微分几何

例题详解和习题汇编

■ 陈维桓 编著

高等教育出版社
Higher Education Press

微分几何
例题详解和习题汇编

■ 陈维桓 编著

Weifen Jihe Liti Xiangjie he Xiti Huibian

高等教育出版社 · 北京
HIGHER EDUCATION PRESS BEIJING

图书在版编目（CIP）数据

微分几何例题详解和习题汇编 / 陈维桓编著. —北京: 高等教育出版社, 2010.1

ISBN 978-7-04-018773-1

Ⅰ.①微… Ⅱ.①陈… Ⅲ.①微分几何－高等学校－教学参考资料 Ⅳ.①O186.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2010）第 000828 号

策划编辑 赵天夫 **责任编辑** 赵天夫 **封面设计** 王凌波
责任印制 陈伟光

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	**免费咨询**	400-810-0598
邮政编码	100120	**网　　址**	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　　刷	涿州市星河印刷有限公司	**畅想教育**	http://www.widedu.com
开　　本	880×1230　1/32	**版　　次**	2010 年 1 月第 1 版
印　　张	10.125	**印　　次**	2010 年 1 月第 1 次印刷
字　　数	290 000	**定　　价**	20.00 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换。

物料号 18773-00

前　言

在作者编写的"十五"国家级规划教材《微分几何》由北京大学出版社在 2006 年出版后，受到许多兄弟院校同行的关注，有一些学校要采用该书作为微分几何课的教材．任课老师常常向我索要讲授该课的课件，不少老师和同学也问我一些比较困难的习题的答案和做法．恰好在此时，高等教育出版社赵天夫编辑征求我关于出版微分几何方面的习题集的意见．我想，要使这本《微分几何》能够得到比较广泛的使用，一本适用的教材参考书或习题集是不可或缺的，于是我萌发了写作《微分几何例题详解和习题汇编》的想法．我把这个想法和赵天夫编辑透露之后，很快得到他的热情支持．

这本《微分几何例题详解和习题汇编》是和我所编写的《微分几何》相配套的教学参考书．我关于本书读者的设想，首先是微分几何课的任课老师和选修该课的同学，此外还有准备报考基础数学研究生的考生．由于微分几何课是在数学专业三大基础课 (解析几何、高等代数和数学分析) 之后开设的课程，不可能像三大基础课那样在理论课之外配置习题课．在课上例题讲得比较少，也不可能像在习题课上讲解做题的方法和技巧．这样，在课程设置从三大基础课到专门一点的基础课转变的关键时刻，再加上几何学需要更多的空间想象能力，选课的同学在刚接触该课程时常常会感到做题比较困难．本书给出了超过一百个例题的详细解答，基本上概括了微分几何习题的各种类型，并且在解题过程中指出了解题的思路和方法，它们可以作为课程的补充．本书的习题汇编收集了 230 多个题，内容比较丰富，并且在书后给出了答案或提示．为了同学能够掌握课程的主要内容，每一章还列出了本章的要点和公式．这可以作为选课同学复习该课程的复习提纲．特别要指出的是，在最后一章详细讲解了用活动标架和外微分法研究曲面论的基本想法、工具和方法，这对同学进一步学习现代微分几何基础有极大的帮助．

在准备这本书时，功夫却在书外. 您可以想象，要给出每道题的答案，必须要反复地计算和检查. 除了一百多道例题以外，还要做二百多道习题 (如果算小题，则远远超过三、四百题)，工作量虽然不小，却在书的篇幅上反映不出来. 为了读者的需要，我们不得不做这样的努力. 但是，书后附有 “习题答案或提示” 是一把双刃剑，一方面给读者提供了方便，另一方面又 “害” 了读者，使读者失去独立思考和完成习题的机会. 为了降低后者给读者造成的损害，我们提议读者在做题时不去读后面的答案或提示. 如果读者在做题时经过长时间思考之后，仍然不得要领，不妨 “偷偷地” 看一眼提示，然后继续独立完成. 这样做的结果将对读者提高解题能力和理解能力有非常大的益处. 总之，我们希望读者千万不要把 “习题答案或提示” 作为解题的 “拐棍”，只要把它作为 “资料” 就可以，我们为此付出的努力也就值得了.

