



文登教育集团课堂用书  
聚骄公司全心专业设计



中国最值得信赖的考研品牌

# 2011版考研数学

# 复习指南

高分

市面上唯一一本由陈文灯、黄先开教授亲自执笔的全程辅导用书  
涵盖文登培训课堂讲义全部精华

陈文灯 黄先开 编著  
(经济类)

(附赠60元文登网校课程)

世界图书出版公司



文登教育集团课堂用书  
聚骄公司全心专业设计



**FOCUS**  
聚焦图书

中国最值得信赖的考研品牌

# 2011版考研数学

# 复习指南

高分

市面上唯一一本由陈文灯、黄先开教授亲自执笔的全程辅导用书  
涵盖文登培训课堂讲义全部精华

陈文灯 黄先开 编著

(经济类)

(附赠60元文登网校课程)

世界图书出版公司

0/3

C580-30/7

-80

## 图书在版编目(CIP)数据

数学复习指南. 经济类 / 陈文灯等编著. —17版. —北京:世界图书出版公司北京公司, 2004.1

ISBN 978-7-5062-5213-3

I. 数... II. 陈... III. 高等数学 - 研究生 - 入学考试 - 解题 IV. 013-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 014885 号

数学复习指南(经济类)

(2011 版)

---

主 编: 陈文灯 黄先开

责任编辑: 张中兴

封面设计: 余曙敏

---

出 版: 世界图书出版公司北京公司

发 行: 世界图书出版公司北京公司

(北京朝内大街 137 号 电话 88861708 邮编 100089)

销 售: 各地新华书店

印 刷: 北京忠信诚胶印厂

---

开 本: 787 × 1092 毫米 1/16

印 张: 41.25

字 数: 605 千字

版 次: 2010 年 2 月第 17 版 2010 年 2 月第 1 次印刷

---

ISBN 978-7-5062-5213-3/O · 334

定价: 53.80 元

---

服务热线: 010 — 88861708

# 天道酬勤

## ——我的考研数学满分之路

(文/丁智:北京邮电大学应属毕业,报考清华大学自动化系。数学一:150分,专业课:120分,总分:400分)

抱最大的希望,付最大的努力,做最坏的打算。

——丁智

考研已经过去三个月了,那使人压抑得喘不过气来的硝烟也已经渐渐散去,但考研留下的回忆却是刻骨铭心、永远难以忘怀的,现在回头想想,感慨良多。

现代社会的竞争如此激烈,本科所学习的知识已远远不能满足社会发展的需要,因此继续深造已成为每个有志青年的必然选择。我是从大三下学期就决定报考清华大学自动化系模式识别与智能系统专业,“人生难得几回搏”,这是我和家人的梦想,也是我最后一次机会。

下面主要讲一下我考试中发挥得比较好的数学学习体会。

(1)通读大纲。大纲发布后,首先通读大纲,了解数学(一)对各类知识点的要求。数学由于其自身学科的特点,一直都是“拉分”的科目,即高分考生和低分考生之间的分差比较大,数学成绩往往决定着考研的成功与否。对于英语和政治,大部分理科考生的分数都集中在55分到70分之间,相对来说对总分的贡献不如数学那么明显,因而经常听到“得数学者得天下”的说法,这种说法可能并不怎么正确,但却充分说明了数学的重要性。

(2)通读教材。暑假期间,我利用上文登辅导班的间隙通读了教材,几本比较经典的教材有陈文灯老师在课堂上推荐的同济大学的《高等数学》和浙江大学的《概率论和数理统计》,此外同济大学的《线性代数》也相当不错。有很多同学认为读教材是浪费时间,只是埋头做题,结果题目做了很多,但效果并不好。我认为知识点是不变的,变的只是出题的方式和角度,只有对基本概念、基本定理有充分的理解、把握和运用,以不变应万变才是取胜之道。我将教材精读了三遍,定理的证明及课后的习题也已熟练掌握,为考高分打下了坚实基础。在其后遇到模棱两可的问题时,也经常重翻课本。当然,对于像我一样数学成绩一般的学生来说,上数学强化班是非常必要的。我非常感谢陈文灯老师,他的讲解深入浅出,言简意赅,总是一句话就能抓住题目的关键,使我获益良多,极大地增强了考研的信心。

(3)适量做题。大四上学期开学后,课业负担不很重。9月至11月是考研数学复习中最重要的和最累的阶段,即在该阶段内要有针对性地适量做题,这个阶段基本就决定了你的考试水平。我推荐陈文灯老师的《考研数学复习指南》(世界图书出版公司出版)和《考研数学题型集粹与练习集》(现为《考研数学高分题型精讲精练》)。这两本书经过多年的实践考验和不断修正,已经集考研之大成,成为每个考研学子的必备书。这两本书并不是看一遍两遍就可以的,对于大学数学成绩一般的学生来说,至少应该看三遍,尤其是一些理解得不太透彻的地方,需要反复地研读、揣摩、练习。第一遍是最吃力的,我大约用了一个半月的时间。看第二遍、第三遍的时候速度会快得多,尽管有很多以前不会做的题现在还是不会,但对题目的感觉强了很多,这样做能为下一轮的复习打下坚实的基础。题目做得越多,往往越能一眼抓住问题的关键所在,有的放矢。在第一遍复习过程

中我把曾经做错的和不会做的习题都抄在一个笔记本上,并且随身携带、经常复习,了解自己错误的根源所在,搞清楚问题是出在理解得不透彻还是思维出现了误区。开始的时候一天能抄30道错题,那自然是非常郁闷的,后来随着水平的提高,一天只有十几道了。这是一个蛹化蝶的过程,很漫长,也很痛苦,希望大家一定要坚持住。

