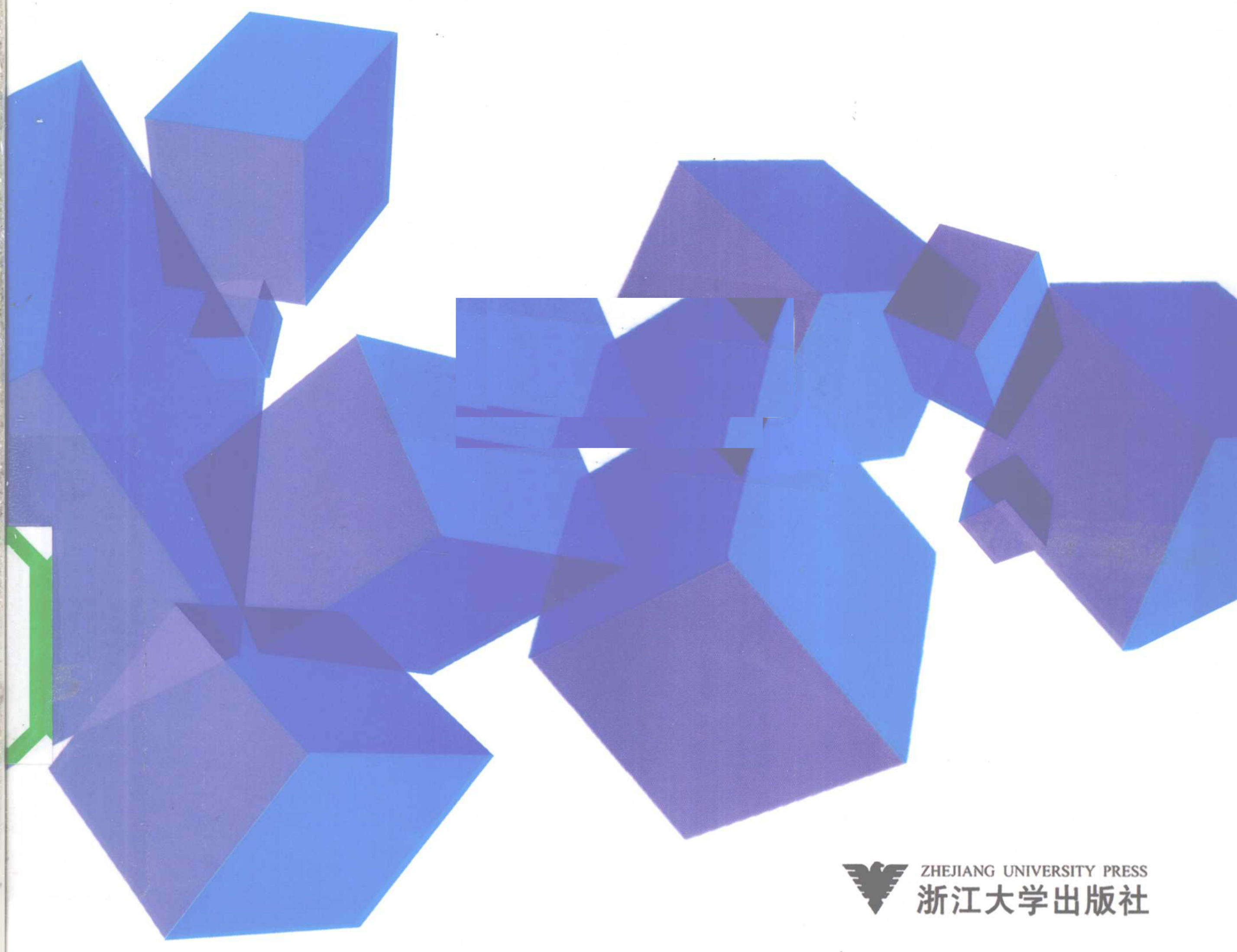
CHUZHONG SHUXUE JINGSAI PEIXUN JIAOCAI

初中数学竞赛培训教材 九年级

《初中数学竞赛培训教材》编委会 组编



ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

初中数学竞赛培训教材

九年级

《初中数学竞赛培训教材》编委会组编

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

初中数学竞赛培训教材．九年级／《初中数学竞赛培训教材》编委会组编．—杭州：浙江大学出版社，2010．1
ISBN 978-7-308-07238-0

Ⅰ．初… Ⅱ．初… Ⅲ．数学课—初中—教学参考资料
Ⅳ．G634．603

中国版本图书馆CIP数据核字（2009）第225841号

初中数学竞赛培训教材（九年级）

《初中数学竞赛培训教材》编委会组编

责任编辑　杨晓鸣　吴　慧（特邀）
封面设计　刘依群
出版发行　浙江大学出版社
（杭州天目山路148号　邮政编码310028）
（网址：http://www.zjupress.com）
排　　版　杭州好友排版工作室
印　　刷　富阳市育才印刷有限公司
开　　本　787mm×1092mm　1/16
印　　张　14
字　　数　340千
版 印 次　2010年1月第1版　2010年1月第1次印刷
书　　号　ISBN 978-7-308-07238-0
定　　价　24.00元

编写说明

数学竞赛源远流长，其功能一是激发学生的学习兴趣，二是通过竞赛发现一批数学苗子，三是为有数学天赋的学生提供一个展示能力的平台. 当然，还有许多其他的功能. 事实证明，数学竞赛活动开展以来，的确培养了一批拔尖的数学人才. 倡导数学竞赛不是全民皆兵，客观的看待数学竞赛，才能为数学竞赛创造一个良好的环境.

既不增加学生的负担，又要让学生轻松愉快地学习，使有余力的学生智力能得以开发，这是我们策划本教材的初衷. 本套教材共有三册，即七年级、八年级和九年级各一册；编写的宗旨是为初中学生提供一套适合中考和竞赛要求、提高学习能力的素材. 本教材重在训练学生的解题思路和解题技巧，注重将数学竞赛与中考结合起来，注意基础知识、基本技能与基本思想方法的训练；同时，注意培养学生的思维能力和创新能力，提高学生的素质，由浅入深，循序渐进.

