数学方法与解题研究

SHUXUE FANGFA YU JIETI YANJIU

（第二版）

主编　李明振

上海科技教育出版社

数学方法与解题研究

主　编　李明振
副主编　齐建华　武锡环
　　　　王跃进　方广新

上海科技教育出版社

责任编辑　竹　青

图书在版编目(CIP)数据

数学方法与解题研究

主　编　李明振

上海科技教育出版社,2000.6

ISBN 7-5428-0443-X

Ⅰ.数… Ⅱ.李… Ⅲ.数学方法-解题-研究 Ⅳ.O10-1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 00789 号

数学方法与解题研究

李明振

上海科技教育出版社

(上海冠生园路 393 号　邮政编码:200233)

上海科技教育出版社发行

青藤印刷中心印刷

开本:850×1168 毫米　1/32　印张 15.625　字数 500 千字

2000 年 8 月第 1 版　　2000 年 8 月第 1 次印刷

2002 年 4 月第 2 版　　2002 年 4 月第 2 次印刷

ISBN 7-5428-0443-X/O10

定价 23.00 元

前 言

现代数学素质教育要求大力提高学生的数学素养，这不仅要使学生掌握数学知识，而且要使学生掌握渗透于数学知识中的数学思想方法，使他们能用数学知识和方法解决实际应用问题。

我国高师院校开设传统的数学方法论课程确实有助于使学习者掌握数学学科的发展规律与宏观的、系统的数学思想方法理论体系。但它对提升数学解题能力的帮助却很有限。而绝大多数中学师生又在埋头解题，往往因缺乏系统的、具可操作性的方法理论指导而迷失方向。为改变这种状况，我们尝试从数学方法理论与解题研究两者的结合上进行探讨，试图做到以数学方法理论指导解题研究，从而提升解题能力；反过来通过解题研究充实数学方法理论，并使读者较系统地掌握数学方法理论，两者有机结合，相得益彰。本书编写围绕现行中学数学内容与方法，遵循启发思维、培养能力、提高素质的原则，注重理论性、系统性与科学性相结合，材料典型、新颖，便于学习和讲授。

读者应首先通过阅读学习把握该数学方法的实质及其运用规范，但仅到此为止是远远不够的。掌握数学方法离不开解题活动，每节后面一般都安排了相当数量的习题，建议读者能不打折扣地尝试研究解决，而且应当首先用该节的方法进行解决，之后再尝试运用其它方法解决，尽可能做到一题多法解决，从而达到灵活运用数学方法的目的。

本书的编者为长期从事数学方法与解题研究方面的专家及教学第一线极富经验的骨干教师。编写分工如下：

绪论、第一章、第四章、第二章中§6及第三章中§8由李明振执笔；第二章中§1、§2由李济明执笔；§3、§5由王跃进执笔；§4由方广新执笔；第三章中§1、§5由荆新峰执笔；§2由刘志锋执笔；§3、§4由武锡环执笔；§6、§7由谢云贵执笔；第五章由齐建华执笔。全书由李明振统稿。

由于我们水平有限，难免有不妥甚至错误之处，诚望读者指正！

编者

2002年4月

再版说明

本书出版以来，受到全国广大高师院校数学系师生、中学数学教师、中学教研人员以及优秀中学生的广泛欢迎。普遍认为，本书巧妙地将数学方法理论与解题实践有机结合起来，立意独特、材料新颖、方法巧妙，读后收获很大，是系统掌握数学方法理论、提升数学解题能力的优秀教材。应广大读者要求，我们再版印刷本书。

此次再版，我们充分考虑并采纳了同行专家与广大师生的宝贵意见和建议，对原书作了如下几方面改动：

1. 对原版某些内容作了更为妥当的论述。
2. 删去了原版中部分难度过大的例题与习题。
3. 充实、增添了更能体现相应方法的应用与功能的新题、妙题。
4. 更正了原版中的印刷错误。

本版统稿工作由李明振完成。欢迎广大读者提出宝贵意见。

李明振

2002 年 4 月

目 录

绪 论

数学方法与解题研究的有机结合

“方法”与“物质”、“运动”、“集合”等概念一样，是一种元概念，只能概略描述，没法精确定义.但“方法”可以这样解释：是在任何一个领域中的行为方式，是用来达到某种目的的手段总和.人们认识和改造世界，必然要进行一系列的实践活动，这些活动所采用的各种方式，统称为方法.这里的“方式”、“手段”等等，都与“方法”大体上是“同义词”，并非“属”和“种差”式的严格定义.