(4)做模拟试题和真题。到了12月份的冲刺阶段,主要任务是做模拟试题和真题。我一般规定自己每天在150分钟的时间内完成一套试题。每次都当成真正的考试,认真地在答题纸上做一遍,做完整套试卷以后严格按照标准答案批改,给自己打分,并将所犯错误抄在一个专门的错题集上。将错题再认真地做一遍,这样一天做一套模拟试卷,周末专门拿出一整天来研究错题,查漏补缺。我做的是陈老师出的《模拟考场15套》,全部认真做完。有些题即使做了十遍还是出错,这确实挺打击我的信心,人的惯性思维是很难改变的,需要有持之以恒的精神和永不服输的态度。

真题的作用是不容忽视的,经过十几年的考试,相当多的题目模式已经定了下来,很多考研题目都是类似的。考研真题经过千锤百炼,在思想性上有较高的参考价值,需要多加揣摩。尤其是近几年的考题,反映了命题者出题的方式和思路,更需要注意。关于考试时的做题习惯问题,这需要平时的积累。在平时答题时,要注意培养好的习惯,如需根据题意注意是否需要分类讨论,分类讨论的结果最后记住要做一个总结,不定积分的结果不要忘记加一个常数,与实际有关的题不要忘记加单位等等。这些看上去微不足道的地方,都可能导致你的失分,如果是填空题,那就一分得不了了,被扣这样的分数是很冤枉的。随着“考研热”年年升温,竞争也越来越激烈,特别是名牌大学的热门专业,就像今年我报考的清华自动化系仅招收41人,报考的人将近800,录取比例是20:1,其中的热门专业更是远高于这个比例。一分的差距可能决定你录取与否,为了自己的理想,应该每分必争,不放弃任何成功的机会。

最后,谈谈关于考试的心态调整问题。考研与高考不同,并不是每个人都考。随着考研日期的一天天逼近,看到已保研和找到工作的同学整日悠闲自在,自己却早出晚归,累得头昏脑胀,心理不平衡是难免的。但转念一想,世上没有免费的午餐,只有付出才会有收获,“走自己的路,让别人说去吧”,心情自然就会平复下来。还有一些同学复习的效果不怎么好,就怨天尤人,对自己失去信心,最终放弃了考研,放弃了改变自己命运的机会。

其实,考研并没有像大家认为的那么难,基础题还是占多数的,如果将会做的题全都做对,及格还是不成问题的。我的宗旨应该是“抱最大的希望,付最大的努力,做最坏的打算”。要有一定的压力,但不要太大,要将压力转化为动力。尽自己的全力,但求无愧吾心。在临场考试中,一定要细心冷静,沉着应对,由易到难,该放弃时就放弃,不要寄希望于超水平发挥,毕竟能超水平发挥的人可謂是少之又少。

关于复习的时间与效率问题。我认为数学不是拿时间来“堆”的。数学来不得半点马虎,如果开始做错,那下面完全是徒劳的。复习数学需要清醒的意识和缜密的思维,而二者都需要在头脑清楚的时候才能够做到。每个人的兴奋时间不一样,我是在上午比较清醒,所以上午我集中精力学习3小时的数学,花费了时间一定要有所收获。其实我每天的学习时间并不很长,只有8小时左右,否则保证不了效率。我认为考研最重要的不是每天学习了多长时间,而是学到了什么,是否能持之以恒地坚持下去。在下半年的时间里,除特殊情况外,我基本上没有周末和节假日,每天的作息时间非常有规律,不给自己任何偷懒的机会和理由。

希望我的体会能使大家少走一些弯路。考研对每个人来说都是一件很不容易的事情,也是人生的一个重要岔路口,我们应该珍惜并把握住这个机会。

最后,以蒲松龄的自勉联“有志者,事竟成,破釜沉舟,百二秦关终属楚;苦心人,天不负,卧薪尝胆,三千越甲可吞吴”与广大考研的战友共勉,祝愿大家在2011年的考研过程中,能实现自己的梦想!

# 前言

数学统考从1987年至今经历了24个年头。其间“数学考试大纲”虽然变化不大，但每年的试题均有所创新，不过仔细分析还是万变不离其宗。只要把本书归纳总结的题型、方法和技巧掌握住，研读我们精心设置的典型例题，即可达到触类旁通、融会贯通的境界。

我们要提醒读者的是，数学想要考高分，一定要了解考研数学究竟要考什么？综观一二十年试题可知，主要考查如下四方面：

- (1) 基础（基本概念、基本理论、基本方法）；
- (2) 解综合题的能力；
- (3) 分析问题和解决问题的能力，即解应用题的能力；
- (4) 解题的熟练程度（通过大题量、大计算量进行考核）。

真正了解了要考查的东西，复习时才能有的放矢。关于数学基础、数学题型与考试目标之间的逻辑关系，我写了四句话，供大家参考、体会：**数学基础树的根，技巧演练靠题型；勤学苦练强磨砺，功到高分自然成。**

## 本书特点：

(1) 对大纲要求的重要概念、公式、定理进行剖析，增强读者对这些内容的理解和记忆，避免犯概念性错误、错用公式和定理的错误。

(2) 归纳、总结了二十多个思维定式，无疑这对读者解题会有所帮助，但我们的目的是引导读者去归纳总结，养成习惯。这样应试的时候就能很快找到解题突破口。

(3) 用“举题型讲方法”的格式代替传统的“讲方法套题型”的做法，使读者应试时，思路畅通、有的放矢，许多书的跟进也说明这种做法的确很有效。

(4) 广泛采用表格法，使读者便于对照、比较，对要点一目了然。

(5) 介绍许多新的快速解题方法和技巧。例如，中值定理证明中的辅助函数的做法、不定积分中的凑微分法、不等式证明尤其是定积分不等式的证明方法等，都是我们教学研究的成果，对读者应试能起到“事半功倍”的效果。