在本书交稿后，得知肖建波博士要在西南交通大学开设微分几何课，作者把初稿发给他请他指正. 他认真仔细地阅读了初稿，提出了很多宝贵的意见和中肯的建议. 作者在此向他表示衷心的感谢.

限于作者的水平，本书的不尽人意的地方肯定存在，恳请读者不吝指正. 另外，借此机会向高等教育出版社的赵天夫编辑和有关同志表示深切的感谢，本书由于他们的支持才能得以问世.

陈维桓

2009 年 11 月于北京大学

目　录

第一章　向量代数复习

§1.1　要点和公式

1. 研究三维欧氏空间中曲线和曲面微分几何学的主要工具是向量分析. 向量代数是向量分析的基础. 在这预备章节中, 我们要回顾三维向量空间中向量的各种运算, 和以后常用的公式. 我们还要回顾向量函数的导微法则.

2. 三维向量空间中的一个基底是指三个线性无关的向量, 记成 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$. 空间中每一个向量 $\boldsymbol{v}$ 都能够唯一地表示成它们的线性组合

$$\boldsymbol{v} = v^1\boldsymbol{e}_1 + v^2\boldsymbol{e}_2 + v^3\boldsymbol{e}_3,$$

这三个有序的实数构成的数组 (v^1, v^2, v^3) 称为向量 $\boldsymbol{v}$ 关于基底 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ 的分量, 或坐标. 通常, 我们把有序实数组 (v^1, v^2, v^3) 的全体构成的集合记成 $\mathbb{R}^3$. 由于在取定基底之后, 三维向量空间和 $\mathbb{R}^3$ 便建立了一一对应, 所以我们通常把三维向量空间记成 $\mathbb{R}^3$.

3. 三维向量空间中的向量可以相加, 还可以乘以一个实数, 得到的还是向量. 很明显, 在取定基底之后, 向量的相加恰好是其分量分别相加; 向量乘以实数是其分量分别乘以该实数. 若设 $\boldsymbol{v} = (v^1, v^2, v^3)$, $\boldsymbol{u} = (u^1, u^2, u^3)$, 则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v} + \boldsymbol{u} =&(v^1, v^2, v^3) + (u^1, u^2, u^3) = (v^1 + u^1, v^2 + u^2, v^3 + u^3),\\ \lambda \cdot \boldsymbol{v} =&\lambda \cdot (v^1, v^2, v^3) = (\lambda v^1, \lambda v^2, \lambda v^3), \quad \lambda \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

4. 三维向量空间中任意两个向量 $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{u}$ 可以作数量积 (也称为内积, 或点乘), 记为 $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{u}$, 结果是如下的一个实数:

$$\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{u} = |\boldsymbol{v}| \cdot |\boldsymbol{u}| \cos \angle(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}).$$

因此

$$|\boldsymbol{v}| = \sqrt{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}}, \quad \cos\angle(\boldsymbol{v},\boldsymbol{u}) = \frac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{u}}{|\boldsymbol{v}|\cdot|\boldsymbol{u}|}.$$

向量 $\boldsymbol{v}$ 和 $\boldsymbol{u}$ 彼此垂直的充分必要条件是 $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{u}=0$. 向量的内积对每一个因子都是线性的.

