

知识丛书

中国古代数学简史

下 册

李 儼 杜石然 著



中国古代数学簡史

下 册

李 儼 杜石然 著

《知識叢書》編輯委員會編

知識就是力量。一个革命干部需要有古今中外的丰富知識作为从事工作和学习理論的基础。《知識丛书》就是为了滿足这个需要而編印的；內容包括哲学、社会科学、自然科学、历史、地理、国际問題、文学、艺术和日常生活等知識。为了使这一套丛书編写得更好，我們期望讀者們和作者們予以支持和合作，提供意見和批評。

《知識丛书》編輯委员会

中華書局出版

(北京復興門外翠微路2号)

北京市书刊出版业营业許可証出字第17号

京华印书局印刷

新华书店北京发行所发行 全国新华书店經售

*

开本 787×1092 毫米 $1/32$ · 印张 $6\frac{1}{9}$ · 插頁 2 · 字数 94,000

1964年1月第1版

1964年1月北京第1次印刷

印数 00,001—17,800 定价 0.50 元

統一书号 11018·471 63.12.京型

目 錄

第五章 宋元时期中国数学的高度發展	(145)
(一) 宋元数学概况	(145)
(二) “增乘开方法”——高次方程的数值解法	(155)
1. “增乘开平方、开立方方法”	(155)
2. “开方作法本源”图——二項式定理系数表	(161)
3. 高次方程的数值解法	(169)
(三) 从“天元术”到“四元术”	(177)
1. “天元术”的产生及其发展	(177)
2. 朱世杰的“四元术”	(183)
(四) 宋元数学家的級数研究	(193)
1. 沈括“隙积术”和楊輝的比类問題	(193)
2. 郭守敬等人《授时历》中的“平、立、定三差术”	(196)
3. 朱世杰的垛积招差	(203)
(五) 其他方面的成就	(210)
1. “大衍求一术”	(210)
2. “纵横图”	(216)
3. 《授时历》中的球面三角学思想	(219)
(六) 宋元时期中外数学知識的交流	(224)
第六章 从筹算到珠算的演变	(228)

(一) 珠算产生的时代背景·····	(228)
(二) 唐朝末年以来的乘除簡捷算法·····	(231)
(三) 十三、十四世紀的民間数学和筹算口訣 的形成·····	(234)
(四) 珠算的产生·····	(240)
(五) 程大位及其所著《算法統宗》·····	(243)
第七章 西方数学的第一次傳入·····	(249)
(一) 西方数学第一次传入概况·····	(249)
(二) 《几何原本》和《同文算指》的編譯·····	(252)
1. 徐光启和《几何原本》·····	(252)
2. 李之藻和《同文算指》·····	(258)
(三) 历法改革和各种历书中的数学知識·····	(266)
1. 明末清初改历概况·····	(266)
2. 各种历书中的数学知識·····	(271)
平面三角法和球面三角法·····	(271)
对数·····	(275)
“比例規”、“西洋筹算”和“計算尺”·····	(276)
(四) 梅文鼎和他的数学·····	(279)
(五) 康熙帝和《数理精蘊》·····	(283)
第八章 清中叶封建鎖国政策下的数学·····	(292)
(一) 学术风气的轉移·····	(292)
(二) 中国古算书的整理·····	(295)
1. 各种丛书的編輯·····	(295)
2. 《算經十书》的整理和注释·····	(297)
3. 宋元算书的整理和研究·····	(300)
4. 《畴人传》的編纂·····	(302)

(三) 西方数学和本国数学的深入研究·····	(304)
1. 关于三角函数展开式的研究·····	(304)
2. 方程論方面的研究·····	(314)
3. 关于有限項級数求和問題的研究·····	(321)
4. 其他方面的研究·····	(330)
第九章 西方数学的第二次傳入·····	(336)
(一) 西方数学第二次传入概况·····	(336)
(二) 西方算书的翻譯·····	(338)
1. 李善兰的譯书·····	(338)
2. 华蘅芳的譯书·····	(342)
(三) 新式学校的設立·····	(345)
(四) 数学教科书的改革·····	(349)
后記 ·····	(355)