(6) 创新设计出很多好的例题，以期提高读者识别题型变异的能力。

历经十七载的再版和修订，本书已成为广大考研读者的良师诤友，同时也有很多教师同行用该书做教学参考。为了精益求精，恳请朋友们拨冗指正。

陈灯

# 目 录

篇要 微积分解题的四种思维定式 .....	1	习题二 .....	59
<b>第一篇 微积分</b>		<b>第三章 不定积分</b> .....	
<b>第一章 函数·极限·连续</b> .....		62	
§ 1.1 函数 .....	6	§ 3.1 不定积分的概念与性质 .....	62
一、函数的定义 .....	6	一、不定积分的概念 .....	62
二、函数的定义域的求法 .....	7	二、基本性质 .....	62
三、函数的基本性质 .....	8	三、基本公式 .....	63
四、分段函数 .....	12	§ 3.2 基本积分法 .....	64
五、初等函数 .....	13	一、第一换元积分法(也称凑微分法) .....	64
§ 1.2 函数的极限及其连续性 .....	17	二、第二换元积分法 .....	68
一、概念 .....	17	三、分部积分法 .....	72
二、重要定理与公式 .....	19	§ 3.3 各类函数积分的技巧及分析 .....	77
§ 1.3 极限的求法 .....	26	一、有理函数的积分 .....	77
一、未定式的定值法 .....	26	二、简单无理函数的积分 .....	78
二、类未定式 .....	30	三、三角有理式的积分 .....	80
三、数列的极限 .....	31	四、含有反三角函数的不定积分 .....	83
四、极限式中常数的确定(重点) .....	36	五、抽象函数的不定积分 .....	84
五、杂例 .....	39	六、分段函数的不定积分 .....	85
习题一 .....	42	习题三 .....	86
<b>第二章 导数与微分</b> .....		<b>第四章 定积分及反常积分</b> .....	
46		89	
§ 2.1 定义·定理·公式 .....	46	§ 4.1 定积分性质及有关定理与公式 .....	89
一、导数与微分的定义 .....	46	一、基本性质 .....	89
二、定理 .....	48	二、定理与公式 .....	92
三、导数与微分的运算法则 .....	48	§ 4.2 定积分的计算法 .....	96
四、基本公式 .....	49	一、牛顿—莱布尼茨公式 .....	96
§ 2.2 各类函数导数的求法 .....	49	二、定积分的换元积分法 .....	96
一、复合函数微分法 .....	49	三、定积分的分部积分法 .....	98
二、参数方程微分法 .....	50	§ 4.3 特殊形式的定积分计算 .....	99
三、隐函数微分法 .....	52	一、分段函数的积分 .....	99
四、幂指函数微分法 .....	53	二、被积函数带有绝对值符号的积分 .....	101
五、函数表达式为若干因子连乘积、 乘方、开方或商形式的微分法 .....	53	三、被积函数中含有“变限积分” 的积分 .....	102
六、分段函数微分法 .....	54	四、对称区间上的积分 .....	104
§ 2.3 高阶导数 .....	55	五、被积函数的分母为两项,而分子为 其中一项的积分 .....	105
一、定义与基本公式 .....	55	六、由三角有理式与其他初等函数通 过四则或复合而成的函数的积分 .....	106
二、高阶导数的求法 .....	56	七、杂例 .....	107

§ 4.4 定积分有关命题证明的技巧 .....	109	§ 7.2 多元函数微分法 .....	171
一、定积分等式的证明 .....	109	一、简单显函数 $u=f(x,y,z)$ 的微分法 .....	171
二、定积分不等式的证明 .....	117	二、复合函数微分法 .....	172
习题四(1) .....	123	三、隐函数微分法 .....	175
§ 4.5 反常积分 .....	125	§ 7.3 多元函数的极值 .....	178
一、基本概念 .....	125	一、概念、定理与公式 .....	178
二、题型归纳及思路提示 .....	126	二、条件极值与无条件极值 .....	178
习题四(2) .....	127	习题七 .....	182
<b>第五章 中值定理的证明技巧</b> .....	128	<b>第八章 二重积分</b> .....	184
§ 5.1 连续函数在闭区间上的性质 .....	128	§ 8.1 概念·性质 .....	184
一、基本定理 .....	128	一、概念 .....	184
二、有关闭区间上连续函数的命题 的证法 .....	128	二、性质 .....	184
习题五(1) .....	130	§ 8.2 二重积分的解题技巧 .....	186
§ 5.2 微分中值定理及泰勒公式 .....	131	一、 $\iint_D f(x,y)d\sigma$ 的解题程序 .....	186
一、基本定理 .....	131	二、直角坐标系中积分限的确定 .....	187
二、泰勒公式 .....	132	三、极坐标系中积分限的确定 .....	188
§ 5.3 证题技巧分析 .....	135	四、典型例题分析 .....	188
一、欲证结论:至少存在一点 $\xi \in (a,b)$ , 使得 $f^{(n)}(\xi)=0$ 的命题证法 .....	135	习题八 .....	200
二、欲证结论:至少 $\exists$ 一点 $\xi \in (a,b)$ , 使得 $f^{(n)}(\xi)=k(k \neq 0)$ 及其代数式 的证法 .....	137	<b>第九章 无穷级数</b> .....	202
三、欲证结论:在 $(a,b)$ 内至少 $\exists \xi, \eta$ , $\xi \neq \eta$ 满足某种关系式的命题的证法 .....	142	§ 9.1 基本概念及其性质 .....	202
习题五(2) .....	143	一、概念 .....	202
<b>第六章 一元微积分的应用</b> .....	144	二、基本性质 .....	202
§ 6.1 导数的应用 .....	144	§ 9.2 数项级数判别法 .....	203
一、利用导数判别函数的单调增减性 .....	144	一、正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n, (u_n \geq 0)$ 敛散性的 判别法 .....	203
二、利用导数研究函数的极值与最大值 .....	145	二、交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n (u_n > 0)$ 的 判别法 .....	207
三、关于方程根的研究 .....	151	三、任意项级数 .....	208
四、函数作图 .....	155	§ 9.3 幂级数 .....	210
§ 6.2 定积分的应用 .....	159	§ 9.4 无穷级数求和 .....	216
一、微元法及其应用 .....	159	一、幂级数函数求和 .....	216
二、平面图形的面积 .....	160	二、数项级数求和 .....	219
三、立体体积 .....	161	习题九 .....	223
习题六 .....	162	<b>第十章 常微分方程及差分方程简介</b> .....	225
<b>第七章 多元函数微分学</b> .....	165	§ 10.1 概念 .....	225
§ 7.1 概念、定理与公式 .....	165	§ 10.2 一阶微分方程 .....	225
一、二元函数的定义 .....	165	一、变量可分离的微分方程 .....	225
二、二元函数的极限及连续性 .....	166	二、齐次方程 .....	227
三、偏导数、全导数及全微分 .....	167	三、一阶线性微分方程 .....	228
四、基本定理 .....	169		



