普通高等教育“十一五”国家级规划教材

线性代数

第二版

南京理工大学应用数学系 编

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

普通高等教育“十一五”国家级规划教材

线性代数

Xianxing Daishu

第二版

南京理工大学应用数学系 编

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS BEIJING

内容提要

本书是根据教育部高等学校数学基础课程教学指导分委员会制定的线性代数课程教学基本要求和全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲的有关线性代数部分规定的内容编写而成。

内容包括:行列式、矩阵、n 维向量空间、线性方程组、矩阵的特征值与对角化、实二次型、线性空间与线性变换等。

本书可作为高等学校工科本科生线性代数课程(32—48 学时)的教材或教学参考书。

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/南京理工大学应用数学系编.—2 版.—北京:高等教育出版社,2010.7

ISBN 978-7-04-029599-3

Ⅰ.①线… Ⅱ.①南… Ⅲ.①线性代数-高等学校-教材 Ⅳ.①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 101960 号

策划编辑	杨 帆	责任编辑	李 茜	封面设计	张申申
责任绘图	黄建英	版式设计	马敬茹	责任校对	王效珍
责任印制	毛斯璐				

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社 址	北京市西城区德外大街 4 号	咨询电话	400-810-0598
邮政编码	100120	网 址	http://www.hep.edu.cn
			http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经 销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印 刷	北京宏伟双华印刷有限公司	畅想教育	http://www.widedu.com
		版 次	2001 年 1 月第 1 版
开 本	787×960 1/16		2010 年 7 月第 2 版
印 张	9.5	印 次	2010 年 7 月第 1 次印刷
字 数	160 000	定 价	13.70元

物料号 29599-00

前　言

线性代数是高等学校的一门公共基础课。它主要研究有限维空间的线性理论。随着计算机技术的普遍应用和高科技的迅猛发展,这一理论日益渗透到各学科领域。作为各学科领域研究的基础,线性代数课程更需要加强和提高。本书是根据教育部高等学校数学基础课程教学指导分委员会制定的线性代数课程教学基本要求和全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲的有关线性代数部分规定的内容编写而成。

本书共七章,可大致分为三个部分:

第一部分,即前三章内容,主要介绍线性代数的基本理论。具体内容包括行列式、矩阵、n 维向量空间。

第二部分,即第四章至第六章内容,主要是利用线性代数的基本理论解决线性代数中的一些基本问题。如线性方程组解的结构,方阵的对角化以及二次型的标准化等问题。具体内容包括线性方程组、矩阵的特征值与对角化、实二次型。

第三部分,即为最后一章内容,主要介绍线性空间与线性变换的概念与性质。事实上,线性空间是线性代数的线性理论部分的一个抽象,而线性变换是矩阵的另一种表现形式。同时,也是对矩阵的这样一个抽象数据表的几何解释,使我们对矩阵这个工具有一个更深层次的认识。我们认为应该让读者了解这两个基本概念,这也是研究生入学考试要求的内容。

本书可作为高等学校工科本科生线性代数课程(32—48 学时)的教材或教学参考书。

本书编写分工为:第一、七章由吕新民编写;第二章由郁易生编写;第三、四章由窦本年编写;第五、六章由陈培鑫编写。赵培标教授仔细审阅了全书,并提出了许多重要意见和建议。

限于编者水平,书中不当之处,欢迎广大读者批评指正。

编　者

2009 年 12 月于南京

目　　录

第一章 行 列 式

行列式是线性代数的一种基本运算，它产生于解线性方程组的过程之中.行列式运算不但在数学中有广泛的应用，而且在其他学科中也经常会遇到.本章先从二阶与三阶行列式入手，运用递归的方法引入一般 n 阶行列式的定义并研究其性质，借助于性质进行行列式的计算.

本书中所指的数，除特别说明外，一般均指实数.

第一节 行列式的定义

一、二阶与三阶行列式

设 $a_{11},a_{12},a_{21},a_{22}$ 为 4 个数，记号 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ 称为二阶行列式.它的值定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21},$$

其中 a_{11},a_{12} 称为行列式的第 1 行元素；a_{21},a_{22} 称为行列式的第 2 行元素；a_{11},a_{21} 称为行列式的第 1 列元素；a_{12},a_{22} 称为行列式的第 2 列元素；一般地，a_{ij} 称为行列式的第 i 行第 j 列元素.