本教材的例题与练习题，均以初中数学新课程标准和初中数学竞赛大纲为指导，极具代表性，且大部分是近五年来全国各地的中考与竞赛试题. 本丛书内容以年级为单位，按专题分类展开，去繁求简，去杂求精，力求系统性、全面性、实用性和工具性，使学生在知识与技能、数学思考、解决问题、情感与态度等方面得到进一步提升.

目　　录

惟一

1　平面直角坐标系和函数概念

知识精解

在同一平面内，两条互相垂直且有公共原点的数轴，就形成了一个平面直角坐标系．通常称水平正方向向右的数轴为横轴或 x 轴，竖直正方向向上的数轴为纵轴或 y 轴，公共原点称为平面直角坐标系的原点．

平面直角坐标系建立之后，能够对图形进行数量刻画，反之，对于数量表示的数学对象可以在平面直角坐标系中画出图像．因此，平面直角坐标系可以看作是实现“数形结合”的完美平台．即通过平面直角坐标系，用代数方法研究几何问题，或者用几何方法研究代数问题．

函数的定义，源于对“变化过程”的研究．因此，函数的定义是：设在一个变化过程中有两个变量 x 和 y，如果对于变量 x 在其取值范围内的任意一个值，变量 y 都有惟一确定的值与之对应，我们就称 x 是自变量，y 是 x 的函数．

几个一般性结论：

1．平面直角坐标系中的点 $P(x,y)$ 到 x 轴的距离等于 $|y|$，到 y 轴的距离等于 $|x|$，到原点的距离等于 $\sqrt{x^2+y^2}$．

2．直角坐标平面内，两点 $P_1(x_1,y_1)$ 和 $P_2(x_2,y_2)$ 之间的距离 $|P_1P_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$．

触类旁通

【例 1】 如图 1-1，向放在水槽底部的烧杯注水（流量一定），注满烧杯后，继续注水，直至注满水槽．水槽中水面上升高度 h 与注水时间 t 之间的函数关系，大致是图 1-2 图像中的（　　）

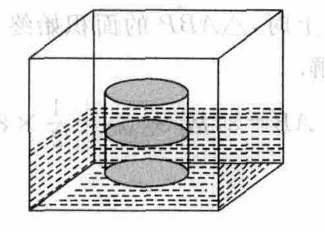


图 1-1

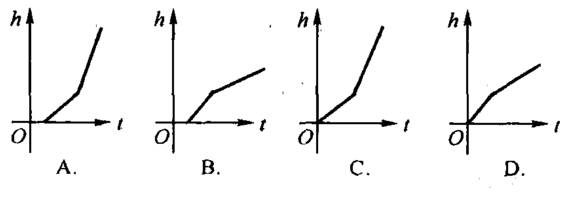


图 1-2

分析　烧杯中的水未满时，水槽中肯定不会有水．而且当水没有漫过烧杯上口时，水面上升的速度较快，然后会慢一些．用排除法可以很快解决．

解答　因为烧杯中的水未满时，水槽中肯定不会有水．故首先排除 C 和 D．由于水槽中有烧杯，故水槽中的水面上升速度是先慢后快，故答案只能选 A．

评注　这道题主要考查的是最简单的生活经验，同时考查了函数图像的理解与运用. 实际生活中量与量之间的关系可以形象地通过图像直观地表现出来，如心电图、股市行情走势图等. 图像中往往包含着丰富的信息. 解题的关键在于首先要关注图像横、纵坐标表示的量，然后要从图像的形状、位置、发展变化趋势等有关信息中获得启示.

【练习 1】　一天，小明和小强去登山，已知山脚到山顶的路程为 300 米，小明先走了一段路程，小强才开始出发. 图 1-3 中两条线段分别表示小明和小强离开山脚登山的路程（米）与登山所用的时间（分钟）的关系（从小强开始登山时计时），根据图像，下列说法错误的是　（　　）

A. 小强登山时，小明已走了 50 米

B. 小强走了 5 分钟，小明仍在小强的前面

C. 小明比小强晚到山顶

D. 小强前 10 分钟登山的速度比小明慢，10 分钟之后登山的速度比小明快

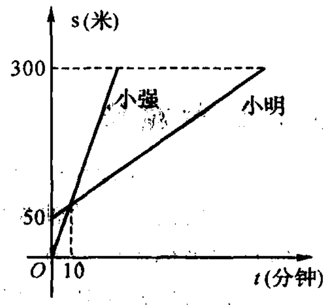


图 1-3

解答　由速度＝路程÷时间，以及图中给出的条件可知，小强比小明的速度快. 故直接可知答案选 D.

【例 2】　（2009 年全国初中数学竞赛）如图 1-4，在直角梯形 $ABCD$ 中，$AB /\!/ CD$，$\angle B=90^\circ$，动点 P 从点 B 出发，沿梯形的边由 $B\to C\to D\to A$ 运动. 设点 P 运动的路程为 x，$\triangle ABP$ 的面积为 y，把 y 看作 x 的函数，函数图像如图 1-5 所示，则$\triangle ABC$ 的面积为　（　　）

A. 10　　B. 16　　C. 18　　D. 32

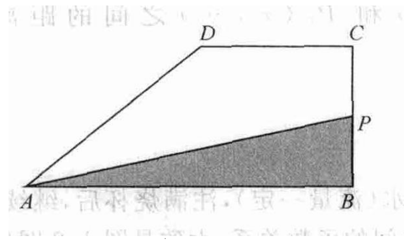


图 1-4

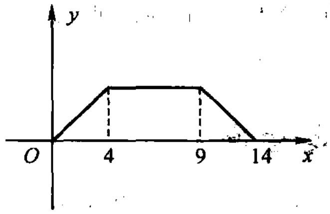


图 1-5

分析　由等底等高的三角形面积相等可知，当点 P 在 CD 上时，$\triangle ABP$ 的面积始终等于$\triangle ABC$ 的面积，由图像可知 $CD=5$，$BC=4$，$DA=5$，进而可求解.