关于什么是数学方法，不同的人在不同的场合对其有不同的理解，人们一般从两种既有区别又密切联系的两方面来理解“数学方法”.一是认为数学方法“主要是研究和讨论数学的发展规律、数学的思想方法以及数学中的发现、发明与创新法则”的表征；二是认为数学方法是“用数学语言表述事物的状态、关系和过程，并加以推导、演算和分析，以形成对问题的解释、判断和预言的方法.”即数学方法包含有两个不同的方面，一个是指数学工作者解决数学问题的方法；另一个是指科研人员以数学概念和理论揭示所研究事物的内在联系和运动规律的方法，即运用数学所提供的概念、理论和方法对所研究的对象进行定量的分析、描述、推导和计算，以便从量的关系上认识事物发展变化的规律性的方法.在人们的实际活动的各个层次上都需要用到数学方法，与这种层次性相对应，数学方法也可以分为四个层次：(1)数学发展和创新的方法；(2)运用数学理论研究和表述事物的内在联系和运动规律的方法；(3)具有普适性的数学解题方法；(4)特殊的数学解题方法.也有人将数学方法分为如下四个层次：(1)基本的和重大的数学思想方法，如微积分方法、概率统计方法、拓扑方法、计算方法等等，它们决定一个大的数学学科方向，构成数学的重要基础；(2)与一般科学方法相应的数学方法.譬如分析综合、类比联想、归纳演绎等一般科学方法，在用于数学时有其自己的特点；(3)常用数学方法.包括RMI方法、反证法、数学归纳法、数形结合法、数学构造法等；(4)数学解

题方法与技巧.包括换元法、消元法、参数法、交集(轨)法、递推方法、逐步逼近法等等.

人们常用数学思想来泛指某些有重大意义的、内容比较丰富、体系相当完整的数学成果.比如微积分思想、概率统计思想等等.但它们都可换成方法而同样适用.同一个数学成就,当用它去解决问题时,就称之为数学方法.当评价它在数学体系中的自身价值和意义时,就称之为数学思想.其实,数学思想和数学方法往往不加区别,也往往难以严格区别开来.

数学知识与数学方法是密切联系的,数学方法伴随着数学的发展而发展,数学方法是属于深层次结构的知识.日本数学家米山国藏指出:“无论对于科学工作者、技术人员,还是数学教育工作者,最重要的就是数学的精神、思想和方法,而数学知识是第二位的”.从某种意义上讲,数学方法是数学知识体系的灵魂,数学方法是数学的本质.数学方法在科学研究和社会生活中有不可替代的作用,它能提供定量分析和精确计算的手段;能提供逻辑推理和科学抽象的工具.

数学是思维的体操,许多国家的教育工作者都把本语、外语和数学作为三门语言课来学习.而数学的训练主要是数学方法的训练.数学方法的训练使人们具有数学的头脑,具有严格的逻辑推理能力,富有创造性.

当代学校数学教育能为学生今后的生活和工作所做的准备主要有两个方面,一是数学知识,一是数学方法,这两者的有机结合便形成数学能力.与数学知识相比,数学方法具有更广泛的迁移作用,其时效性更长,因此,在当代的学校数学教育中,数学方法的作用被提到更重要的地位.

目前,我国的数学方法论研究已经得到了较大的发展,数学方法论已经成为师范院校学生学习和中小学数学教师进修的一门重要课程.十多年的教学实践表明,数学方法论课程的开设确实使学生对数学学科的发展规律及数学思想方法理论有了较系统的认识、取得了一定的教学效果.然而,一个不容回避的事实是,虽然学生学习了数学方法论课程,但其解决数学问题的能力并没有什么明显的提高.导致这种结果的原因可能是多方面的,但其主要原因之一是,数学方法论课程注重理论分析,而对如何解题则缺乏实际指导作用.