§ 10.3 二阶线性微分方程	230
一、二阶线性微分方程解的结构定理	230
二、二阶常系数线性齐次方程通解的求法	231
三、二阶常系数线性非齐次方程特解的求法	232
四、二阶常系数线性非齐次方程通解的求法	236
§ 10.4 差分方程	238
一、基本概念	238
二、一阶常系数线性差分方程的求解方法	238
习题十	241
<b>第十一章 函数方程与不等式证明</b>	243
§ 11.1 函数方程	243
一、利用函数表示法与用何字母表示无关的“特性”求解方程	243
二、利用极限求解函数方程	243
三、利用导数的定义求解方程	244
四、利用变上限积分的可导性求解方程	245
五、利用连续函数的可积性及原函数的连续性求解	246
六、利用解微分方程的方法求解 $f(x)$	246
§ 11.2 不等式的证明	247
一、利用微分中值定理(重点)	247
二、利用函数的单调增减性(重点)	249
三、利用函数的极值与最值	250
四、利用函数图形的凹凸性	252
五、杂例	252
习题十一	253
<b>第十二章 微积分在经济中的应用</b>	256
§ 12.1 一元微积分在经济中的应用	256
一、概念与公式	256
二、典型题例的解题思路分析	257
§ 12.2 二元微分学在经济中的应用	262
习题十二	263
<b>篇要 线代的八种思维定式</b>	264

## 第二篇 线性代数

<b>第一章 行列式</b>	268
§ 1.1 行列式的概念	268

一、排列与逆序	268
二、 $n$ 阶行列式的定义	269
§ 1.2 性质、定理与公式	270
一、行列式的基本性质	270
二、行列式按行(列)展开定理	273
三、重要公式与结论	273
§ 1.3 典型题型分析	274
题型一 抽象行列式的计算	274
题型二 低阶行列式的计算	275
题型三 $n$ 阶行列式的计算	277
§ 1.4 杂例	282
习题一	284

## **第二章 矩阵**

§ 2.1 矩阵的概念与运算	286
一、矩阵的概念	286
二、矩阵的运算	286
§ 2.2 逆矩阵	289
一、逆矩阵的概念	289
二、利用伴随矩阵求逆矩阵	290
三、矩阵的初等变换与求逆	291
四、分块矩阵及其求逆	292
五、矩阵的秩及其求法	292
§ 2.3 典型题型分析	292
题型一 求逆矩阵	292
题型二 求矩阵的高次幂 $A^n$	295
题型三 有关初等矩阵的命题	297
题型四 解矩阵方程	297
题型五 求矩阵的秩	299
题型六 关于矩阵对称、反对称命题的证明	301
题型七 关于方阵 $A$ 可逆的证明	301
题型八 与 $A$ 的伴随阵 $A^*$ 有关联的命题的证明	302
题型九 关于矩阵秩的命题的证明	304
习题二	305

## **第三章 向量**

§ 3.1 基本概念	310
一、向量的概念与运算	310
二、向量间的线性关系	310
三、向量组的秩和矩阵的秩	311
四、向量空间	312
§ 3.2 重要定理与公式	314
§ 3.3 典型题型分析	315

题型一	讨论向量组的线性相关性	315
题型二	有关向量组线性相关性命题的证明	318
题型三	判定一个向量是否可由一组向量线性表示	324
题型四	有关向量组线性表示命题的证明	325
题型五	求向量组的极大线性无关组	327
题型六	有关向量组或矩阵秩的计算与证明	329
题型七	与向量空间有关的命题	333
习题三		335
<b>第四章 线性方程组</b>		<b>338</b>
§ 4.1 概念、性质、定理		338
一、克莱姆法则		338
二、线性方程组的基本概念		338
三、线性方程组解的判定		339
四、非齐次组 $Ax=b$ 与齐次组 $Ax=0$ 解的关系		340
五、线性方程组解的性质		340
六、线性方程组解的结构		340
§ 4.2 典型题型分析		341
题型一 基本概念题(解的判定、性质、结构)		341
题型二 含有参数的线性方程组解的讨论		344
题型三 讨论两个方程组的公共解		349
题型四 有关基础解系的证明		351
题型五 综合题		352
习题四		357
<b>第五章 特征值和特征向量</b>		<b>361</b>
§ 5.1 概念及其性质		361
一、矩阵的特征值和特征向量的概念		361
二、特征值与特征向量的计算方法		361
三、相似矩阵及其性质		362
四、矩阵可相似对角化的充要条件		362
五、对称矩阵及其性质		362
§ 5.2 重要公式与结论		363
§ 5.3 典型题型分析		364
题型一 求数值矩阵的特征值与特征向量		364
题型二 求抽象矩阵的特征值、特征向量		365
题型三 特征值、特征向量的逆问题		366