解答　根据图像可得 $CD=5$，$BC=4$，$DA=5$，进而求得 $AB=8$，故 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times 8\times 4=16$.

故答案选 B.

评注　这道题主要考查的是三角形和梯形的面积公式，以及解读函数图像信息的能力. 解题时，由图像反映的信息求得梯形各边的长是关键.

【练习 2】　如图 1-6，在$\triangle ABC$ 中，$\angle C=90^\circ$，$AC=3$，$BC=4$，点 D 是 AB 上任意一点（A、B 两点除外），过 D 作 AB 垂线与$\triangle ABC$ 的直角边相交于 E，设 $AD=x$，$\triangle ADE$ 的面积为 y，当点 D 在 AB 上移动时，求 y 关于 x 之间的函数关系式.

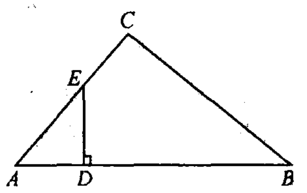


图 1-6

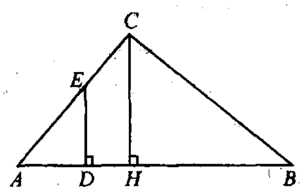


图 1-7

解答　如图 1-7 作 $CH\perp AB$，$CH=\frac{12}{5}$，$BH=\frac{16}{5}$.

(1)当 $0<x\leqslant\frac{9}{5}$，由$\triangle AED\backsim\triangle ACH$，得 $DE=\frac{4}{3}x$，所以 $y=\frac{1}{2}AD\cdot DE=\frac{2}{3}x^2$.

(2)当 $\frac{9}{5}\leqslant x<5$ 时，由$\triangle BED\backsim\triangle BCH$，得 $DE=\frac{3}{4}(5-x)$，所以 $y=\frac{1}{2}AD\cdot DE=\frac{3}{8}x(5-x)$.

综上所述，y 关于 x 之间的函数关系式为 $y=\begin{cases}\frac{2}{3}x^2, & (0<x\leqslant\frac{9}{5});\\ \frac{3}{8}x(5-x), & (\frac{9}{5}\leqslant x<5).\end{cases}$

【例 3】（美国高中数学竞赛题）如图 1-8，一个粒子在第一象限运动，在第一分钟内它从原点运动到(1,0)，而后它接着按图所示在与 x 轴、y 轴平行的方向上来回运动，且每分钟移动 1 个单位长度，那么在 1989 分钟后这个粒子所处位置为________.

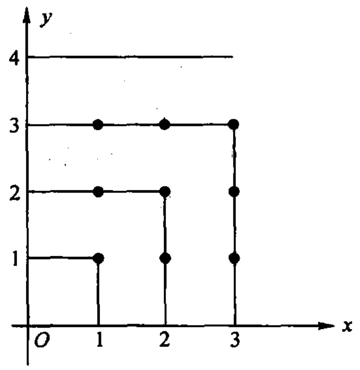


图 1-8

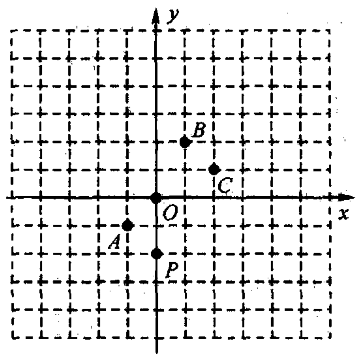


图 1-9

分析　观察图 1-8，粒子运动 3 分钟到达(0,1)，再运动 5 分钟到达(2,0)，再运动 7 分钟到达(0,3)，…，即当 n 为奇数时，运动$(3+5+7+\cdots+2n+1)$分钟到达$(0,n)$；当 n 为偶数时，运动$(3+5+7+\cdots+2n+1)$分钟到达$(n,0)$. 从而可求得 n 的值，然后顺次延续，可求得答案.

解答　由题意可得 $3+5+7+\cdots+2n+1<1989$，解得 $n=43$，且当 $n=43$ 时，$3+5+7+\cdots+2n+1=1935$，

$1989-1935=54$，由分析可知，当 $n=43$ 时，粒子所在的位置是(0,43)，

因此可推得，再过 54 分钟，即在 1989 分钟后这个粒子所在的位置是(44,35).

评注 这道题考查的知识点主要是平面直角坐标系，以及点的坐标的求法. 当然也还考查了数列、不等式等知识点. 找到粒子运动的坐标规律是解题的关键.

【练习 3】 如图 1-9，在平面直角坐标系中，一颗棋子从点 P 处开始依次关于点 A，B，C 作循环对称跳动，即第一次跳到点 P 关于点 A 的对称点 M 处，接着跳到点 M 关于点 B 的对称点 N 处，第三次再跳到点 N 关于点 C 的对称点处，…，如此下去.

(1)在图中画出点 M，N，并写出点 M，N 的坐标：________；

(2)求经过第 2008 次跳动之后，棋子落点与点 P 的距离.

解答 (1)$M(-2,0)$，$N(4,4)$.

(2)棋子跳动 3 次后又回到点 P 处，所以经过第 2008 次跳动后，棋子落在点 M 处，

所以 $PM=\sqrt{OM^2+OP^2}=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$.

答 经过第 2008 次跳动之后，棋子落点与点 P 的距离为 $2\sqrt{2}$.