如果基底 $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\}$ 是由三个彼此垂直的单位向量组成的，则两个向量的内积恰好是它们的对应分量的乘积之和

$$\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{u} = (v^1,v^2,v^3)\cdot(u^1,u^2,u^3) = v^1u^1+v^2u^2+v^3u^3.$$

此时

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{v}| =& \sqrt{(v^1)^2+(v^2)^2+(v^3)^2},\\ \cos\angle(\boldsymbol{v},\boldsymbol{u}) =& \frac{v^1u^1+v^2u^2+v^3u^3}{\sqrt{(v^1)^2+(v^2)^2+(v^3)^2}\sqrt{(u^1)^2+(u^2)^2+(u^3)^2}}.\end{aligned}$$

5. 三维向量空间中任意两个向量 $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{u}$ 可以作向量积 (也称为外积，或叉乘), 记为 $\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{u}$, 结果是一个向量，它的长度是

$$|\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{u}| = |\boldsymbol{v}|\cdot|\boldsymbol{u}|\sin\angle(\boldsymbol{v},\boldsymbol{u}),$$

它的方向与向量 $\boldsymbol{v},\boldsymbol{u}$ 都垂直，并且这三个向量 $\{\boldsymbol{v},\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{u}\}$ 成右手系. 很明显， $|\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{u}|$ 恰好是向量 $\boldsymbol{v}$ 和 $\boldsymbol{u}$ 所张的平行四边形的面积. 因此，向量 $\boldsymbol{v}$ 和 $\boldsymbol{u}$ 彼此平行的充分必要条件是 $\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{u}=0$. 向量的外积对每一个因子都是线性的.

如果基底 $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\}$ 由三个彼此垂直的、并且成右手系的单位向量组成，则两个向量 $\boldsymbol{v}=(v^1,v^2,v^3)$ 和 $\boldsymbol{u}=(u^1,u^2,u^3)$ 的外积是

$$\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{u} = \left(\begin{vmatrix} v^2 & v^3\\ u^2 & u^3\end{vmatrix}, \begin{vmatrix} v^3 & v^1\\ u^3 & u^1\end{vmatrix}, \begin{vmatrix} v^1 & v^2\\ u^1 & u^2\end{vmatrix}\right).$$

向量的外积没有结合律，但是它们适合下列公式：

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c} = (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{a}.$$

6. 三个向量 $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}$ 的混合积记成 $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})$, 它是指实数

$$(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})=(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{w}.$$

混合积 $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})$ 的几何意义是三个向量 $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}$ 所张的平行六面体的有向体积. 因此, 三个向量 $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}$ 线性相关的充分必要条件是它们的混合积为零. 混合积对每一个因子都是线性的. 很明显,

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})&=(\boldsymbol{w},\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})=(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w},\boldsymbol{u})\\&=-(\boldsymbol{v},\boldsymbol{u},\boldsymbol{w})=-(\boldsymbol{u},\boldsymbol{w},\boldsymbol{v})=-(\boldsymbol{w},\boldsymbol{v},\boldsymbol{u}),\end{aligned}$$

也就是

$$(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{w}=(\boldsymbol{w}\times\boldsymbol{u})\cdot\boldsymbol{v}=(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w})\cdot\boldsymbol{u}.$$

如果基底 $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\}$ 由三个彼此垂直的、并且成右手系的单位向量组成, 则向量 $\boldsymbol{u}=(u^1,u^2,u^3),\boldsymbol{v}=(v^1,v^2,v^3)$ 和 $\boldsymbol{w}=(w^1,w^2,w^3)$ 的混合积是

$$(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})=\begin{vmatrix}u^1&u^2&u^3\\v^1&v^2&v^3\\w^1&w^2&w^3\end{vmatrix}.$$

7. 一元向量函数是指从开区间 (a,b) 到 $\mathbb{R}^3$ 的一个映射 $\boldsymbol{v}(t)=(v^1(t),v^2(t),v^3(t))$, 其中 $v^1(t),v^2(t),v^3(t)$ 是定义在 (a,b) 上的函数. 如果分量函数 $v^1(t),v^2(t),v^3(t)$ 都是连续的, 则称向量函数 $\boldsymbol{v}(t)$ 是连续的; 如果分量函数 $v^1(t),v^2(t),v^3(t)$ 都是 r 次连续可微的, 则称向量函数 $\boldsymbol{v}(t)$ 是 r 次连续可微的. 同样, 如果分量函数 $v^1(t),v^2(t),v^3(t)$ 都是可积的, 则称向量函数 $\boldsymbol{v}(t)$ 是可积的. 向量函数 $\boldsymbol{v}(t)$ 的导数恰好是它的分量的导数构成的向量函数 $\boldsymbol{v}'(t)=\left(\dfrac{\mathrm{d}v^1(t)}{\mathrm{d}t},\dfrac{\mathrm{d}v^2(t)}{\mathrm{d}t},\dfrac{\mathrm{d}v^3(t)}{\mathrm{d}t}\right)$.