利用二阶行列式的运算，如下二元一次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x+a_{12}y=b_1, \\ a_{21}x+a_{22}y=b_2 \end{cases}$$

在满足条件 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 下，若记

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \quad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix},$$

经过简单的消元可得方程组的唯一解为

$$\begin{cases} x = \dfrac{D_1}{D}, \\ y = \dfrac{D_2}{D}. \end{cases}$$

利用二阶行列式,可以建立三阶行列式的运算.

设 $a_{ij}(i,j=1,2,3)$ 是 9 个数,记号 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ 称为三阶行列式,它的值定义为

$$\begin{aligned} &\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}(-1)^{1+1}D_{11} + a_{12}(-1)^{1+2}D_{12} + a_{13}(-1)^{1+3}D_{13} \\ &= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}, \end{aligned}$$

其中 a_{ij}的第一个下标 i 表示元素 a_{ij}所在的行数,第二个下标 j 表示 a_{ij}所在的列数;D_{ij}是划去 a_{ij}所在的行与列的元素后,剩下的元素按原来的相对位置所构成的二阶行列式,称为 a_{ij}的余子式;称 $A_{ij}=(-1)^{i+j}D_{ij}$为 a_{ij}的代数余子式.从而一个三阶行列式的值就等于它的第 1 行元素与其对应的代数余子式乘积的和.

同样地,利用三阶行列式的运算,如下三元一次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z=b_1, \\ a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z=b_2, \\ a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z=b_3 \end{cases}$$

在满足条件 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$ 下,若记

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix},$$

经过简单的消元可得方程组的唯一解为

$$\begin{cases} x=\dfrac{D_1}{D}, \\ y=\dfrac{D_2}{D}, \\ z=\dfrac{D_3}{D}. \end{cases}$$

二、n 阶行列式的定义

由三阶行列式的定义知,一个三阶行列式的值可以表为它的第 1 行元素与其对应的代数余子式乘积的和.以下用递归法定义一般的 n 阶行列式.

定义 1.1.1　设 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 为 n^2 个数,符号

$$D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 n 阶行列式,它的值用递归法定义如下:

(1) 若 $n=1$,则一阶行列式 $D_1=|a_{11}|=a_{11}$;

(2) 设 $n-1$ 阶行列式 D_{n-1} 的值已定义,则 n 阶行列式 D_n 定义为

$$D_n=\sum_{j=1}^{n} a_{1j}(-1)^{1+j}D_{1j},$$

其中 D_{1j} 是划去 D_n 中的第 1 行与第 j 列元素后,剩下 $(n-1)^2$ 个元素按原来相对位置构成的 $n-1$ 阶行列式,称为 a_{1j} 的余子式.

一般地,我们有

定义 1.1.2　在 n 阶行列式 D_n 中,划去 a_{ij} 所在的第 i 行与第 j 列元素后,剩下 $(n-1)^2$ 个元素按原来相对位置构成的 $n-1$ 阶行列式 D_{ij} 称为 a_{ij} 的余子式,而称 $A_{ij}=(-1)^{i+j}D_{ij}$ 为 a_{ij} 的代数余子式.

由定义 1.1.2,n 阶行列式 D_n 又可表为

$$D_n=\sum_{j=1}^{n} a_{1j}A_{1j},$$

即一个 n 阶行列式可以表为它的第 1 行元素与其对应的代数余子式乘积的和.由行列式的定义知,一个 n 阶行列式的值是 $n!$ 项的代数和,其中每一项是取自行列式不同行与不同列的 n 个元素的乘积.

例 1.1.1　计算对角行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

的值.

解 由定义

$$D_n=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\cdots=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

例 1.1.2 计算下三角形行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

的值.

解 由定义

$$D_n=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\cdots=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

第二节 行列式的性质

行列式的性质是计算行列式的重要依据,行列式的计算方法之一就是借助于行列式的性质,将行列式化为三角形行列式.

对于二阶及三阶行列式而言,下列性质 1.2.1 与性质 1.2.2 是容易得到的,借助于数学归纳法,有下列更一般的结果.

性质 1.2.1 行列互换,行列式不变.

把一个行列式 D_n 的行列互换后得到的行列式称为 D_n 的转置行列式.性质 1.2.1 表明,一个行列式与其转置行列式是相等的.同时,性质 1.2.1 还表明在行列式中,行与列的地位是平等的,因此对行成立的性质,对列也是成立的.以下我们仅对行进行讨论,相应的结果对列自然也成立.由性质 1.2.1 及例 1.1.2 知

$$D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

性质 1.2.2　对换行列式某两行,行列式反号.