【例 4】 给机器人下一个指令$[S,A]$($S\geqslant 0$，$0°\leqslant A<180°$)，它将完成下列动作：①先原地向左旋转角度 A；②再朝它面对的方向沿直线行走 S 个单位长度的距离. 现以机器人站立的位置为坐标原点，取它面对的方向为 x 轴的正方向，取它的左侧为 y 轴的正方向. (1)要想让机器人移动到点$(-5,5)$处，应下指令________.

分析 显然，点$(-5,5)$在第二象限，且在直线 $y=-x$ 上，由勾股定理易求得点$(-5,5)$到原点的距离等于 $5\sqrt{2}$，从而可得到答案.

解答 由分析直接得，$A=135°$，$S=5\sqrt{2}$，故答案填$[5\sqrt{2},135°]$.

评注 这道题主要考查平面直角坐标系的基本知识，以及勾股定理、旋转等知识. 难度不大，但有新意，尤其是以机器人指令为背景.

【练习 4】 根据指令$[S,A]$($S\geqslant 0$，$0°<A<360°$)，机器人在平面上能完成下列动作：先原地逆时针旋转角度 A，再朝其面对的方向沿直线行走距离 S. 现机器人在直角坐标系的坐标原点，且面对 x 轴的正方向. (1)若给机器人下了一个指令$[4,60°]$，则机器人应移动到点________；(2)请你给机器人下一个指令________；使其移动到点$(-10,-10)$.

解答 仿例 4，可在草稿纸上画出坐标系，并通过勾股定理计算. 若给机器人下了一个指令$[4,60°]$，则机器人应移动到点$(2,2\sqrt{3})$；使其移动到点$(-10,-10)$，则需给机器人下一个指令$[10\sqrt{2},225°]$.

【例 5】 在平面直角坐标系内，已知点 $A(2,2)$，$B(2,-3)$，点 P 在 y 轴上，且$\triangle APB$ 为直角三角形，则点 P 的个数为________.

分析 先在直角坐标平面内描出 A、B 两点，连接 AB，因题设中未指明$\triangle APB$ 的哪个角是直角，故应分别就$\angle A$、$\angle B$、$\angle P$ 为直角来讨论.

解答 如图 1-10，连接 AB，$AB=5$，以 AB 为斜边的直角三角形，可通过作直径为 AB 的圆得到，在 y 轴上有两个点；另外，以$\angle A$、$\angle B$ 分别为直角的直角三角形与 y 轴又有两个交点，故答案填 4.

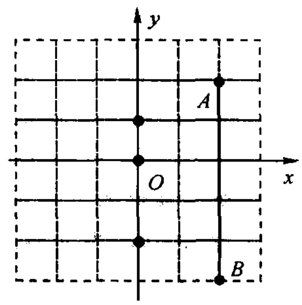


图 1-10

评注 这类题是近几年的一种热点题型，有时是直角三角形的相关题，有时候是等腰三角形的相关题. 解题的方法与本题类似，可以在坐标系中直接画图得到答案.

【练习 5】 (2001 年湖北选拔赛)在直角坐标系中,已知 $A(1,1)$,在 x 轴上确定点 P,使 $\triangle AOP$ 为等腰三角形,则符合条件的点 P 共有 ( )

A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个

解答 以 AO 为腰,在原点左侧有一个点,原点右侧有两个点. 以 AO 为底边,在 x 轴正半轴有一个点,故答案选 D.

同步检测

1. 在平面直角坐标系内,有等腰三角形 AOB,O 是坐标原点,点 A 的坐标是 (a,b),底边 AB 的中线在一、三象限的角平分线上,则点 B 的坐标为 ( )

A. (b,a) B. $(-a,-b)$ C. $(a,-b)$ D. $(-a,b)$

2. 已知 a 是方程 $x^3+3x-1=0$ 的一个实数根,则直线 $y=ax+1-a$ 不经过 ( )

A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限

3. 根据图 1-11 所示流程的程序,当输入数值 x 为 -2 时,输出数值 y 为 ( )

A. 4 B. 6

C. 8 D. 10

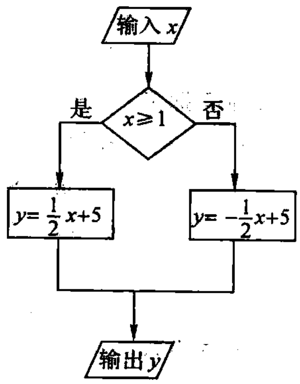


图 1-11

4. (2008 年海南初赛)在平面直角坐标系 xOy 内,已知 $A(3,-3)$,点 P 是 y 轴上一点,则使 $\triangle AOP$ 为等腰三角形的点 P 共有 ( )

A. 2 个 B. 3 个

C. 4 个 D. 5 个

5. (2008 年山东预赛)已知函数 $y=x^2+\frac{1}{\sqrt{-x}}$,点 $P(x,y)$ 在该函数的图像上. 那么,点 $P(x,y)$ 应在直角坐标平面的 ( )

A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限

6. 函数 $y=2|x|-1$ 与 x 轴所围成的封闭图形的面积是________.

7. 已知点 $P(a+1,2a-1)$ 关于 x 轴的对称点在第一象限,则 a 的取值范围是________.

8. 如图 1-12,将边长为 1 的正三角形 OAP 沿 x 轴正方向连续翻转 2008 次,点 P 依次落在点 $P_1,P_2,P_3,\cdots,P_{2008}$ 的位置,则点 P_{2008} 的横坐标为________.