第五章 宋元时期中國数学 的高度發展

(一) 宋元数学概况

中国古代数学,经过汉唐千余年間的发展,形成了以“十部算經”为基本內容的完整体系。到了公元十到十四世紀的宋、元两代,又有了新的發展。

北宋元丰七年(公元 1084 年),由于雕板印刷术已十分发达,“秘书省”(监管古今书籍、記載国家大事和掌管天文历数的机构)刻印了《九章算术》等汉唐时期的各种算經,由国家頒行为学校的教学用书。这是我国有史以来的第一批印刷本数学书籍。这批书籍的原刻本虽然没有流传下来;但从南宋时候的翻刻本中还可以看到它們的面貌^①。

北宋时期,在国子监中也曾設立过“算学科”。但它时而設立,时而取消,沒有持續不断地发展。例如元丰七年(公元 1084 年)曾頒布設立“算学科”的詔令,并預定修造校舍,但到元

^① 參見本书第八章(二)节之 2。

祐元年(公元 1086 年),又因“建学之后,养士设科,徒有煩費,实于国事无补”^①而停办。崇宁三年(公元 1104 年)再設,五年四月停办,十一月又置。后来大观三年(公元 1109 年)、政和三年(公元 1113 年)都曾再次以詔令設立算学,但每次都是过不了多久便又停办了。这恐怕都是因为“徒有煩費,实于国事无补”的原故。北宋灭亡,到了南宋时候,就干脆把“算学科”永远废掉,不再設立^②。就北宋时期这种时断时續的国子监算学而言,它也沒有培养出任何一个在历史上留有姓名的数学家。只有秘书省为供教学用而刊刻了好几部算經,对流传古代数学經籍有其一定的意义。

北宋时代值得介紹一下的数学家有沈括(公元 1031—1095 年)。沈括所涉及的学术,范围是很广泛的。他对数学和天文学都十分精通。在他的名著《梦溪笔談》中便記載了若干条和数学有关的問題。除沈括之外,在当时的“司天监”中先后有楚衍和朱吉等人在工作,他們也都是熟习数学的人。楚衍的学生賈宪在方程解法方面有杰出的成就。

公元 1127 年,金人攻陷了北宋都城汴梁(今开封),秘书省的书籍和印版全部被掠夺破坏,数学书版也大受損毀。在北方,繼金之后,

又有蒙古族兴起，和南宋形成了南北对峙的局面。

但是，恰好在这种对峙形势之下，中国古代数学史上却揭开了极其重要的一页。在南方有秦九韶和楊輝，在北方則有李治^③和朱世杰。秦、李、楊、朱四大家的著作充分地反映了这一时期中国数学的辉煌成就。他們的主要著作有：

秦九韶：《数书九章》18卷(公元1247年)

李 治：《測圓海鏡》12卷(公元1248年)

《益古演段》3卷(公元1259年)

楊 輝：《詳解九章算法》12卷(公元1261年，現存本不足)

《日用算法》2卷(公元1262年，現存本不足)

《楊輝算法》7卷(公元1274—1275年)

朱世杰：《算学启蒙》3卷(公元1299年)

《四元玉鑑》3卷(公元1303年)

上述各种著作，除楊輝的几种有些殘缺之外，都

① 李燾《續資治通鑑長編》，卷381。

② 參見李儼《中算史論叢》第四集第252—267頁。1955年，北京，科学出版社。

③ 《元史》有李治传，即李治，是同一人。

完整地流传到现在。

这些著作,就其涉及范围的广、問題索解的难来讲,都是中国古代任何时期的数学著作所不及的,因而这些著作所取得的成就也是空前的。其中記載了許多具有世界意义的学术成就。概括地说,在秦九韶的著作中記有高次方程的数值解法和联立一次同余式的解法。在李治和朱世杰的著作中則論述了“天元术”和“四元术”,列出了一元或多元方程以及高次联立方程的消去法問題。楊輝的著作則集中地反映了当时一些民間商用数学的情况。在四大家之外,元代杰出的科学家郭守敬(公元1231—1316年)在編撰《授时历》(公元1280年)时,曾应用到高次的招差法,这也是宋元数学中最杰出的成就之一。在商用数学方面,除楊輝之外,到元朝又有《透帘細草》、《詳明算法》、《丁巨算法》等书流传下来^①。

宋元时期的中国数学,事实上确是远远超过同时代的欧洲。高次方程解法較欧洲的霍纳方法早出八百年,多元高次方程組的消去法要比欧洲早出近五百年,联立一次同余式解法早出五百多年,高次的內插法早出近四百年。在許多数学的重要領域之內,中国数学家处于遙遙領先的地位。宋元数学不仅是中国数学史上