推论 1.2.1　若行列式某两行对应元素相同,则行列式为零.

性质 1.2.3(行列式展开式定理)　行列式等于它的任一行的元素与其对应的代数余子式乘积的和,即

$$D_n=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}A_{ij}\quad(i=1,2,\cdots,n).$$

证　将 D_n 的第 i 行逐行与上一行对调,共 $i-1$ 次. 于是第 i 行便调到第 1 行,记此行列式为 $\overline{D}_n$,则

$$\overline{D}_n=\begin{vmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & a_{i-2,2} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

由性质 1.2.2,$D_n=(-1)^{i-1}\overline{D}_n$,再将 $\overline{D}_n$ 按第 1 行展开就有

$$\overline{D}_n=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(-1)^{1+j}\overline{D}_{1j},$$

其中 $\overline{D}_{1j}$是 a_{ij}在 $\overline{D}_n$ 中的余子式. 因为划去 $\overline{D}_n$ 的第 1 行第 j 列后剩下元素构成的 $n-1$ 阶余子式与划去 D_n 的第 i 行第 j 列后剩下元素构成的 $n-1$ 阶余子式完全相同,从而 $\overline{D}_{1j}=D_{ij}$,故有

$$D_n=(-1)^{i-1}\overline{D}_n=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(-1)^{i+j}\overline{D_{1j}}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}A_{ij}.$$

推论 1.2.2　行列式某一行元素与另一行对应元素的代数余子式乘积的和为零,即

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}A_{kj}=0\quad(i\neq k).$$

证　不妨设 $i>k$,作辅助行列式

$$C_n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

它是将 D_n 的第 k 行换成 D_n 的第 i 行而得到的行列式,因 C_n 中有两行相同,由推论 1.2.1 知 $C_n=0$. 又由性质 1.2.3,将 C_n 按第 k 行展开,因 C_n 的第 k 行元素的代数余子式与 D_n 的第 k 行元素的代数余子式相同,故有

$$0=C_n=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{kj}=0 \quad (i\neq k).$$

把性质 1.2.3 与推论 1.2.2 结合在一起,有

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{kj}=\begin{cases} D_n, & i=k, \\ 0, & i\neq k. \end{cases}$$

性质 1.2.4 行列式某一行元素的公因子可以提到行列式外,即

$$D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{i1} & \lambda a_{i2} & \cdots & \lambda a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\lambda\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\lambda T_n.$$

证 将 D_n 按第 i 行展开,因 D_n 与 T_n 的第 i 行元素有相同的代数余子式,故

$$D_n=\sum_{j=1}^{n} \lambda a_{ij}A_{ij}=\lambda\sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij}=\lambda T_n.$$

推论 1.2.3 若行列式某一行元素全为零,则行列式为零.

推论 1.2.4 若行列式某两行对应元素成比例,则行列式为零.

性质 1.2.5 若行列式的某一行的元素均为两项之和,则行列式可按此行拆成两个行列式的和,即

$$D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1}+c_{i1} & b_{i2}+c_{i2} & \cdots & b_{in}+c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=B_n+C_n.$$

证　将 D_n 按第 i 行展开,因 D_n 与 B_n 及 C_n 的第 i 行元素有相同的代数余子式,故

$$D_n=\sum_{j=1}^{n}(b_{ij}+c_{ij})A_{ij}=\sum_{j=1}^{n}b_{ij}A_{ij}+\sum_{j=1}^{n}c_{ij}A_{ij}=B_n+C_n.$$

由性质 1.2.5,性质 1.2.4 及推论 1.2.4 易知

性质 1.2.6　行列式的某一行的倍数加到另一行,行列式的值不变.

第三节　行列式的计算

行列式计算的基本方法,一是借助于行列式的性质将一个行列式化成一个三角形行列式,即三角化法;二是借助于行列式展开式定理不断降阶,即降阶法.这两种方法不是孤立的,有机地结合在一起使用可以起到更好的效果.

例 1.3.1　计算 $D_4=\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & -4 & 1 \\ 2 & 4 & -6 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \end{vmatrix}$.