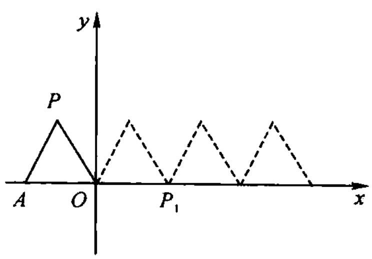


图 1-12

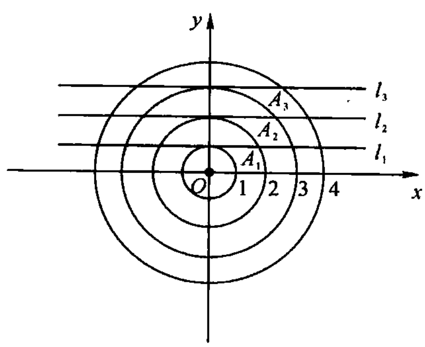


图 1-13

9. 如图 1-13，在平面直角坐标系中，点 A_1 是以原点 O 为圆心，半径为 2 的圆与过点 $(0,1)$ 且平行于 x 轴的直线 l_1 的一个交点；点 A_2 是以原点 O 为圆心、半径为 3 的圆与过点 $(0,2)$ 且平行于 x 轴的直线 l_2 的一个交点；……；按照这样的规律进行下去，点 A_n 的坐标为______.

10. 画函数 $y=|x+1|+|x-2|$ 的图像.

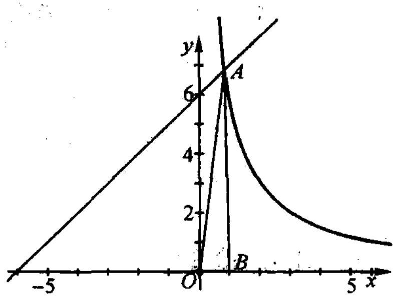


图 1-14

11. 如图 1-14，直线 $y=x+m$ 与双曲线 $y=\frac{m}{x}$ 在第一象限相交于点 A，$S_{Rt\triangle AOB}=3$.

①求 m 的值；

②设直线与 x 轴交于点 C，求点 C 的坐标；

③求 $S_{\triangle ABC}$.

12. 如图 1-15，在平面直角坐标系中，直线 l 是第一、三象限的角平分线.

实验与探究：

(1)由图观察易知 $A(0,2)$ 关于直线 l 的对称点 A' 的坐标为 $(2,0)$，请在图中分别标明 $B(5,3)$、$C(-2,5)$ 关于直线 l 的对称点 B'、C' 的位置，并写出它们的坐标：

B'________、 C'________；

归纳与发现：

(2)结合图形观察以上三组点的坐标，你会发现：坐标平面内任一点 $P(a,b)$ 关于第一、三象限的角平分线 l 的对称点 P' 的坐标为________(不必证明)；

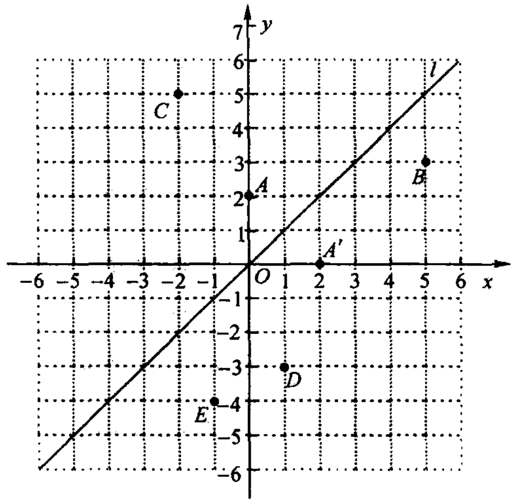


图 1-15

运用与拓广：

(3)已知两点 $D(1,-3)$、$E(-1,-4)$，试在直线 l 上确定一点 Q，使 Q 点到 D、E 两点的距离之和最小，并求出点 Q 坐标.

2　一次函数和反比例函数

知识精解

简单地说，形如 $y=kx+b$（k,b 为常数，且 $k\neq0$）的函数就是一次函数，特别的，当 $b=0$ 时为正比例函数. 形如 $y=\frac{k}{x}$ 或 $y=kx^{-1}$（k 为常数，且 $k\neq0$）的函数就是反比例函数. 有时，反比例函数式还写成 $xy=k$ 的形式.

一次函数自变量取值范围是全体实数，反比例函数自变量取值范围是 $x\neq0$.

一次函数图像是直线，与 x 轴和 y 轴分别交于点 $(-\frac{b}{k},0)$，$(0,b)$，与两坐标轴围成的三角形的面积为 $S=\frac{b^2}{2|k|}$.

反比例函数的图像是双曲线，过双曲线上任意一点向两坐标轴作垂线所围成的矩形的面积为 $S=|k|$.

触类旁通

【例 1】　（2009 年湖北荆州预赛）已知一次函数 $y=ax+b$ 的图像经过一、二、三象限，且与 x 轴交于点 $(-2,0)$，则不等式 $ax>b$ 的解集为　　（　　）

A. $x>2$　　B. $x<2$　　C. $x>-2$　　D. $x<-2$

分析　这道题有两个条件，由一次函数 $y=ax+b$ 的图像经过一、二、三象限，可知 $a>0,b>0$，然后把 $(-2,0)$ 代入函数解析式，从而可得答案.

解答　由题意得 $a>0,b>0$，所以所求不等式可以变形为 $x>\frac{b}{a}$.

把 $(-2,0)$ 代入函数解析式，得 $-2a+b=0$，即 $\frac{b}{a}=2$，故 $x>2$，答案选 A.

评注　这道题主要考查了一次函数图像与性质、不等式的性质等知识点. 题目难度不大，但题目的设计比较巧妙.

【练习 1】　（2008 年海南初赛）一次函数 $y=k(x-1)$ 的图像经过点 $M(-1,-2)$，则其图像与 y 轴的交点是　　（　　）

A. $(0,-1)$　　B. $(1,0)$　　C. $(0,0)$　　D. $(0,1)$

解答　一次函数 $y=k(x-1)$ 的图像经过点 $M(-1,-2)$，则有 $k(-1-1)=-2$，解得 $k=1$. 所以函数解析式为 $y=x-1$. 令 $x=0$ 代入得 $y=-1$. 故其图像与 y 轴的交点是 $(0,-1)$. 故选 A.