题型四	相似的判定及其逆问题	368
题型五	判断 $A$ 是否可对角化	370
题型六	综合应用问题	372
题型七	有关特征值、特征向量的证明题	377
习题五		379

<b>第六章 二次型</b>		<b>382</b>
§ 6.1 基本概念与定理		382
一、二次型及其矩阵表示		382
二、化二次型为标准型		382
三、用正交变换法化二次型为标准形		383
四、二次型和矩阵的正定性及其判别法		383
§ 6.2 典型题型分析		386
题型一 考查二次型所对应的矩阵及其性质		386
题型二 化二次型为标准形		387
题型三 已知二次型通过正交变换化为标准形,反求参数		390
题型四 有关二次型及其矩阵正定性的判定与证明		392
习题六		395

<b>篇要 概率统计的九种思维定式</b>		<b>397</b>
-----------------------	--	------------

### 第三篇 概率论与数理统计

<b>第一章 随机事件和概率</b>		<b>402</b>
§ 1.1 基本概念、性质与公式		402
一、随机试验和随机事件		402
二、事件的关系及其运算		402
三、事件的概率及其性质		404
四、条件概率与事件的独立性		405
五、重要概型		407
六、重要公式		407
§ 1.2 典型题型分析		408
题型一 古典概型与几何概型		408
题型二 事件的关系和概率性质的命题		411
题型三 条件概率与积事件概率的计算		413
题型四 全概率公式与 Bayes 公式的命题		414
题型五 有关 Bernoulli 概型的命题		417
习题一		419

<b>第二章 随机变量及其分布</b>		<b>422</b>
§ 2.1 基本概念、性质与公式		422
一、概念与公式一览表		422
二、重要的一维分布		425

三、重要的二维分布 .....	427
§ 2.2 典型题型分析 .....	428
题型一 一维随机变量及其分布的概念、 性质的命题 .....	428
题型二 求一维随机变量的分布律、概率 密度或分布函数 .....	431
题型三 求一维随机变量函数的分布 .....	435
题型四 二维随机变量及其分布的概念、 性质的考查 .....	438
题型五 求二维随机变量的各种分布与 随机变量独立性的讨论 .....	440
题型六 求两个或多个随机变量的简单 函数的分布 .....	447
习题二 .....	451
<b>第三章 随机变量的数字特征</b> .....	458
§ 3.1 基本概念、性质与公式 .....	458
一、一维随机变量的数字特征 .....	458
二、二维随机变量的数字特征 .....	460
三、几种重要的数学期望与方差 .....	461
四、重要公式与结论 .....	462
§ 3.2 典型题型分析 .....	462
题型一 求一维随机变量的数字特征 .....	462
题型二 求一维随机变量函数的数学 期望 .....	466
题型三 求二维随机变量及其函数的 数字特征 .....	469
题型四 有关数字特征的证明题 .....	479
题型五 应用题 .....	480
习题三 .....	482

<b>第四章 大数定律和中心极限定理</b> .....	486
§ 4.1 基本概念与定理 .....	486
一、切比雪夫不等式 .....	486
二、中心极限定理 .....	486
三、重要公式与结论 .....	487
四、注意 .....	487
§ 4.2 典型题型分析 .....	488
题型一 有关切比雪夫不等式与大数定 律的命题 .....	488
题型二 有关中心极限定理的命题 .....	489
习题四 .....	492
<b>第五章 数理统计的基本概念</b> .....	493
§ 5.1 基本概念、性质与公式 .....	493
一、几个基本概念 .....	493
二、三个抽样分布 —— $\chi^2$ 分布、 $t$ 分布与 $F$ 分布 .....	494
三、正态总体下常用统计量的性质 .....	494
四、重要公式与结论 .....	495
§ 5.2 典型题型分析 .....	496
题型一 求统计量的数字特征或取值的 概率、样本的容量 .....	496
题型二 求统计量的分布 .....	498
习题五 .....	499
<b>第六章 参数估计</b> .....	502
§ 6.1 基本概念、性质与公式 .....	502
矩估计与最大似然估计 .....	502
§ 6.2 典型题型分析 .....	503
求矩估计和最大似然估计 .....	503
习题六 .....	507

# 篇要 微积分解题的四种思维定式

以下四句话,在考研中能助同学们一臂之力.

第一句话:在题设条件中给出一个函数  $f(x)$  在某点处的导数值即  $f'(a) = k(a, k$  均为常数),“不管三七二十一”,根据所求(证)结论把  $f(x)$  在该点的导数定义式“凑”出来再说.

**【例 1】** 设  $f(x)$  可微,  $f(0) = 0, f'(0) = 1, F(x) = \int_0^x t f(x^2 - t^2) dt$ , 试求  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x)}{x^4}$ .

**【解】** 对定积分作变量代换  $x^2 - t^2 = u$ , 则

$$F(x) = \frac{1}{2} \int_0^{x^2} f(u) du, \quad \text{且} \quad F'(x) = x f(x^2).$$

于是由洛必达法则得

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x)}{x^4} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F'(x)}{4x^3} = \frac{1}{4} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x^2)}{x^2} \quad (\text{以下利用导数 } f'(0) \text{ 的定义}) \\ &= \frac{1}{4} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x^2) - f(0)}{x^2 - 0} = \frac{1}{4} f'(0) = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

**【例 2】** 设  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  定义, 且对定义域中任何  $x, y$  均满足方程  $f(xy) = f(x)f(y)$ , 且  $f'(1) = n(n > 0)$ , 求  $f(x)$ .