最輝煌的一頁，也是中世紀世界数学史上最丰富多采的一頁。

秦、李、楊、朱是有名的宋元四大数学家，下面簡略地介紹一下他們的生平事迹。

秦九韶，字道古。自称是魯郡人，其实他生于四川。当时人对他就有“性极机巧，星象、音律、算术以至营造等事，无不精究”的評論。据他在《数书九章》序中自述：“早岁侍亲中都（南宋京城，今杭州），因得訪习于太史，又尝从隐君子受数学。”后来他随父回到四川，自己曾在四川作过县尉之类的小官。当时正是蒙古兵进攻四川的时候。他在《数书九章》序中說：“……不自意全于矢石間，尝险罹憂，荏苒十禩（十年），心槁气落，信知夫物莫不有数也。乃肆意其間，旁諏方能，探索杳渺，粗若有得焉。……窃尝設为問答，以拟于用。”《数书九章》正是在这兵荒馬乱期間，从长期艰苦的环境中写成的。

《数书九章》全书分 9 类，每类 9 个問題，共 81 題。其中：

1. 大衍类：叙述“大衍求一术”——联立一次同余式解法。

2. 天时类：有关历法的計算以及降雨、降雪

① 詳見李儼：《十三、十四世紀中国民間数学》，北京，科学出版社，1957 年。

量的量法。

3. 田域类:土地面积。
4. 测望类:勾股重差問題。
5. 賦役类:“均輸”以及其他稅收問題。
6. 錢谷类:粮谷轉运、仓窖容积。
7. 营建类:工程施工問題。
8. 軍旅类:营盘布置及軍需供应問題。
9. 市易类:交易和利息計算等問題。

《数书九章》中有許多比較复杂的問題，例如第八卷“遙度圓城”一問需要求解十次方程，第九卷“复邑修賦”一問的答案竟有 180 条之多。

关于秦九韶的数学思想，如对于数学的对象及其和实践之間的关系等方面的理解，从他自己所写的《数书九章》序中，大略可以看出一二。他主张：“数与道非二本”，“夫物莫不有数”。这种思想有其正确的一面，即認識到了事物的量的一个方面。但从这种思想出发，也能走向数字神秘主义；也就是說，这种思想也有其錯誤的一面。他一方面認為数学可以“經世务，类万物”；另一方面他也認為数学可以“通神明，順性命”，“人事之变无不該，鬼神之情莫能隱”。并且，他把“通神明，順性命”看成是大者，反而把“經世务，类万物”看成是小者。这是很矛盾的。尤其矛盾的是：当他对数学进行了較深入

的研究,直到“探索杳渺,粗若有得”之后,仍然不能不承認:“所謂通神明,順性命,固朕末于見。若其小者,竊嘗設為問答,以拟于用。”也就是說,《数书九章》中的 81 个問題仍然只能是一些“小者”。不仅如此,秦九韶仍然把有关卜筮的問題列为全书之首,并且把关于联立一次同余式的叙述和《易經·繫辞传》中的“大衍之数”附会起来,而称之为“大衍求一术”。这种思想上的矛盾,由于时代条件所限,是秦九韶本人所解决不了的。

和秦九韶几乎同时,在中国北方出現了另一位杰出的数学家李治。李治所写《測圓海鏡》一书,比秦九韶的《数书九章》仅仅迟了一年。

李治,后改名李冶,号敬斋,真定欒城人(現河北石家庄地区),生于公元 1192 年。曾在河南鈞州(今禹县)作过金朝的知事。公元 1232 年鈞州被蒙古軍攻破,他便逃到北方。先后曾在山西桐川、太原、平定、河北元氏等地隱居,最后定居在元氏县封龙山下。李治是当时北方的有名的学者。元世祖忽必烈曾多次召見,并授予官职,但他总是辞官不受。

李治曾在封龙山上草堂中講学,有許多人跟他学习。其中也有些人是向他学习数学的。李治死于公元 1279 年,享年 88 岁。

李治所著《測圓海鏡》共12卷，170個問題。所有的問題，都是已知直角三角形中各綫段進而求其內切圓、傍切圓的直徑等問題。在所有流傳至今的數學著作中，《測圓海鏡》是第一部系統地論述“天元術”的著作。李治的另一部著作《益古演段》則是根據別人所著的一部《益古集》改寫的。按李治自己的話說就是：“移補條段，細繙圖式，使粗知十百者，便得入室昭其文，顧不快哉”，這是為初學“天元”的人而改寫的一部著作。全書共3卷，64個問題。