8. 函数的导微法则对于向量函数也是适用的. 例如:

$$(\boldsymbol{u}(t)+\boldsymbol{v}(t))'=\boldsymbol{u}'(t)+\boldsymbol{v}'(t),\quad (f(t)\boldsymbol{v}(t))'=f'(t)\boldsymbol{v}(t)+f(t)\boldsymbol{v}'(t).$$

对于向量函数的数量积、向量积和混合积的导微法则相当于函数乘积的导微法则，即

$$
\begin{aligned}
(\boldsymbol{u}(t)\cdot\boldsymbol{v}(t))' =& \boldsymbol{u}'(t)\cdot\boldsymbol{v}(t)+\boldsymbol{u}(t)\cdot\boldsymbol{v}'(t),\\
(\boldsymbol{u}(t)\times\boldsymbol{v}(t))' =& \boldsymbol{u}'(t)\times\boldsymbol{v}(t)+\boldsymbol{u}(t)\times\boldsymbol{v}'(t),\\
(\boldsymbol{u}(t),\boldsymbol{v}(t),\boldsymbol{w}(t))' =& (\boldsymbol{u}'(t),\boldsymbol{v}(t),\boldsymbol{w}(t))+(\boldsymbol{u}(t),\boldsymbol{v}'(t),\boldsymbol{w}(t))\\
&+(\boldsymbol{u}(t),\boldsymbol{v}(t),\boldsymbol{w}'(t)).
\end{aligned}
$$

多元函数的导微法则是类似的.

9. 在 E^3 中取定不共面的 4 个点，把其中一点记作 O, 把另外 3 点分别记为 A,B,C, 这样得到的由一点 O 和 3 个不共面的向量 $\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}$ 构成的图形 $\{O;\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}\}$ 称为 E^3 中的一个标架，其中点 O 称为该标架的原点.

设 $\{O;\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$ 是 E^3 的一个标架，并且 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 是彼此垂直的、构成右手系的 3 个单位向量，于是

$$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}=1,\quad \boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{k}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}=0,$$

并且

$$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k},\quad \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{i},\quad \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}.$$

这样的标架称为右手单位正交标架，简称为正交标架. 由正交标架给出的坐标系称为笛卡儿直角坐标系.

10. 设 $\{O;\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$ 是 E^3 的一个右手单位正交标架，则其余的右手单位正交标架 $\{p;\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_2\}$ 是由

$$
\left\{
\begin{aligned}
\overrightarrow{Op}&=a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k},\\
\boldsymbol{e}_1&=a_{11}\boldsymbol{i}+a_{12}\boldsymbol{j}+a_{13}\boldsymbol{k},\\
\boldsymbol{e}_2&=a_{21}\boldsymbol{i}+a_{22}\boldsymbol{j}+a_{23}\boldsymbol{k},\\
\boldsymbol{e}_3&=a_{31}\boldsymbol{i}+a_{32}\boldsymbol{j}+a_{33}\boldsymbol{k}
\end{aligned}
\right.
$$

给出的，其中系数矩阵

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

是其行列式为 1 的正交矩阵.

§1.2 例题详解

例题 1.1 已知 $|\boldsymbol{a}|=3$, $|\boldsymbol{b}|=2$, $\angle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=\pi/6$, 求 $3\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$ 和 $2\boldsymbol{a}-5\boldsymbol{b}$ 的内积和夹角.