**【解】** 在方程中令  $x = y = 1$  得,  $f(1) = f(1) \cdot f(1)$ , 由此得  $f(1) = 0$  或  $f(1) = 1$ .

(1) 若  $f(1) = 0$ , 令  $y = 1$ , 由函数方程得  $f(x) = f(x) \cdot 0 = 0$ , 即  $f(x) \equiv 0$ , 但由  $f'(1) = n$  知不合题意.

(2) 若  $f(1) = 1$ , 令  $y = 1 + h$ , 由函数方程得  $f(x + hx) = f(x) \cdot f(1 + h)$ , 则(设  $h \neq 0$ )

$$\frac{f(x + hx) - f(x)}{hx} = \frac{f(x)}{x} \cdot \frac{f(1 + h) - f(1)}{h}.$$

令  $h \rightarrow 0$ , 对上式两边取极限, 并由  $f'(1) = n$ , 得

$$f'(x) = n \frac{f(x)}{x}.$$

这是可分离变量的微分方程, 解得  $f(x) = cx^n$ . 由条件  $f'(1) = n$  得  $c = 1$ , 即  $f(x) = x^n, x > 0$ .

第二句话:在题设条件或欲证结论中有定积分表达式时,则“不管三七二十一”先用积分中值定理对该积分式处理一下再说.

**【例 3】** 设  $f(x)$  在  $[0, 2]$  上连续, 在  $(0, 2)$  内二阶可导, 且  $f(0) = f(\frac{1}{2}), 2 \int_{\frac{1}{2}}^1 f(x) dx = f(2)$ .

证明:存在一个  $\xi \in (0, 2)$ , 使  $f''(\xi) = 0$ .

**【证明】**  $f(2) = 2 \int_{\frac{1}{2}}^1 f(x) dx \stackrel{\text{积分中值定理}}{=} 2(1 - \frac{1}{2})f(\eta) = f(\eta)$ ,  $\frac{1}{2} \leq \eta \leq 1$ .

于是  $f(x)$  在  $[\eta, 2]$  上满足罗尔定理, 即存在一个  $\xi_1 \in (\eta, 2)$ , 使

$$f'(\xi_1) = 0. \quad \textcircled{1}$$

又  $f(x)$  在  $[0, \frac{1}{2}]$  上满足罗尔定理, 于是存在一个  $\xi_2 \in (0, \frac{1}{2})$ , 使

$$f'(\xi_2) = 0. \quad \textcircled{2}$$

由 ①, ② 可知  $f'(\xi_1) = f'(\xi_2)$ . 再对  $f'(x)$  在  $[\xi_2, \xi_1]$  上使用罗尔定理, 于是  $\exists \xi \in (\xi_2, \xi_1) \subset (0, 2)$ , 使  $f''(\xi) = 0$ .

**【例 4】** 设  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上是非负、单调递减的连续函数, 且  $0 < a < b < 1$ . 证明:

$$\int_0^a f(x) dx \geq \frac{a}{b} \int_a^b f(x) dx.$$

**【证明】** 由积分中值定理及题设条件, 有

$$\int_0^a f(x) dx = af(\xi_1) \geq af(a), \quad \xi_1 \in [0, a],$$

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a)f(\xi_2) \leq (b-a)f(a), \quad \xi_2 \in [a, b].$$

于是 
$$\frac{1}{a} \int_0^a f(x) dx \geq f(a) \geq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \geq \frac{1}{b} \int_a^b f(x) dx.$$

故 
$$\int_0^a f(x) dx \geq \frac{a}{b} \int_a^b f(x) dx.$$

**【另证】**  $\int_0^a f(x) dx \geq \frac{a}{b} \int_a^b f(x) dx \Leftrightarrow b \int_0^a f(x) dx \geq a \int_a^b f(x) dx.$

令  $F(x) = b \int_0^x f(t) dt - x \int_x^b f(t) dt$ , 则

$$\begin{aligned} F'(x) &= bf(x) - \int_x^b f(t) dt + xf(x) = \int_x^b f(x) dt - \int_x^b f(t) dt + 2xf(x) \\ &= \int_x^b [f(x) - f(t)] dt + 2xf(x) \geq 0, \quad (\text{由于 } f(x) \geq f(t) \geq 0). \end{aligned}$$

所以  $F(x)$  单调递增. 又  $F(0) = 0$ , 故

$$F(a) \geq F(0) = 0, \text{ 即 } b \int_0^a f(x) dx - a \int_a^b f(x) dx \geq 0,$$

亦即 
$$\int_0^a f(x) dx \geq \frac{a}{b} \int_a^b f(x) dx.$$

第三句话: 在题设条件中函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 在  $(a, b)$  内可导, 且  $f(a) = 0$  或  $f(b) = 0$  或  $f(a) = f(b) = 0$ , 则“不管三七二十一”先用拉格朗日中值定理处理一下再说.

$$f(x) \stackrel{f(a)=0}{=} f(x) - f(a) = f'(\xi)(x-a), \quad a < \xi < x.$$

或 
$$f(x) \stackrel{f(b)=0}{=} f(x) - f(b) = f'(\xi)(x-b), \quad x < \xi < b.$$

若  $f(a) = f(b) = 0$ , 则  $\begin{cases} f(x) = f(x) - f(a) = f'(\xi_1)(x-a), & a < \xi_1 < x, \\ f(x) = f(x) - f(b) = f'(\xi_2)(x-b), & x < \xi_2 < b. \end{cases}$