通過《測圓海鏡》序文，也可以了解李治本人對數學的一些看法。李治說：“數本難窮，吾欲以力強窮之，彼其數不唯不能得其凡，而吾之力且憊矣。然則數果不可以窮耶？既已名之數矣，則又何為而不可窮也！故謂數為難窮，斯可；謂數為不可窮，斯不可。何則，彼其冥冥之中，固有昭昭者存。夫昭昭者，其自然之數也。非自然之數，其自然之理也。數一出於自然，我欲以力強窮之，使隸首復生，亦末如之何也已。苟能推自然之理，以明自然之數，則雖遠而乾端坤倪，幽而神情鬼狀，未有不合者矣。”

李治在這裡正確地指出了“數”是客觀存在的反映。在許多錯綜複雜的現象中，自有“昭昭者存”，也就是“自然之數”，而它正是“自然之

理”的反映。它們是“可穷”的，而不是“不可穷”的；是可知的，而不是不可知的。同时也正因为它們是“自然之理”，所以只能按着它們的本来面貌去推演，而不能“以力强穷”。他的这些論点都是十分正确的。在《益古演段》序文中，李治还对輕視数学为“九九賤技”的思想作了批評。

稍迟于秦九韶和李治，在南宋出現了楊輝的著作。

楊輝，字謙光，錢塘（今杭州市）人。关于他的生平，流传下来的資料很少。但是他的著作，对于了解当时数学发展的面貌，却是很有意义的。楊輝的著作中收录了現在早已失传的各种数学著作中的一些問題和算法。一些重要的算法，如早期的“增乘开方法”和“开方作法本源”（詳見下节），都是通过楊輝的著作才得流传下来。

楊輝的著作中还記載了关于改革筹算的一些乘除簡捷算法，本书当在下文第六章中作詳細的介紹。楊輝在《算法通变本末》一书中还提出了一个“习算綱目”，这是在当时民間流行的很切实用的一个数学学习課程进度表。这了解当时民間数学教育的一般情况，是个很难得的資料。

关于朱世杰的生平,和楊輝一样,材料也很少。現在仅能从莫若和祖頤为朱世杰《四元玉鑑》所写的序文中,約略地看出一些。

朱世杰,字汉卿,自号松庭。著作中屡有“燕山朱松庭”、“寓燕松庭朱世杰”等字样,他的籍貫可能就在現代的北京附近。莫若的序文中写道:“燕山松庭朱先生以数学名家周游湖海二十余年矣。四方之来学者日众。”祖頤的序文中也說朱世杰“周流四方,复游广陵(今揚州),踵門而学者云集”。就現有的資料来看,在中国古代数学家之中,朱世杰还要算是第一个以数学为专业“周流四方”的职业数学家,他也是第一个职业的数学教育家。

流传至今的朱世杰的著作有《算学启蒙》3卷,共分20門,259問。这部书中,由乘除法运算起,直到“开方”、“天元术”等等,几乎包括了当时数学这一門学科中各方面的內容。这部书,体系完整,由浅入深,确实是一部很好的“启蒙”书籍。他的另一部著作《四元玉鑑》,也流传至今。全书共3卷,24門,288問。二次和二次以上多元方程組的解法是《四元玉鑑》的主要內容,在全书之中包括了

四元方程組: 7个問題,

三元方程組: 13个問題,

二元方程組：36 個問題。

关于有限項級数求和的問題，是朱世杰《四元玉鑑》中的另一重要內容。

清《畴人传續編》对朱世杰的总評價說：“汉卿在宋元間，与秦道古（九韶）、李仁卿（李治）可称鼎足而三。道古正負开方，仁卿天元如积，皆足上下千古；汉卿又兼包众有，充类尽量，神而明之，尤超越乎秦、李两家之上。”这样的評論是十分公允的。西方的科学史工作者也认为朱世杰是“他所生存时代的，同时也是貫穿古今的一位最杰出的数学家”，而他的《四元玉鑑》則是“中国数学著作中的最重要的一部，同时也是中世紀最杰出的数学著作之一”^①。

（二）“增乘开方法”——高次方程的数值解法

1. “增乘开平方、开立方”

宋元数学的成就，首先應該叙述的就是高次方程的数值解法。

上文曾說过，早在《九章算术》中便已經有了完整的开平方和开立方的方法。开平方和开

^① 見 G. Sarton: «Introduction to the History of Science», 卷 3, 701、703 頁。