解 根据内积的运算法则，我们有

$$\begin{aligned}|3\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}|^2 =&(3\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\cdot(3\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\\ =&9|\boldsymbol{a}|^2+12\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+4|\boldsymbol{b}|^2=97+36\sqrt{3},\\ |2\boldsymbol{a}-5\boldsymbol{b}|^2 =&(2\boldsymbol{a}-5\boldsymbol{b})\cdot(2\boldsymbol{a}-5\boldsymbol{b})\\ =&4|\boldsymbol{a}|^2-20\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+25|\boldsymbol{b}|^2=136-60\sqrt{3},\end{aligned}$$

同理，所求的两个向量的内积是

$$\begin{aligned}&(3\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\cdot(2\boldsymbol{a}-5\boldsymbol{b})\\ =&6|\boldsymbol{a}|^2-11\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-10|\boldsymbol{b}|^2=14-33\sqrt{3},\end{aligned}$$

因此

$$\cos\angle(3\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b},2\boldsymbol{a}-5\boldsymbol{b})=\frac{(3\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\cdot(2\boldsymbol{a}-5\boldsymbol{b})}{|3\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}||2\boldsymbol{a}-5\boldsymbol{b}|}$$

$$=\frac{14-33\sqrt{3}}{\sqrt{(97+36\sqrt{3})(136-60\sqrt{3})}}\doteq-0.6036431,$$

所以 $\angle(3\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b},2\boldsymbol{a}-5\boldsymbol{b})\doteq127.13°$.

例题 1.2　证明：双重叉积公式

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{a}.$$

证明　本题的公式很重要，在本课程中常要用到. 传统的证明是借助于坐标进行计算，我们在这里采用更加直观的做法. 如果向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 共线，则公式自然是成立的. 现在假定向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 不共线，所以 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\neq 0$. 由定义得知向量 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}$ 垂直于向量 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$, 它落在与 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 垂直的线性子空间内；而向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 构成与 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 垂直的线性子空间的基底，因此可以假设

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}.$$

但是左端向量 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}$ 与向量 $\boldsymbol{c}$ 是垂直的，在上式两边点乘向量 $\boldsymbol{c}$ 便得到

$$0=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})+\mu(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}),\quad \frac{\lambda}{\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}}=-\frac{\mu}{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}}=\alpha.$$

这样所假定的式子成为

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=\alpha((\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{a}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}),$$

其中 α 是待定的系数，而且它是对任意的向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 都普适的系数. 实际上，如果我们取右手单位正交基底 $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\}$, 假设

$$\boldsymbol{a}=\sum_{i=1}^{3}a^i\boldsymbol{e}_i,\quad \boldsymbol{b}=\sum_{j=1}^{3}b^j\boldsymbol{e}_j,\quad \boldsymbol{c}=\sum_{k=1}^{3}c^k\boldsymbol{e}_k,$$

代入上面的式子得到

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}a^ib^jc^k(\boldsymbol{e}_i\times\boldsymbol{e}_j)\times\boldsymbol{e}_k\\ =&\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}a^ib^jc^k\alpha((\boldsymbol{e}_j\cdot\boldsymbol{e}_k)\boldsymbol{e}_i-(\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_k)\boldsymbol{e}_j).\end{aligned}$$

由于左、右两边是 a^i, b^j, c^k 的齐次多项式，因此要这两个齐次多项式相等必须是它们的系数对应相等，即

$$(\boldsymbol{e}_i \times \boldsymbol{e}_j) \times \boldsymbol{e}_k = \alpha((\boldsymbol{e}_j \cdot \boldsymbol{e}_k)\boldsymbol{e}_i - (\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_k)\boldsymbol{e}_j), \qquad 1 \le i,j,k \le 3.$$