自从八十年代美国倡导将“问题解决”作为数学教育的中心以及G·波利亚(polya)的解题著作引进中国以来.解题已成为国内数学教育界研究的热点.解题研究的文章不胜枚举,占据各中学数学类期刊篇幅的大

半江山，可谓来势汹汹，至今势头不减．内容涉及中学代数、三角、平面几何、立体几何、平面解析几何等．形式包括中考、高考、数学竞赛试题的解法剖析与分类，解题策略和思维过程的探求，兼及数学习题的科学性、数学习题的编制、解题错误分析、评价和客观性习题的研究等．重视解题已成为我国中学数学教学的传统，力求提高解题教学在数学教学中的作用已成为现代数学教学理论的一个特点．现代兴起的“问题教学法”、“研究法”、“发现法”、“试错法”等教学法，都明显地突出了解题教学在数学教学中的地位．中学师生共奔“题海”，一派“繁荣”之景象．这“繁荣”场景的背后是教师与学生解题方向的迷失，不知为何解题，不知题从何来，，不知解何题，不知如何解题．究其原因，固然有国内教育体制问题、教育目标的确立问题等深层次原因．但单就不知如何解题而论，学生陷于解题海洋，为解题而解题，没有得到系统的数学方法训练，没有通过系统的、有计划的解题训练掌握数学方法体系，没有用数学方法来指导解题，没有做到数学方法与解题的互动是其主要原因．事实上，我国多年来的数学解题研究并没有从一招一式中摆脱出来，数学解题教学中的策略与方法意识没有得到足够重视．

我国数学教学中，一部分人“高高在上”地大谈理论高深的数学方法论，而另一部分人却热衷埋头于繁乱无序的解题招式，这种数学方法论与解题研究严重脱节的局面亟需打破，取而代之的应当是数学方法论研究与解题研究的有机结合．通过数学方法论的研究为解题研究提供较高层次的方向引导，使解题研究更具效率；同时通过具体的解题研究为数学方法论的研究提供鲜活而丰富的素材，做到二者相互促进，各得其所．基于这种考虑，本书拟对数学方法与解题两者如何有机地结合起来进行尝试探索，旨在提供一条通过解题掌握系统的数学方法，并能灵活运用所掌握的数学方法解决数学问题的有效途径．

本书在参考已有关于数学方法的多种分类方法基础上，并将其聚焦于中学数学范畴，结合目前对中学数学教育的时代要求，按如下五部分展开讨论．

一、数学探索发现方法．包括观察、实验、归纳、类比、一般化、特殊化等．

二、数学论证方法．包括演绎、分析与综合、比较、分类、反证法、数学归纳法等．

三、常用数学解题方法.包括换元方法、消去方法、参数方法、递推方法、计算两次方法、交集方法、逐步逼近方法、构造方法等.

四、数学建模方法.包括数学建模方法的基本理论与建模范例.

五、数学解题策略研究.包括数学解题策略的意义与特征、数学解题的基本策略以及数学解题策略的训练等.

由于篇幅所限,有些方法比如数形结合方法、关系映射反演方法以及物理模拟方法等没有列进本书,不过前两种方法的观点在本书中都有一定体现,读者只要留心完全可以感受到它们的实质与妙用.至于物理模拟方法则需要读者通过充分运用相关物理知识与原理解决数学问题的训练来体会和掌握.事实上,物理模拟方法在某种程度上可以认为是数学建模方法的逆方法.

第一章　数学探索发现方法

§1 观　察

一、观察的含义

观察是人们有目的、有计划地用感官去认识自然界中各种现象的活动,它是获得科学事实与经验知识的重要方法.观察是一种特殊形态的知觉,它不仅是一种单纯的知觉过程,同时也包含着积极的思维过程.数学观察则是人们通过视觉对数学对象的特征、形式、结构及关系的辨认,从而发现某些规律或性质的方法.在解决数学问题的过程中,所观察的客观事物就是数学问题本身,要感知和描述的性态就是文字、符号、式子的含义,数据、式子、图形等的结构特征和它们之间的关系.

二、观察的分类

数学中的观察按观察对象的特性可分为:

- 数学观察
  - 定性观察(特征、性质、关系等)
    - 对各种数学对象的现象的观察
    - 对数学图形(象)、图表的观察
    - 对数学公式的结构特征的观察
    - 对逻辑推理过程的观察
  - 定量观察(量的关系的考虑)——对各种数据和数量关系的观察

按观察的方式可分为如下三类:

1.抽样观察

抽样观察是选择一些特殊情况进行观察,这里的抽样不一定按某种顺序进行,可以是随机的,也可以根据研究的需要来选择.一般抽取较典型的或较易于处理的特殊情况作观察,以提高抽样观察的效果.