【例 2】　（2009 年湖北省黄冈选拔赛题）已知一次函数 $y=ax+b$ 的图像经过点 $A(\sqrt{3},\sqrt{3}+2)$，$B(-1,\sqrt{3})$，$C(-2,c)$. 求 $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$ 的值.

分析　把点 A,B 的坐标代入一次函数解析式，可求得 a,b，再把点 C 代入解析式，即可求

得 c 的值.

解答　由上述分析,可求得 $a=\sqrt{3}-1,b=2\sqrt{3}-1,c=1$.

所以 $a-b=-\sqrt{3},b-c=2\sqrt{3}-2,c-a=2-\sqrt{3}$.

原式 $=\frac{1}{2}[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]=13-6\sqrt{3}$.

评注　这道题主要考查了待定系数法和乘法公式等知识点.而且计算难度不大,只是计算时需要细心一些.

【练习 2】　(2009 年湖北荆州预赛题)点 A,B 分别在一次函数 $y=x$ 与 $y=8x$ 的图像上,其横坐标分别为 $a,b(a>0,b>0)$,若直线 AB 为一次函数 $y=kx+m$ 的图像,当 $\frac{b}{a}$ 是整数时,求满足条件的整数 k 的值.

解答　设 $A(a,a),B(b,8b)$,则有

$$\begin{cases}ak+m=a,\\bk+m=8b.\end{cases}$$

消去 m 得 $(a-b)k=a-8b$.

因为当 $a=b$ 时,$a-b=0$,不符合题意.

所以 $a\neq b$,则 $k=\frac{a-8b}{a-b}=\frac{1-\frac{8b}{a}}{1-\frac{b}{a}}$.

设 $\frac{b}{a}=t$,则

$$k=\frac{1-8t}{1-t}=\frac{8t-1}{t-1}=\frac{8(t-1)+7}{t-1},$$

即 $k=8+\frac{7}{t-1}$.

因为 $\frac{b}{a}$ 是整数,$a>0,b>0,t-1\neq0$,

所以 t 是整数且 $t>0$,且 $t\neq1$.

又因为 k 为整数,

所以 $t-1=7$ 或 1,所以 $t=8$ 或 2.

从而 $k=9$ 或 15.

【例 3】　(2009 年湖北省预赛题)如图 2-1,点 A、C 在反比例函数 $y=\frac{\sqrt{3}}{x}(x<0)$ 的图像上,B、D 在 x 轴上,$\triangle OAB,\triangle BCD$ 均为正三角形,则点 C 的坐标是____________.

分析　作 $AE\perp OB$ 于 $E,CF\perp BD$ 于 F,由于本题中反比例函数图像上的点 A、C 的横、纵坐标之积为定值 $\sqrt{3}$,从而由正三角形的性质可求得点 C 的坐标.

解答　作 $AE\perp OB$ 于 $E,CF\perp BD$ 于 F,易求 $OE=EB=1$.设 $BF=m$,

则 $C(-2-m,-\sqrt{3}m)$,代入 $y=\frac{\sqrt{3}}{x}$,

得 $m^2+2m-1=0,m=\frac{-2\pm2\sqrt{2}}{2}=-1\pm\sqrt{2}$.

因为 $m>0$，所以 $m=-1+\sqrt{2}$，

所以点 C 的坐标是 $(-1-\sqrt{2},\sqrt{3}-\sqrt{6})$.

评注　这道题考查的知识点有反比例函数的图像和性质，正三角形的性质等知识点. 过点 A、C 作 x 轴的垂线，利用正三角形的性质，并抓住反比例函数的性质是解题的关键. 这类题在近两年的竞赛题中出现了多次.

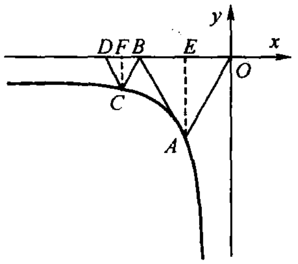


图 2-1

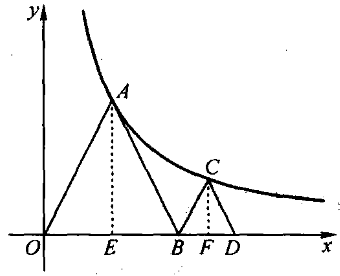


图 2-2

【练习 3】　如图 2-2，点 A，C 都在函数 $y=\dfrac{3\sqrt{3}}{x}(x>0)$ 的图像上，点 B，D 都在 x 轴上，且使得 $\triangle OAB$，$\triangle BCD$ 都是等边三角形，则点 D 的坐标为________.

解答　如图 2-2，分别过点 A，C 作 x 轴的垂线，垂足分别为 E，F. 设 $OE=a$，$BF=b$，则 $AE=\sqrt{3}a$，$CF=\sqrt{3}b$，所以，点 A，C 的坐标为 $(a,\sqrt{3}a)$，$(2a+b,\sqrt{3}b)$，

所以 $\begin{cases}\sqrt{3}a^2=3\sqrt{3},\\ \sqrt{3}b(2a+b)=3\sqrt{3},\end{cases}$　解得 $\begin{cases}a=\sqrt{3},\\ b=\sqrt{6}-\sqrt{3},\end{cases}$

因此，点 D 的坐标为 $(2\sqrt{6},0)$. 故答案填 $(2\sqrt{6},0)$.