很明显，当 i,j,k 互不相同，或 $i=j$ 时，上式两边都是零. 所以求 α 的值只要考察 $i \neq j$ 、且 $k=i$ 或 $k=j$ 的情形就可以了. 取 $i=1, j=2, k=1$, 则得

$$(\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_2) \times \boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{e}_2, \quad \alpha((\boldsymbol{e}_2 \cdot \boldsymbol{e}_1)\boldsymbol{e}_1 - (\boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_1)\boldsymbol{e}_2) = -\alpha \boldsymbol{e}_2,$$

两边相对照得到 $\alpha=-1$. 若取 $k=2$, 仍有 $\alpha=-1$. 再取 $i=2, j=3, k=2$ 或 $k=3$, 以及取 $i=3, j=1, k=3$ 或 $k=1$, 得到的仍然是 $\alpha=-1$. 所以

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c} = -((\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c})\boldsymbol{a} - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c})\boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c})\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c})\boldsymbol{a}.$$

例题 1.3 设 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 都是非零向量，且 $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 0$. 设 α 是任意给定的实数，求向量 $\boldsymbol{x}$ 使得 $\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{x} = \alpha$.

解 注意到 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 是互相垂直的非零向量，所以 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ 构成一个基底，因此可以假设所求的向量 $\boldsymbol{x}$ 表示成

$$\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{a} + \mu \boldsymbol{b} + \nu(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}),$$

其中 λ, μ, ν 是待定的系数. 用向量 $\boldsymbol{b}$ 点乘上式两边得到

$$\alpha = \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{x} = \lambda(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a}) + \mu(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{b}) + \nu \boldsymbol{b} \cdot (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = \mu|\boldsymbol{b}|^2, \quad \mu = \frac{\alpha}{|\boldsymbol{b}|^2}.$$

再用向量 $\boldsymbol{b}$ 叉乘该式两边得到

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a} =& \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{x} = \lambda(\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}) + \nu \boldsymbol{b} \times (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \\ =& \lambda(\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}) + \nu((\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{b})\boldsymbol{a} - (\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a})\boldsymbol{b}) \\ =& \lambda(\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}) + \nu|\boldsymbol{b}|^2 \boldsymbol{a},\end{aligned}$$

因此对照等式的两边得到

$$\lambda = 0, \quad \nu = \frac{1}{|\boldsymbol{b}|^2}.$$

所求的向量是

$$\boldsymbol{x} = \frac{\alpha}{|\boldsymbol{b}|^2}\boldsymbol{b} + \frac{1}{|\boldsymbol{b}|^2}(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}).$$

注记 本题的要点是先找出基底，然后将所求的向量用基底向量线性地表示出来，于是问题就化为求表达式的各个系数. 这种做法在做几何题时是十分普遍的.

例题 1.4 设 $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} \neq 0$, 并且 $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} \neq 0$, $\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c} = 0$, 求 $\boldsymbol{x}$ 使得 $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{a} = \alpha$, $\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{c}$.

解 沿用上一题的做法. 条件 $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} \neq 0$ 说明向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 线性无关，于是它们构成一个基底，因此所求向量 $\boldsymbol{x}$ 可以表示为

$$\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{a} + \mu\boldsymbol{b} + \nu\boldsymbol{c}.$$

用向量 $\boldsymbol{a}$ 点乘上式两边得到

$$\alpha = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{x} = \lambda|\boldsymbol{a}|^2 + \mu(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}) + \nu(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}),$$

用向量 $\boldsymbol{b}$ 叉乘该式两边得到

$$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{b} = \lambda(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) + \nu(\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{b}).$$

用向量 $\boldsymbol{c}$ 点乘上式两边得到

$$|\boldsymbol{c}|^2 = \lambda(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = \lambda(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}), \quad \lambda = \frac{|\boldsymbol{c}|^2}{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})},$$

再用向量 $\boldsymbol{a}$ 点乘前式两边得到

$$\boldsymbol{a} \cdot \mathbf{c} = \nu\boldsymbol{a} \cdot (\mathbf{c} \times \boldsymbol{b}) = -\nu(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \mathbf{c}), \quad \nu = -\frac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}}{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})}.$$