**【例 5】** 设函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上有连续的导数, 且  $f(a) = f(b) = 0, M = \max_{x \in [a, b]} |f'(x)|$ , 试证:

$$\frac{4}{(b-a)^2} \int_a^b f(x) dx \leq M.$$

**【证明】**  $f(x) = \frac{f(a)=0}{x-a} f(x) - f(a) = (x-a)f'(\xi_1), a < \xi_1 < x$ , 则

$$|f(x)| = (x-a)|f'(\xi_1)| \leq (x-a)M.$$

同理  $|f(x)| \leq (b-x)M.$

于是 
$$\begin{aligned} \int_a^b |f(x)| dx &= \int_a^{\frac{a+b}{2}} |f(x)| dx + \int_{\frac{a+b}{2}}^b |f(x)| dx \\ &\leq \int_a^{\frac{a+b}{2}} (x-a)M dx + \int_{\frac{a+b}{2}}^b (b-x)M dx = \frac{(b-a)^2}{4} M. \end{aligned}$$

故 
$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b |f(x)| dx \leq \frac{(b-a)^2}{4} M.$$

即 
$$\frac{4}{(b-a)^2} \int_a^b f(x) dx \leq M.$$

**【例 6】** 已知在  $[0, a]$  上  $|f''(x)| \leq M$ , 且  $f(x)$  在  $(0, a)$  内取最大值, 试证:

$$|f'(0)| + |f'(a)| \leq Ma.$$

**【证明】** 设  $f(c) = \max_{x \in (0, a)} \{f(x)\}$ , 则  $f'(c) = 0$ . (费尔马定理)

对  $f'(x)$  在  $[0, c]$  与  $[c, a]$  内分别用拉格朗日中值定理, 有

$$f'(c) - f'(0) = f''(\xi_1)c, \quad 0 < \xi_1 < c,$$

$$f'(a) - f'(c) = f''(\xi_2)(a-c), \quad c < \xi_2 < a.$$

于是  $|f'(0)| = |f''(\xi_1)c| \leq Mc,$

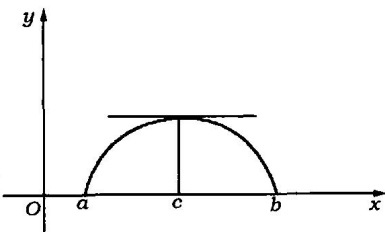
$$|f'(a)| = |f''(\xi_2)(a-c)| \leq M(a-c).$$

故  $|f'(0)| + |f'(a)| \leq Mc + M(a-c) = Ma.$

**【例 7】** 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上有连续的  $f''(x)$ , 且  $f''(x) < 0, f(a) = f(b) = 0$ , 则在  $(a, b)$  上  $f(x) > 0$ , 且

$$\int_a^b \left| \frac{f''(x)}{f(x)} \right| dx > \frac{4}{b-a}.$$

**【证明】** 由  $f''(x) < 0$  可知,  $f(x)$  在  $[a, b]$  上是凸函数(图形上凸); 于是,  $f(x)$  大于连接  $(a, f(a)), (b, f(b))$  线段上点的纵坐标. 而此线段所在直线即为  $y=0$  ( $x$  轴), 所以在  $(a, b)$  上  $f(x) > 0$ . 再由  $f''(x) < 0$  知,  $f'(x)$  是严格单调减少的, 从而知  $f(x)$  在  $(a, b)$  内有惟一的极大值点, 记为  $x=c$ . 此时  $f'(c) = 0$ , 如右图所示, 而在  $(a, c)$



上,  $f'(x) > 0$ , 在  $(c, b)$  上  $f'(x) < 0$ . 由拉格朗日中值定理, 当  $x \in [a, c]$  时,

$$f(x) = f'(\xi_1)(x-a) + f(a), \quad \xi_1 \in (a, x).$$

由  $f'(x)$  严格递减,  $f'(\xi_1) < f'_+(a)$ , 注意到  $f(a) = 0$ , 有

$$f(x) < f'_+(a)(c-a), \quad x \in [a, c].$$

当  $x \in [c, b]$  时, 同理可得

$$f(x) < [-f'_-(b)](b-c), x \in [c, b].$$

$$\text{于是} \quad \frac{1}{f(x)} > \frac{1}{(c-a)f'_+(a)}, x \in [a, c],$$

$$\frac{1}{f(x)} > \frac{1}{(b-c)[-f'_-(b)]}, x \in [c, b].$$

$$\begin{aligned} \text{则} \quad & \int_a^b \left| \frac{f''(x)}{f(x)} \right| dx = - \int_a^b \frac{f''(x)}{f(x)} dx = \int_a^c \frac{-f''(x)}{f(x)} dx + \int_c^b \frac{-f''(x)}{f(x)} dx \\ & > \int_a^c \frac{-f''(x)}{(c-a)f'_+(a)} dx + \int_c^b \frac{-f''(x)}{(b-c)[-f'_-(b)]} dx \\ & = \frac{1}{(c-a)f'_+(a)} [f'_+(a) - f'(c)] + \frac{1}{(b-c)[-f'_-(b)]} [f'(c) - f'_-(b)] \\ & = \frac{1}{c-a} + \frac{1}{b-c} = \frac{b-a}{(c-a)(b-c)} \geq (b-a) \frac{1}{\left(\frac{b-a}{2}\right)^2} = \frac{4}{b-a}. \end{aligned}$$

第四句话:对定限或变限积分,若被积函数或其部分为复合函数,则“不管三七二十一”先做变量替换使之成为简单形式  $f(u)$  再说.

