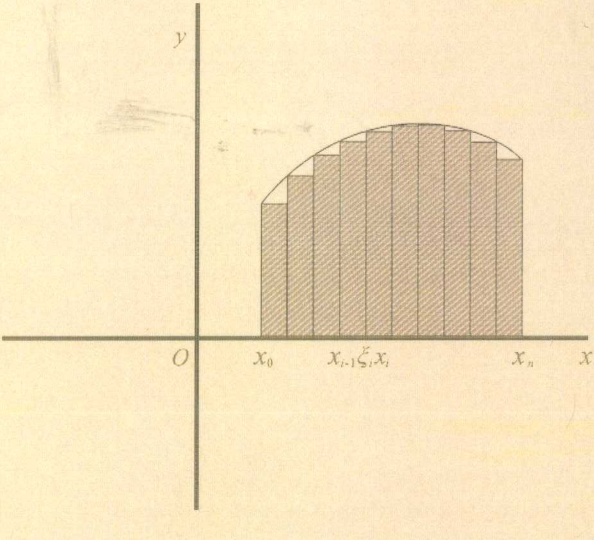
21世纪高等院校文科类通用教材

微积分

主　编　庞淑萍
副主编　孟桂芝　胡艳红　王贵艳



知识产权出版社

21 世纪高等院校文科类通用教材

微 积 分

主 编 庞淑萍

副主编 孟桂芝 胡艳红 王贵艳

知识产权出版社

内容提要

本书是作者在多年教学实践和吸收我国“十五”期间高职高专经济管理类高等教学教改成果的基础上编写而成。作者在编写过程中突出三个基本，即“基本概念、基本思想 、基本方法”，力求使学生在较为系统地掌握数学概念、思想和方法的同时，掌握数学的基本理论，为他们今后的工作与学习打下必要的数学基础。

本书既适合文科类本科院校使用，也适合成人高校及高职高专和民办高校使用，还可作为经济管理人员更新知识的自学或者参考用书。

责任编辑：李　琳　　**责任出版**：卢运霞
文字编辑：胡文彬　　**装帧设计**：开元图文

图书在版编目（CIP）数据

微积分/庞淑萍主编. — 北京：知识产权出版社，2010.5
ISBN 978-7-80247-981-4
Ⅰ.①微… Ⅱ.①庞… Ⅲ.①微积分-高等学校：技术学校-教材 Ⅳ.①O172
中国版本图书馆 CIP 数据核字（2010）第 060423 号

微　积　分
WEIJIFEN
庞淑萍　主编

出版发行：知识产权出版社	
社　　址：北京市海淀区马甸南村 1 号	**邮　　编**：100088
网　　址：http：//www.ipph.cn	**邮　　箱**：bjb@cnipr.com
发行电话：010-82000860 转 8101/8102	**传　　真**：010-82005070/82000893
责编电话：010-82000860 转 8031	**责编邮箱**：huwenbin@cnipr.com
印　　刷：知识产权出版社电子制印中心	**经　　销**：新华书店及相关销售网点
开　　本：880mm×1230mm　1/32	**印　　张**：8
版　　次：2010 年 5 月第 1 版	**印　　次**：2010 年 5 月第 1 次印刷
字　　数：210 千字	**定　　价**：25.00 元

ISBN 978-7-80247-981-4/O·008（10289）

前　言

教材作为学校教学内容和教学方法的知识载体,在深化教育教学改革、全面推进素质教育、培养创新人才中有着举足轻重的地位。在编写教材的过程中,注重以实例引入概念,体现数学应用的思想,加强学生对数学的应用意识和兴趣;注重对学生能力的培养,注意提高学生基本素质,突出重点,强化对难点的理解、消化,对一些重点问题给出说明或者注意。在教材编写过程中,我们主要遵循以下原则:

1. 尽量从实际出发,注重概念与定理的直观描述和微积分实际背景,克服学生在数学认知上的心理障碍,逻辑推理做到适可而止。

2. 尽量使抽象的概念形象化,使繁琐的计算简单化。注重知识的生动性和趣味性,减少了过难过繁的计算技巧,使学生不但理解枯燥的概念,还能形象理解并在实际中会应用相应的思维方式。

3. 教材内容上,通过实例剖析问题、研究式理念引入数学概念,使微积分内容不脱离实际,生动易懂,学有所用,学而会用。具有一定数学基础的本专科学生都可通过本教材自学;从知识点讲述到例题、习题都体现时代特色。教学设计上为节约课时,添加部分选学内容,让有进一步学习愿望的学生自主学习。教学方法上简洁易懂,融入教学,帮助学生分析、计算。在编写中保证基础、精选内容,在保证微积分理论的严谨性和系统性前提下,突出问题背景,避免内容繁杂,篇幅巨大。

全书共分九章,主要内容包括函数、极限、连续;导数与微分;导数的应用;不定积分与定积分;偏导数与全微分;二重积分;级数。在不同的章节,增添一些带星号内容作为选学,书后还附有各章的习题与参考答案。

本书由庞淑萍、孟桂芝、胡艳红 、王贵艳编写。哈尔滨金融高等

专科学校的庞淑萍编写第一章、第二章、第三章及第四章的一、二、三节；哈尔滨理工大学的孟桂芝编写第七章、第九章；哈尔滨师范大学的胡艳红编写第五章、第六章、第八章；哈尔滨金融高等专科学校的王贵艳编写第四章第四节的内容。全书的结构安排、统稿、定稿工作由庞淑萍承担。本书由哈尔滨金融高等专科学校的白素英教授担任主审，她对本书的编写进行指导，提出了许多宝贵的意见。知识产权出版社的编辑为本书的出版付出了辛勤劳动，在此一并表示衷心的感谢。

由于编者水平有限，编写时间比较仓促，书中难免有不妥之处，我们衷心地希望得到专家、同行和读者的批评指正，使本书在教学实践中不断完善起来。

所有意见和建议请发往：pspjilin@ sina. com，编者不胜感谢。

编者

2010 年 3 月

目　　录

第1章 函　　数

函数是高等数学中最重要的基本概念之一,也是微积分研究的主要对象.极限也是高等数学中的基本概念,极限论是近代微积分的理论基石,近代微积分的许多重要概念都是用极限作为工具来定义的.本章的内容包括函数的概念和各种性质、极限理论以及连续函数等.这些内容是整个高等数学的基础知识.

1.1　实数的概述

在这一节的内容中,我们将要讨论三个问题,即实数的数轴、绝对值、区间和邻域的概念.

1.1.1　实数及集合

定义 1.1.1　具有某种属性的事物的全体,构成**集合**.一般用大写的字母 $A,B,M\ldots$ 等表示;构成集合的事物或对象,称为集合的**元素**,一般用小写字母表示.若事物 a 是集合 M 的元素,记为 $a\in M$;若事物 a 不是集合 M 的元素,记为 $a\notin M$.

由无限多个元素组成的集合,我们可以用如下记号表示:设 M 是具有某种属性特征的元素 x 的集合,就记做:$M=\{x\mid x$ 具有某种特征$\}$.

以前我们学过,全体自然数的集合记为 N,整数的集合记为 Z,有理数集合记为 Q,全体实数的集合记为 R.在以后的学习中,如果没有特别说明,所提到的数指的都是实数.

1.1.2　绝对值

定义 1.1.2　一个实数 x 的绝对值记为 $|x|$,定义为 $x=$

$$\begin{cases} x, & x \geqslant 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}.$$

绝对值 $|x|$ 的几何意义是：$|x|$ 表示数轴上的点与原点之间的距离(不论 x 在原点的左边还是右边).