例1　设 θ 为锐角,试比较 $\dfrac{1-\sin\theta}{1-\cos\theta}$ 和 $\cot\theta$ 的大小.

解:抽样观察:$\theta=30^\circ,\ \dfrac{1-\sin\theta}{1-\cos\theta}=2+\sqrt{3},\ \cot\theta=\sqrt{3}$;

$$\theta=45^\circ,\ \frac{1-\sin\theta}{1-\cos\theta}=1,\ \cot\theta=1;$$

$$\theta=60^\circ,\ \frac{1-\sin\theta}{1-\cos\theta}=\frac{1}{2+\sqrt{3}},\ \cot\theta=\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

猜测结论：　当 $0^\circ<\theta<45^\circ$ 时，$\frac{1-\sin\theta}{1-\cos\theta}>\cot\theta$；

当 $\theta=45^\circ$ 时，$\frac{1-\sin\theta}{1-\cos\theta}=\cot\theta$；

当 $45^\circ<\theta<90^\circ$ 时，$\frac{1-\sin\theta}{1-\cos\theta}<\cot\theta$.

下面证明上述猜测结论：

$$
\begin{aligned}
\frac{1-\sin\theta}{1-\cos\theta}-\cot\theta &= \frac{(\sin\theta-\sin^2\theta)-(\cos\theta-\cos^2\theta)}{\sin\theta(1-\cos\theta)}\\
&= \frac{(\sin\theta-\cos\theta)[1-(\sin\theta+\cos\theta)]}{\sin\theta(1-\cos\theta)}\\
&= (1-\cot\theta)\frac{1-(\sin\theta+\cos\theta)}{1-\cos\theta}\\
&= (\cot\theta-1)\frac{\sin\theta+\cos\theta-1}{1-\cos\theta}
\end{aligned}
$$

其中 $(1-\cos\theta)$ 恒为正值，又由于 θ 为锐角，1、$\sin\theta$、$\cos\theta$ 可以看作直角三角形的斜边和两条直角边的长，因此有 $\sin\theta+\cos\theta>1$.

而 $\cot\theta-1$ 按 $\theta<45^\circ$、$\theta=45^\circ$、$\theta>45^\circ$ 分别取正值、零、负值，于是证得上述结论成立.

在上例中，θ 采取了抽样观察的方法. 对于所考虑的对象为连续量或虽为离散量但数量很大时，可抽取一些易于处理的特殊情况进行抽样观察. 抽样观察具有更大的选择性，善于抽样观察的结果往往能启发我们发现解题的线索.

2. 系统观察

当研究对象能视为系统时，一般按系统顺序进行的观察称为系统观察，尤其当研究对象的系统具有无限性质时，这种观察对于研究系统的规律性更为方便. 一般归纳法就常以系统观察为基础.

例 2　证明形如 $N=\underbrace{44\cdots4}_{n\text{个}}\underbrace{88\cdots8}_{(n-1)\text{个}}9$ 的数必是完全平方数.

分析：先就 n 进行系统观察.

$$
\begin{aligned}
&n=1, N=49=7^2;\\
&n=2, N=4489=67^2;\\
&n=3, N=444889=667^2;\\
&n=4, N=44448889=6667^2.
\end{aligned}
$$

因此猜想　$N=(\underbrace{66\cdots6}_{(n-1)\text{个}}7)^2$.

得到这一猜想后，证明就有了目标，探索证明途径就较为容易.

记 $\underbrace{11\cdots1}_{n个}=A$.

则：$N=4A(10^n-1)+12A+1=4A\times\underbrace{99\cdots9}_{n个}+12A+1$

$=4A\times9A+12A+1=36A^2+12A+1$

$=(6A+1)^2=(\underbrace{66\cdots6}_{(n-1)个}7)^2$.

例3 化简：$1!\times1+2!\times2+3!\times3+\cdots+n!\times n$.

解：先系统观察特殊情况：

(1) 当 $n=1$ 时，原式 $=1=(1+1)!-1$；

(2) 当 $n=2$ 时，原式 $=5=(2+1)!-1$；

(3) 当 $n=3$ 时，原式 $=23=(3+1)!-1$；

(4) 当 $n=4$ 时，原式 $=119=(4+1)!-1$.