【例 4】　(2008 年浙江初赛) 如图 2-3，两个反比例函数 $y=\dfrac{k_1}{x}$ 和 $y=\dfrac{k_2}{x}$ (其中 $k_1>k_2>0$) 在第一象限内的图像依次是 C_1 和 C_2，设点 P 在 C_1 上，$PC\perp x$ 轴于点 C，交 C_2 于点 A，$PD\perp y$ 轴于点 D，交 C_2 于点 B，则四边形 $PAOB$ 的面积为　　　(　　)

A. k_1+k_2　　　B. k_1-k_2

C. $k_1\cdot k_2$　　　D. $\dfrac{k_1}{k_2}$

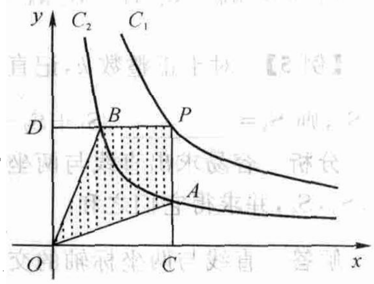


图 2-3

分析　设点 P 的坐标为 (m,n)，由题意可分别求出点 A、B 的坐标，进而可由 $S_{四边形PCOD}-S_{\triangle OCA}-S_{\triangle OBD}$ 求得四边形 $PAOB$ 的面积.

解答　答案选 B.

如图 2-3，设 $P(m,n)$，因为点 P 在 C_1 上，所以 $mn=k_1$，$A(m,\dfrac{k_2}{m})$，$B(\dfrac{k_2}{n},n)$.

$$S_{四边形PAOB}=S_{四边形PCOD}-S_{\triangle OCA}-S_{\triangle OBD}$$
$$=mn-\frac{1}{2}(m\cdot\frac{k_2}{m}+n\cdot\frac{k_2}{n})=k_1-k_2.$$

评注　这道题主要考查的知识点有反比例函数的图像和性质，三角形和四边形的面积等

知识点．经验表明，一般来说，涉及反比例函数图像的面积计算往往比较简单．

【练习 4】 如图 2-4，一次函数 $y=kx+b$ 的图像与反比例函数 $y=\frac{m}{x}$ 的图像交于 $A(-2,1)$，$B(1,n)$ 两点．

(1)试确定上述反比例函数和一次函数的表达式；

(2)求$\triangle AOB$ 的面积．

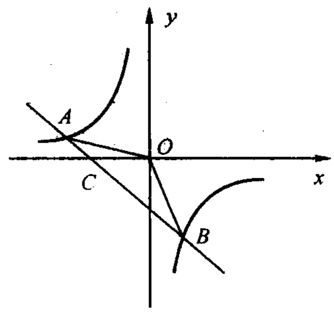


图 2-4

解答 (1)因为点 $A(-2,1)$在反比例函数 $y=\frac{m}{x}$ 的图像上，

所以 $m=(-2)\times1=-2$.

则反比例函数的表达式为 $y=-\frac{2}{x}$.

因为点 $B(1,n)$也在反比例函数 $y=-\frac{2}{x}$的图像上，

所以 $n=-2$，即 $B(1,-2)$.

把点 $A(-2,1)$，点 $B(1,-2)$代入一次函数 $y=kx+b$ 中，得

$\begin{cases}-2k+b=1,\\k+b=-2,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=-1,\\b=-1.\end{cases}$

所以一次函数的表达式为 $y=-x-1$.

(2)在 $y=-x-1$ 中，当 $y=0$ 时，得 $x=-1$.

所以直线 $y=-x-1$ 与 x 轴的交点为 $C(-1,0)$.

因为线段 OC 将$\triangle AOB$ 分成$\triangle AOC$ 和$\triangle BOC$，

所以 $S_{\triangle AOB}=S_{\triangle AOC}+S_{\triangle BOC}=\frac{1}{2}\times1\times1+\frac{1}{2}\times1\times2=\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}$.

【例 5】 对于正整数 k，记直线 $y=-\frac{k}{k+1}x+\frac{1}{k+1}$ 与坐标轴所围成的直角三角形的面积为 S_k，则 $S_k=$________，$S_1+S_2+S_3+S_4=$________.

分析 容易求出直线与两坐标轴的交点坐标，由三角形面积公式可求得 S_k，还可求得 S_1，S_2，S_3，S_4，并求得它们之和.

解答 直线与两坐标轴的交点坐标分别为$(0,\frac{1}{k+1})$和$(\frac{1}{k},0)$，

从而，求得 $S_k=\frac{1}{2k(k+1)}$.

由$\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$，

可得 $S_1+S_2+S_3+S_4=\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5})=\frac{2}{5}$.

故答案分别填$\frac{1}{2k(k+1)}$和$\frac{2}{5}$.

评注 这道题考查了直线与坐标轴的交点坐标，以及有理数的计算等知识点．计算难度不大，但由于部分学生对字母的陌生感，不少学生在这道题中失分．

【练习 5】 已知 $A(-1,m)$与 $B(2,m+3\sqrt{3})$是反比例函数 $y=\frac{k}{x}$图像上的两个点．

(1)求 k 的值；

(2)若点 $C(-1,0)$，则在反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 图像上是否存在点 D，使得以 A,B,C,D 四点为顶点的四边形为梯形？若存在，求出点 D 的坐标；若不存在，请说明理由.

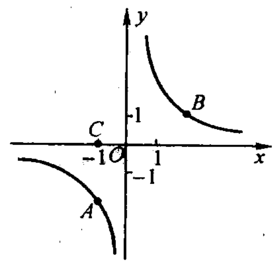


图 2-5

解答　(1)由 $-1\cdot m=2(m+3\sqrt{3})$，得 $m=-2\sqrt{3}$，因此 $k=2\sqrt{3}$.

(2)如图 2-6，作 $BE\perp x$ 轴，E 为垂足，则 $CE=3$，$BE=\sqrt{3}$，$BC=2\sqrt{3}$，因此 $\angle BCE=30°$.

由于点 C 与点 A 的横坐标相同，因此 $CA\perp x$ 轴，从而 $\angle ACB=120°$.

当 AC 为底时，由于过点 B 且平行于 AC 的直线与双曲线只有一个公共点 B，故不符题意.

当 BC 为底时，过点 A 作 BC 的平行线，交双曲线于点 D，

过点 A,D 分别作 x 轴，y 轴的平行线，交于点 F.