绝对值有下列七个性质,如下：

(1) $|x| = |-x| \geqslant 0$,当且仅当 $x = 0$ 时,才有 $|x| = 0$

$x > 0, -|x| < x = |x|$;

(2) $-|x| \leqslant x \leqslant |x|$,事实上, $x < 0, -|x| = x < |x|$,

$x = 0, -|x| = x = |x|$,

因此,对任何实数 x 总有 $-|x| \leqslant x \leqslant |x|$;

(3) 若 a>0,则有：$\{x \mid |x| < a\} = \{x \mid -a < x < a\}$;

(4) 若 $b>0$,则有：$\{|x| > b\} = \{x \mid x < -b\} \cap \{x \mid x > b\}$;

(5)对于任意的实数 x 和 y 有不等式 $|x| - |y| \leqslant |x+y| \leqslant |x| + |y|$ 成立,称为三角不等式;

(6) $|xy| = |x| \times |y|$;

(7) $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}(y \neq 0)$.

1.1.3 区间与邻域

1. 区间

区间是微积分中常用的**实数集合**. 设 $a,b \in \mathbf{R}$,且 $a < b$;满足 $a \leqslant x \leqslant b$ 的实数 x 的集合称为**闭区间**,记为 $[a,b]$; 满足 $a < x < b$ 的实数 x 的集合称为**开区间**,记为 (a,b) ; 满足 $a \leqslant x < b$ 或 $a < x \leqslant b$ 的实数的集合称为**半开半闭区间**,记为 $[a,b)$ 或 $(a,b]$.

以上四种区间称为有限区间, a 与 b 叫做相应区间的**端点**, $b-a$ 称为**区间的长**.

实数集 R 区间表示为 $(-\infty, +\infty)$; $x \geqslant a(x > a)$ 记为 $[a, +\infty)$ $((a, +\infty))$; $x \leqslant b(x < b)$ 记为 $(-\infty,b]((-\infty,b))$.

以上三种区间都成为无限区间.

2. 邻域

微积分中还常用到邻域的概念. 在临近狭小的范围内考虑数的集合即为邻域. 以 x_0 为中心,以 δ 为半径的狭小的开区间称为**邻域**. 即开区间 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 或实数集 $\{x\,|\,|x-x_0|<\delta,\delta>0\}$,称为点 x_0 的 δ 邻域,或简称为 x_0 的邻域. x_0 为邻域中心, δ 为邻域半径.

去心邻域: 在 x_0 的 δ 邻域内"挖去"点 x_0 ,所得集合 $\{x\,|\,0<|x-x_0|<\delta,\delta>0\}$,称为 x_0 的**去心邻域**. 区间表示方法为 $(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta)$.

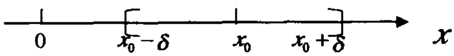


图 1.1

习题 1.1

用区间表示满足下列不等式的所有 x 的集合:

1. $|x+1|\leqslant 3$;

2. $|x-a|\leqslant\varepsilon(\varepsilon>0)$;

3. $1<|x-2|<3$.

1.2 函数的概念

1.2.1 函数的定义及常用表示法

中学阶段学过的函数有 $y=2^x,y=x^3,y=\log_2^x,y=\sin 3x,y=\arcsin x,\cdots$, 这些函数都是用来描述某一个动态的过程的,从动态的过程中提炼出相应的变量,并按照事物的规律建立起相应的数学表达式,从而用数学的语言来描述这一过程的.

定义 1.2.1 在某变化过程中有两个变量 x,y ,如果变量 $x\in A$, 在 A 内任取一个数值,按照某种对应法则,变量 y 都有唯一确定的数值与之对应,则称变量 y 是 x 的**函数**,记为

$$y=f(x),x\in A$$

其中 x 称为自变量，y 称为因变量. 自变量 x 的取值范围称为函数的定义域，y 的对应值称为函数值，全体函数值的集合称为函数的值域，f 称为函数的对应法则.