由此作出一般猜想：原式 $=(n+1)!-1$.

证明：$1+(1!\times1+2!\times2+3!\times3+\cdots+n!\times n)$

$=1!\times2+2!\times2+3!\times3+\cdots+n!\times n$

$=2!+2!\times2+3!\times3+\cdots+n!\times n$

$=2!\times3+3!\times3+\cdots+n!\times n$

$=3!+3!\times3+\cdots+n!\times n$

$=\cdots=n!+n!\times n=(n+1)!$

所以原式 $=(n+1)!-1$.

3.穷举观察

当研究对象的所有可能的特殊情况为有限时，把各种可能的特殊情况一一列出加以观察称为穷举观察。这是一种全面的观察，它要求列出的各特殊情况互不重复且无遗漏.一般穷举法就是以穷举观察为基础.

例4 求方程 $1!+2!+\cdots+m!=n^2$ 的正整数解.

解：记 $1!+2!+\cdots+m!=S_m$.

先就 m 的值对 S_m 进行系统观察：

$m=1, S_1=1!=1$;

$m=2, S_2=1!+2!=3$;

$m=3, S_3=1!+2!+3!=9$;

$m=4, S_4=1!+2!+3!+4!=33$;

$$m=5, S_5=1!+2!+3!+4!+5!=153;$$
$$m=6, S_6=1!+2!+\cdots+6!=873;$$
$$m=7, S_7=1!+2!+\cdots+7!=5913.$$

上面除 $m=1$、3 时 $S_1=1^2$、$S_3=3^2$ 外，其余 S_2、S_4、S_5、S_6、S_7 都不是完全平方数，观察这些数的特点可以发现末位数全为 3，这是为什么？我们不妨再对 $m!$ 作一系统观察：

$$1!=1 \qquad 5!=120$$
$$2!=2 \qquad 6!=720$$
$$3!=6 \qquad 7!=5040$$
$$4!=24 \qquad 8!=40320$$

由于 5! 末位数为 0，因此当 $m\geqslant 5$ 时，$m!$ 末位必全为 0，

而 $\quad 1!+2!+3!+4!=33.$

$\therefore\quad$ 当 $m\geqslant 4$ 时，S_m 的末位数均为 3.

那么末位数是 3 的数能否为完全平方数？

通过对完全平方数的末位数进行穷举观察可知：.完全平方数的末位数可能为 0、1、4、5、6、9，但不可能为 2、3、7、8. 故本题只有两组正整数解：

$$\begin{cases} m=1 \\ n=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} m=3 \\ n=3 \end{cases}$$

三、观察的作用

在科学研究中，几乎处处需要观察，只要勤于观察和善于观察，总能有所发现，总能解决一些问题. 大物理学家爱因斯坦(Einstein)在论述观察在科学中的作用时指出："理论所以能够成立，其根据就在于同大量的单个观察关联着，而理论的'真理性'也正在此". 同样，在数学活动中，常常通过观察来搜集新材料，发现新事实. 数学活动的过程离不开观察，观察可以认识数学的本质、揭示数学的规律、探求数学的方法.

1. 有助于发现数学对象的特征、性质与关系，发现数学命题

数学思维通常都要从观察数学对象开始，结合运用其它方法才能获得关于客观事物的本质和规律的认识，因此，观察法是数学思维过程的必需的和第一位的方法. 就数学的基础而言，公理的确立就是首先通过观察事物的运动变化，再通过抽象概括才得以形成的；数学概念作为现实世界的事物和现象的数量关系和空间形式的基本属性在人们头脑中的反映，很多是从直观得来的. 数学真命题(如定理、公式等)，都是数学对象属性

之间关系的反映，认识这些关系，很多也是从数学对象的直接观察得来的．在数学知识的发现过程中，观察法是常用的有效方法之一．

大数学家欧拉(Euler)曾经指出："今天人们所知道的数的性质，几乎都是由观察所发现的，并且早在用严格论证确认其真实性之前就被发现了．甚至到现在还有许多关于数的性质是我们所熟悉而不能证明的；只有观察才使我们知道这些性质．因此我们认识到，在仍然是很不完善的数论中，还得把最大的希望寄托于观察之中，这些观察将导致我们继续获得以后尽力予以证明的新的性质．"事实上，数论中靠观察获得的命题非常多．譬如哥德巴赫猜想、费马大定理等都是由观察提出的．