解　直接利用行列式的性质,将行列式三角化,即

$$D_4=\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & 3 \\ 0 & 2 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & -5 & 3 \end{vmatrix}$$

$$=-\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -14 & -3 \\ 0 & 0 & -5 & 3 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -14 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{57}{14} \end{vmatrix}$$

$$=-1\times1\times(-14)\times\frac{57}{14}=57.$$

例 1.3.2 计算 $D_n=\begin{vmatrix} b & a & \cdots & a \\ a & b & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & b \end{vmatrix}$.

解 从第 2 列起各列均加到第 1 列，将第 1 列公有的因子 $b+(n-1)a$ 提出，再将行列式三角化，即

$$D_n=\begin{vmatrix} b+(n-1)a & a & \cdots & a \\ b+(n-1)a & b & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b+(n-1)a & a & \cdots & b \end{vmatrix}=[b+(n-1)a]\begin{vmatrix} 1 & a & \cdots & a \\ 1 & b & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a & \cdots & b \end{vmatrix}$$

$$=[b+(n-1)a]\begin{vmatrix} 1 & a & \cdots & a \\ 0 & b-a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b-a \end{vmatrix}=[b+(n-1)a](b-a)^{n-1}.$$

例 1.3.3 计算 $D_n=\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}$，这里每个 $a_i\neq 0$.

解 分析行列式的特点，除主对角线（左上角到右下角的对角线）上元素外，其余元素均相同，由性质 1.2.3 得

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}.$$

将第 1 行的 -1 倍加到第 2 行至第 n 行，得

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}.$$

因 $a_i\neq 0$，再将第 i 列的 $\frac{1}{a_i}$ 倍加到第 1 列，进一步可得

$$D_n=\begin{vmatrix} 1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i} & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}=\left(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right)a_1a_2\cdots a_n.$$

例 1.3.4　若 n 是一个奇数，证明 $D_n=\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & \cdots & 0 \end{vmatrix}=0.$

证　先将 D_n 的各行提出公因子-1，可得

$$D_n=(-1)^n\begin{vmatrix} 0 & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ a_{12} & 0 & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & 0 \end{vmatrix}=(-1)^nT_n.$$

因 T_n 是 D_n 的转置行列式，由性质 1.2.1 知 $T_n=D_n$. 因 n 是一个奇数，从而 $D_n=(-1)^nD_n=-D_n$，故 $D_n=0$.

例 1.3.5　证明：范德蒙德行列式

$$V_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}=\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(a_i-a_j).$$

证　对 n 作数学归纳法即可. 当 $n=2$ 时，

$$V_2=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix}=a_2-a_1,$$

结论成立. 假设对 $n-1$ 阶范德蒙德行列式结论成立. 考查 n 阶的情形. 从第 n 行起，每行减去前一行的 a_1 倍，有

$$V_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a_2-a_1 & \cdots & a_n-a_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_2^{n-2}(a_2-a_1) & \cdots & a_n^{n-2}(a_n-a_1) \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_2-a_1 & a_3-a_1 & \cdots & a_n-a_1 \\ a_2(a_2-a_1) & a_3(a_3-a_1) & \cdots & a_n(a_n-a_1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_2^{n-2}(a_2-a_1) & a_3^{n-2}(a_3-a_1) & \cdots & a_n^{n-2}(a_n-a_1) \end{vmatrix}$$

$$=(a_2-a_1)(a_3-a_1)\cdots(a_n-a_1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_2^{n-2} & a_3^{n-2} & \cdots & a_n^{n-2} \end{vmatrix}.$$

由归纳假定，

$$V_n=(a_2-a_1)(a_3-a_1)\cdots(a_n-a_1)\prod_{2\leqslant j<i\leqslant n}(a_i-a_j)=\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(a_i-a_j).$$

例 1.3.6　证明：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{11} & \cdots & c_{1k} & b_{11} & \cdots & b_{1r} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{r1} & \cdots & c_{rk} & b_{r1} & \cdots & b_{rr} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{r1} & \cdots & b_{rr} \end{vmatrix}.$$

证　对 k 作数学归纳法，结合行列式展开式定理可以得到. 具体过程略.

第四节　克拉默法则

利用行列式，下面考查一类特殊的线性方程组的求解问题. 更一般意义上的方程组的求解问题将在后面的章节讨论.

定理 1.4.1（克拉默法则）　如果线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \qquad\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases}$$

的系数行列式