对于函数定义的理解要注意以下几个方面：

(1)函数的两要素：定义域、对应法则；函数的三要素：定义域、对应法则、值域.

(2) $x \in A$ 中的每一个 x 值，y 有唯一的确定值与之对应，是单值函数，如 $x = y^2$，$x = 4$，则 $y = \pm 2$，非定义中给出的函数关系，而被称为多值函数关系.

(3)同一函数的确定：定义域与对应法则必须一致，才能称为是同一函数；定义域、值域、对应法则一致的函数，称为同一函数.

(4)函数的对应法则 f，规定变量之间依照什么的规则、规矩、原则建立关系. 同一的自变量，规则不同，函数值就不一样；同一个规则 f，自变量不一样，函数值也不一样的.

$f(x)$ 表示将规则 f 使用于 x，括号中的 x 可以转换成定义域中的某个具体的数值或是表示数值的字母以及某个数学式子.

(5)函数的定义域：如果函数本给定了定义域，则按照定义域确定的自变量取值范围确定值域；如若函数没有定义域，则根据函数的性质，使函数有意义的全体实数就是它的定义域、值域；若函数研究的是实际问题，则根据实际问题确定定义域、值域.

函数的常用表示法有三种.

1. 解析法：自变量和因变量之间的关系用数学表达式（又称解析表达式）来表示的方法. 但是并非一个关于 x 与 y 的解析式一定表示一个函数关系. 如 $y = \sqrt{-2 - x^2}$，在实数范围内没有意义，不是一个函数关系.

2. 图像法：在坐标系中用图形来表示函数关系的方法.

3. 表格法：自变量的值与对应的因变量的值列成表格的方法.

例 1.2.1 确定函数的定义域 $y = \dfrac{1}{\sqrt{25 - x^2}} + \arcsin\dfrac{x-1}{5}$

解　根据函数,可以得不等式方程 $\begin{cases}25-x^2>0\\ \left|\dfrac{x-1}{5}\right|\leqslant 1\end{cases}$,

解之得

$$-4\leqslant x<5$$

例 1.2.2　判断下列两个函数是否是同一函数:$y=x$ 与 $y=\dfrac{x^2}{x}$

解　由于 $y=x$ 的定义域是 $x\in\mathbf{R}$,而 $y=\dfrac{x^2}{x}$ 的定义域是 $x\neq 0$ 的实数,所以不是同一函数.

例 1.2.3　判断 $y=\arcsin(2+x^2)$ 这个式子是否是函数关系?

解　根据函数的对应法则,不等式 $-1\leqslant 2+x^2\leqslant 1$ 成立,但是没有满足不等式的实数 x 存在,所以,$y=\arcsin(2+x^2)$ 体现的不是函数关系.

例 1.2.4　设 $f(x)=x^2$,求 $f(2)$,$f(a)$,$f(x+1)$,$f(-\dfrac{1}{y})$,$f[f(x)]$.

解　$f(2)=2^2=4$;$f(a)=a^2$;$f(x+1)=(x+1)^2$

$f(-\dfrac{1}{y})=(-\dfrac{1}{y})^2=\dfrac{1}{y^2}$;$f[f(x)]=[f(x)]^2=(x^2)^2=x^4$

习题 1.2

1. 求下列函数的定义域:

(1) $y=\dfrac{1}{x}-\sqrt{1-x^2}$;　　(2) $y=\ln(4-x^2)$;

(3) $y=\arcsin(\dfrac{x+1}{2})$;　(4) $f(x)=\begin{cases}1-x, & -1\leqslant x<0\\ 0, & x=0\\ -1-x, & 0<x\leqslant 2\end{cases}$.

2. 与列各题中的函数是否相同?为什么?

(1) $f(x)=\ln x^2$ 与 $g(x)=2\ln x$;

(2) $y=3x+2$ 与 $s=3t+2$;

(3) $f(x)=x+1$ 与 $g(x)=\sqrt{(x+1)^2}$.