由于 $\angle DAF=30°$，设 $DF=m_1(m_1>0)$，则 $AF=\sqrt{3}m_1$，$AD=2m_1$，

由点 $A(-1,-2\sqrt{3})$，得点 $D(-1+\sqrt{3}m_1,-2\sqrt{3}+m_1)$.

因此 $(-1+\sqrt{3}m_1)\cdot(-2\sqrt{3}+m_1)=2\sqrt{3}$，

解之得 $m_1=\frac{7}{3}\sqrt{3}$（$m_1=0$ 舍去），因此点 $D\left(6,\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

此时 $AD=\frac{14}{3}\sqrt{3}$，与 BC 的长度不等，故四边形 $ADBC$ 是梯形.

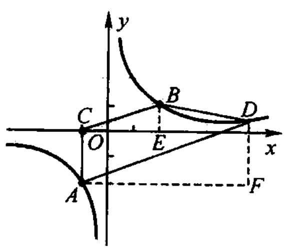


图 2-6

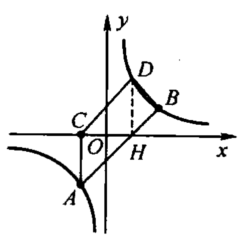


图 2-7

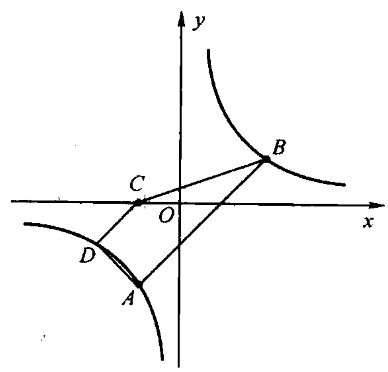


图 2-8

如图 2-7，当 AB 为底时，过点 C 作 AB 的平行线，与双曲线在第一象限内的交点为 D.

由于 $AC=BC$，因此 $\angle CAB=30°$，从而 $\angle ACD=150°$. 作 $DH\perp x$ 轴，H 为垂足，

则 $\angle DCH=60°$. 设 $CH=m_2(m_2>0)$，则 $DH=\sqrt{3}m_2$，$CD=2m_2$.

由点 $C(-1,0)$，得点 $D(-1+m_2,\sqrt{3}m_2)$，

因此 $(-1+m_2)\cdot\sqrt{3}m_2=2\sqrt{3}$.

解之得 $m_2=2$（$m_2=-1$ 舍去），因此点 $D(1,2\sqrt{3})$.

此时 $CD=4$，与 AB 的长度不相等，故四边形 $ABDC$ 是梯形.

如图 2-8，当过点 C 作 AB 的平行线，与双曲线在第三象限内的交点为 D 时，

同理可得，点 $D(-2,-\sqrt{3})$，四边形 $ABCD$ 是梯形.

综上所述，函数 $y=\frac{2\sqrt{3}}{x}$ 图像上存在点 D，使得以 A,B,C,D 四点为顶点的四边形为梯形，点 D 的坐标为：$D\left(6,\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ 或 $D(1,2\sqrt{3})$ 或 $D(-2,-\sqrt{3})$.

同步检测

1. 如图 2-9，已知点 B 在反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图像上. 从点 B 分别作 x 轴和 y 轴的垂线，垂足分别为 A、C. 若 $\triangle ABC$ 的面积是 4，则反比例函数的解析式是 (　　)

A. $y=-\frac{8}{x}$　　B. $y=\frac{8}{x}$　　C. $y=-\frac{4}{x}$　　D. $y=\frac{4}{x}$

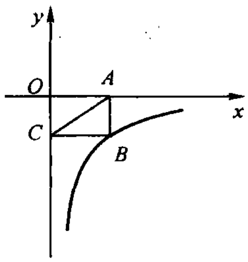


图 2-9

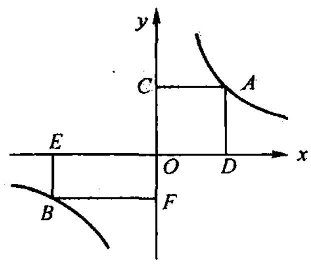


图 2-10

2. 如图 2-10，A、B 是函数 $y=\frac{k}{x}$ 图像上两点，点 C、D、E、F 分别在坐标轴上，且与点 A、B、O 构成正方形和长方形. 若正方形 $OCAD$ 的面积为 6，则长方形 $OEBF$ 的面积是 (　　)

A. 3　　B. 6　　C. 9　　D. 12

3. 直线 $l_1: y=-4x+5$ 和直线 $l_2: y=\frac{1}{2}x-4$ 的交点坐标在平面直角坐标系的 (　　)

A. 第一象限　　B. 第二象限

C. 第三象限　　D. 第四象限

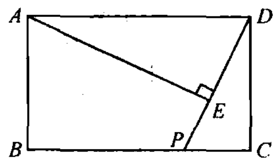
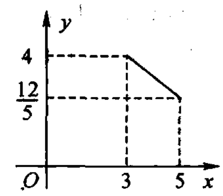
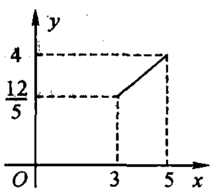


图 2-11

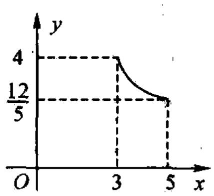
4. 如图 2-11，在矩形 $ABCD$ 中，$AB=3$，$BC=4$，点 P 在 BC 边上运动，连接 DP，过点 A 作 $AE\perp DP$，垂足为 E. 设 $DP=x$，$AE=y$，则能反映 y 与 x 之间函数关系的大致图像是 (　　)



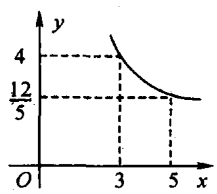
A.



B.



C.



D.