用 λ,ν 的值代入 α 的式子得到

$$\alpha=\frac{|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{c}|^2}{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})}+\mu(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})-\frac{(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})^2}{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})},$$

因此利用 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\neq 0$ 的条件得到

$$\mu=\frac{\alpha}{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}-\frac{|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{c}|^2\sin^2\angle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{c})}{(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})}=\frac{\alpha}{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}-\frac{|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}|^2}{(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})}.$$

所求的向量 $\boldsymbol{x}$ 是

$$\boldsymbol{x}=\frac{1}{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})}\left(|\boldsymbol{c}|^2\boldsymbol{a}+\frac{\alpha(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})-|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}|^2}{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}\cdot\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{c}\right).$$

注记 条件 $\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=0$ 是本题有解所蕴含的必要条件.

例题 1.5 设 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}\neq 0$, 求向量 $\boldsymbol{x}$ 使得 $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{a}=\alpha$, $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{b}=\beta$, $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{c}=\gamma$.

解 直接计算得到

$$\begin{aligned}&(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c},\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=((\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\times(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}))\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\\ =&((\boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}))\boldsymbol{c}-(\boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}))\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})^2\neq 0.\end{aligned}$$

由此可见，向量 $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c},\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 是线性无关的，它们构成一个基底，故可设

$$\boldsymbol{x}=\lambda(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})+\mu(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})+\nu(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}).$$

分别用向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 去点乘上式得到

$$\begin{aligned}&\lambda(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{a}=\alpha,\quad \lambda=\frac{\alpha}{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})},\\ &\mu(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{b}=\beta,\quad \mu=\frac{\beta}{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})},\\ &\nu(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{c}=\gamma,\quad \nu=\frac{\gamma}{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})},\end{aligned}$$

因此所求的向量 $\boldsymbol{x}$ 是

$$\boldsymbol{x}=\frac{1}{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})}\left(\alpha(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})+\beta(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})+\gamma(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\right).$$

注记 解本题时，如果取向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 作为基底，则求解过程将会变得比较复杂，由此可见选择适当的基底是十分重要的. 设

$$\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}+\nu\boldsymbol{c},$$

分别用向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 去点乘上式得到

$$\begin{aligned}\alpha=&\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{a}=\lambda|\boldsymbol{a}|^2+\mu(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a})+\nu(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}),\\ \beta=&\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})+\mu|\boldsymbol{b}|^2+\nu(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b}),\\ \gamma=&\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{c}=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})+\mu(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})+\nu|\boldsymbol{c}|^2,\end{aligned}$$

于是问题化为解线性方程组

$$\begin{pmatrix}|\boldsymbol{a}|^2 & \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a} & \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}\\ \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} & |\boldsymbol{b}|^2 & \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b}\\ \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c} & \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c} & |\boldsymbol{c}|^2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\lambda\\ \mu\\ \nu\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}.$$

注意到系数矩阵的行列式

$$\det\begin{pmatrix}|\boldsymbol{a}|^2 & \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a} & \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}\\ \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} & |\boldsymbol{b}|^2 & \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b}\\ \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c} & \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c} & |\boldsymbol{c}|^2\end{pmatrix}=(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})^2\neq 0,$$

故它有逆矩阵

$$\begin{pmatrix}|\boldsymbol{a}|^2 & \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a} & \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}\\ \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} & |\boldsymbol{b}|^2 & \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b}\\ \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c} & \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c} & |\boldsymbol{c}|^2\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})^2}\cdot$$
$$\begin{pmatrix}|\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}|^2 & (\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}) & (\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\\ (\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}) & |\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}|^2 & (\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})\\ (\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}) & (\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}) & |\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|^2\end{pmatrix},$$

故所求向量的分解式的系数是

$$\lambda=\frac{1}{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})^2}\left(\alpha|\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}|^2+\beta(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})+\gamma(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\right),$$