**【例 8】**求下列函数的导数(设  $f(u)$  是  $u$  的连续函数):

$$(1) F(y) = \int_0^y f(x-y) dx, \text{求 } F'(y); \quad (2) F(x) = \int_0^{x^2} t f(x-t) dt, \text{求 } F'(x);$$

$$(3) F(x) = \int_0^1 f(te^x) dt, \text{求 } F'(x); \quad (4) F(x) = \int_0^{x^2} x f(x+t) dt, \text{求 } F'(x).$$

$$\text{【解】} (1) F(y) \xrightarrow{\text{令 } u=x-y} \int_{-y}^0 f(u) du, \text{则 } F'(y) = -f(-y) \cdot (-1) = f(-y).$$

$$\begin{aligned} (2) F(x) & \xrightarrow{\text{令 } u=x-t} \int_x^{x-x^2} (x-u) f(u) (-du) \\ & = -x \int_x^{x-x^2} f(u) du + \int_x^{x-x^2} u f(u) du, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{则} \quad F'(x) & = - \int_x^{x-x^2} f(u) du - x[f(x-x^2) \cdot (1-2x) - f(x)] \\ & \quad + (1-2x)(x-x^2)f(x-x^2) - xf(x) \\ & = \int_{x-x^2}^x f(u) du + x^2(2x-1)f(x-x^2). \end{aligned}$$

$$(3) F(x) \xrightarrow{\text{令 } u=te^x} \int_0^{e^x} f(u) \frac{1}{e^x} du = \frac{1}{e^x} \int_0^{e^x} f(u) du = e^{-x} \int_0^{e^x} f(u) du,$$

$$\text{则} \quad F'(x) = -e^{-x} \int_0^{e^x} f(u) du + e^{-x} f(e^x) \cdot e^x = f(e^x) - e^{-x} \int_0^{e^x} f(u) du.$$

$$(4) \int_0^{x^2} f(x+t) dt \xrightarrow{\text{令 } u=x+t} \int_x^{x+x^2} f(u) du, \text{于是有 } F(x) = x \int_x^{x+x^2} f(u) du, \text{则}$$

$$F'(x) = \int_x^{x+x^2} f(u) du + x[f(x+x^2) \cdot (1+2x) - f(x)].$$

【例 9】\* 设  $f(x)$  可微, 且满足  $x = \int_0^x f(t) dt + \int_0^x t f(t-x) dt$ , 求  $f(x)$ .

【解】  $\int_0^x t f(t-x) dt \xrightarrow{\text{令 } u = t-x} \int_{-x}^0 (u+x) f(u) du = - \int_0^{-x} u f(u) du + x \int_{-x}^0 f(u) du.$

于是原方程变为  $x = \int_0^x f(t) dt - \int_0^{-x} u f(u) du - x \int_0^{-x} f(u) du.$

两边对  $x$  求导, 得  $1 = f(x) - (-x) f(-x) (-1) - \int_0^{-x} f(u) du - x f(-x) (-1).$

整理, 得  $1 = f(x) - \int_0^{-x} f(u) du,$

两边再对  $x$  求导, 得  $0 = f'(x) - f(-x) (-1),$

即  $f'(x) = -f(-x),$

上式两边对  $x$  求导, 得  $f''(x) = f'(-x),$

由 ①, ② 得  $f''(x) = -f(x),$

即  $f''(x) + f(x) = 0,$

解此方程得  $f(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$

注意到  $f(0) = 1, f'(0) = -1$ , 故  $f(x) = \cos x - \sin x.$



# 第一篇 微积分

## 第一章 函数·极限·连续

### § 1.1 函 数

#### 一、函数的定义

设有两个变量  $x$  和  $y$ , 变量  $x$  的变域为  $D$ , 如果对于  $D$  中的每一个  $x$  值, 按照一定的法则, 变量  $y$  有一个确定的值与之对应, 则称变量  $y$  为变量  $x$  的函数, 记作

$$y = f(x)$$

$x$ ——自变量,  $y$ ——因变量, 变域  $D$  为定义域, 记为  $D_f$ , 变量  $y$  的取值的集合称为函数的值域, 记作  $Z_f$ .

函数概念的两要素:

(1) 定义域  $\triangleq$  自变量  $x$  的变化范围(若函数是解析式表示的, 则使运算有意义的实自变量值的集合即为定义域).

(2) 对应关系  $\triangleq$  给定  $x$  值, 求  $y$  值的方法.

**【点拨】** 当且仅当给定的两个函数, 其定义域和对应关系完全相同时, 才表示同一函数, 否则表示不同的函数.

**【例 1.1】** 与连续函数  $f(x) = \ln x + \int_1^e f(x) dx - f'(1)$  等价的函数是

(A)  $e^{\ln(\ln x)}$ .

(B)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{x-1}{n+(x-1)k} (x > 0)$ .

(C)  $\frac{1}{x}$  的经过点  $(-1, 0)$  的原函数.

(D) 方程  $xyy' = \ln x$  满足  $y(1) = 0$  的特解. 【   】

**【解】** 设  $A = \int_1^e f(x) dx$ ,  $B = f'(1)$ , 所以,  $f(x) = \ln x + A - B$ , 有

$$A = \int_1^e f(x) dx = \int_1^e (\ln x + A - B) dx = 1 + (A - B)(e - 1),$$

$$B = f'(1) = (\ln x + A - B)' |_{x=1} = 1, \text{ 得 } A = 1, \text{ 所以, } f(x) = \ln x.$$

对于(A),  $e^{\ln(\ln x)} = \ln x (x > 1)$ , 与  $f(x)$  的定义域不同.

$$\begin{aligned} \text{(B)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{x-1}{n+(x-1)k} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{x-1}{n} \cdot \frac{1}{1 + \frac{x-1}{n} \cdot k} = \int_1^x \frac{1}{t} dt \\ &= \ln x (x > 0), \quad \text{与 } f(x) \text{ 等价.} \end{aligned}$$