再譬如：设 f 为整数 n 的素因子个数，按 f 的偶性或奇性分别称为"偶分解"或"奇分解"，如 $30=2\times3\times5$ 为奇分解，而 $60=2\times2\times3\times5$ 为偶分解。则：

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
偶	奇	奇	偶	奇	偶	奇	奇	偶	偶	奇	奇	奇	偶	偶	偶

通过观察可猜测：奇分解与偶分解个数大致相等．现已证明：在前 n 个整数中，当 n 很大时，偶分解同奇分解大约一样多(即 $n\to+\infty$时其比值趋于 1)．

G·波利亚曾尝试到 $n=1500$，并猜想：$n\geqslant2$，在前 n 个整数中，偶分解数从不占多数．数学家 D. H. 兰姆曾一直算到 $o=600000$，波利亚的猜想仍成立．但至今尚未被证明．

2．有利于探索、发现解题思路，预见题目结果

数学解题离不开观察，因为数学观察不仅是数学问题在视觉系统中的感知，还包含对数学问题的精密细致的考察，以及积极合理的思索，观察是一种有目的、有计划地搜集题目信息并伴随着积极思维的过程．

数学解题过程中的观察，是审题和分析的一种特殊方式．观察包括审题和分析过程，通过初步观察弄清题意，明确观察的目的与任务，有目的地对问题的各个组成部分进行考察、分析和比较，认清它们各自的特征及它们之间的关系，为确定解题思路打下基础．但是，观察比一般的审题和分析的意义更深远，观察往往贯穿于整个解题过程．一般来说，在数学解题过程中，前一个观察所获得的感知又为下一个观察提供了条件．观察不断深入，从而洞察问题的数学本质．

例5 设 A,B,C 为 ΔABC 的三个内角且方程 $(\sin B-\sin A)x^2+(\sin A-\sin C)x+(\sin C-\sin B)=0$ 有二重根,求 B 的范围.

分析:容易联想到判别式法求解,但较繁琐.仔细观察容易发现 $x=1$ 为方程的二重根,于是断定用韦达定理求解.

解:显然 $x=1$ 为方程二重根,由韦达定理知

$$\frac{\sin C-\sin B}{\sin B-\sin A}=x_1x_2=1,\text{即}\quad 2\sin B=\sin A+\sin C.$$

$$\therefore\quad 4\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}=2\sin\frac{A+C}{2}\cos\frac{A-C}{2}$$

从而 $$\sin\frac{B}{2}=\frac{1}{2}\cos\frac{A-C}{2}\leqslant\frac{1}{2}(A=C\text{ 时达最大值}).$$

$$\therefore\quad 0<\frac{B}{2}\leqslant\frac{\pi}{6},\text{即}\quad 0<B\leqslant\frac{\pi}{3}.$$

例6 求证:$\dfrac{2\sin\beta}{\cos\alpha+\cos\beta}=\tan\dfrac{\alpha+\beta}{2}-\tan\dfrac{\alpha-\beta}{2}$.

证明:观察所要求证的等式的左、右两边,容易发现左边是 α 与 β 的三角函数式,右边是$\dfrac{\alpha+\beta}{2}$与$\dfrac{\alpha-\beta}{2}$的三角函数式,怎样化异为同呢?联想到

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \qquad ①$$

因此,关键是左边的分子 $2\sin\beta$ 如何能化成$\dfrac{\alpha+\beta}{2}$与$\dfrac{\alpha-\beta}{2}$的三角函数,如果具有较强观察力,会注意到

$$\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{\alpha-\beta}{2}=\beta.$$

于是

$$\begin{aligned}\sin\beta&=\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\\&=\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\qquad ②\end{aligned}$$

将①、②两式代入原式左边,经过变形,容易得出右边的结果.

例7 a、b、c 表示三角形三边的长,且都为整数,其中 $a\leqslant b\leqslant c$,问当 $b=n$ 时,有多少个这样的三角形.

解:本题直接求解较为困难,不妨先考察 $n=1,2,3$ 时的情况:

当 $n=1$ 时,有一个三角形,三边长分别为

$$1,1,1.$$