21世纪普通高等教育规划教材

微积分

（经济类）

上册

朱　捷　张丽娟　杜广环　等编

化学工业出版社

21世纪普通高等教育规划教材

微积分（经济类）

上 册

朱 捷 张丽娟 杜广环 等编

化学工业出版社

·北京·

本书根据高等院校经济管理类本科微积分课程的教学大纲编写而成，注重从实际应用中引入基本概念、基本理论，突出微积分的基本思想和方法的介绍．本书精选了大量具有实际背景的例题和习题，以培养和提高学生的数学素质、创新意识以及运用数学工具解决实际问题的能力．本书分上、下两册，共11章．其中上册6章，内容包括：函数、极限与连续、导数与微分、中值定理与导数的应用、不定积分、定积分；下册5章，内容包括：多元函数的微积分、级数、微分方程、差分方程、数学实验．书后附有习题参考答案与提示．

本书可作为普通高等院校经管类专业的微积分课程教材，也可以供相关科技人员参考．

图书在版编目（CIP）数据

微积分（经济类）上册/朱捷，张丽娟，杜广环等编．北京：化学工业出版社，2010.7
21世纪普通高等教育规划教材
ISBN 978-7-122-08847-5

Ⅰ.微… Ⅱ.①朱…②张…③杜… Ⅲ.微积分-高等学校-教材 Ⅳ.O172

中国版本图书馆CIP数据核字（2010）第111565号

责任编辑：唐旭华 袁俊红　　装帧设计：关 飞
责任校对：吴 静

出版发行：化学工业出版社（北京市东城区青年湖南街13号 邮政编码100011）
印 装：化学工业出版社印刷厂
720mm×1000mm 1/16 印张11¾ 字数221千字 2010年8月北京第1版第1次印刷

购书咨询：010-64518888(传真：010-64519686) 售后服务：010-64518899
网 址：http://www.cip.com.cn
凡购买本书，如有缺损质量问题，本社销售中心负责调换。

定 价：23.00元

前　言

数学是开启科学大门的钥匙，是一切科学的基础．任何一门科学，只有与数学紧密结合，并且通过数学方法来表达和处理后，才能成为一门精密的科学．在过去的一个世纪中，数学理论与应用得到了极大的发展，使得数学所研究的两个重要内容，即“数量关系”和“空间形式”具有了更丰富的内涵和更广泛的外延．数学作为一门工具，几乎在所有的学科中大展身手，产生了前所未有的推动力．

经管类微积分与通常的高等数学课程相比有其特殊性，需要正确认识经济与数学的关系．将数学用于经济学，揭示仅靠定性分析难以阐明的现代经济错综复杂的相互关系及其变动趋势，并把握经济决策的方向．将数学用于经济学，并不是用数学取代经济学，而是利用数学分析为经济分析服务．本书很好地把握了经管类微积分课程的定位和发展，既保持本课程教学体系的合理性和教学内容的系统性，又体现经济概念的严谨性，体现了“数学为体，经济为用”的经济数学特点．

本书根据高等院校经济管理类本科微积分课程的教学大纲编写而成，遵循循序渐进的原则，深入浅出．从典型的自然科学与经济分析中的实际例子出发，从直观的几何现象出发，引出微积分的基本概念，如极限、导数及积分．再从理论上进行论证，得到一些有用的方法和结果，然后再利用它们解决更多的自然科学和经济分析中的实际问题．这样从特殊到一般，再从一般到特殊，从具体到抽象，再从抽象到具体，将微积分和经济分析的有关内容有机地结合起来，为学生将来利用数学分析的方法讨论更深入的经济问题打下良好的基础．

作为一门数学基础课，本书不仅保持了数学学科的科学性和系统性，也较好地体现了“实用、有效”的原则．在教材体系设计及知识介绍方法上我们进行了必要的尝试，淡化了运算上的一些技巧，降低了一元函数的极限与连续的理论要求，从简处理了一些公式的推导和一些定理的证明．在保证教学要求的同时，让教师容易组织教学，学生容易理解接受，并突出数学思想的介绍、数学方法的应用．本书扩大了经济应用实例的范围，让学生更多地了解应用数学知识、数学方法解决经济管理类问题的实例，增加他们的应用意识和能力．根据编者多年来在经管类微积分教学方面积累的经验，编写中充分考虑了公共数学基础课程的系统性，注意到了时代的特点，同时也注意到与后续课程的衔接，本着加强基础、强化应用、整体优化、注意后效的原则，力争做到科学性、系统性和可行性的

统一.

本书可作为普通高等院校经济管理类各专业的“微积分”课程教材，也可以供相关科技人员参考.

本书分上下两册. 上册内容为一元函数的微积分，下册内容包括多元函数的微积分、无穷级数、微分方程、差分方程和数学实验. 书中带“*”的部分较难，可选学. 上册由朱捷、张丽娟、杜广环、王佳秋、陈孝国、刘彦慧、徐秀艳、孙秀娟、孙璐、黄沙日娜等人参与编写，全书由朱捷统稿.

在本书的编写过程中，宋作忠教授、母丽华教授和徐静副教授都提出了许多宝贵建议，在此表示感谢.

由于水平有限，书中的不妥之处恳请广大读者批评指正，以期不断完善.

编者
2010 年 6 月

目　　录

第 1 章　函　　数

函数是微积分的重要基本概念之一，是微积分的研究对象. 本章将在概括总结函数有关概念的基础上，着重介绍函数的复合运算、初等函数等概念，以及实际应用中函数的建立方法.

1.1　集　　合

1.1.1　集合

(1) 集合的概念

一般地，具有某种特定性质的事物的总体称为**集合**. 组成集合的每一个对象称为集合的**元素**. 通常用大写字母 $A,B,C,\cdots$表示集合，用小写字母 $a,b,c,\cdots$表示集合的元素.

下面举几个集合的例子.

例 1.1.1　2010 年元月 1 日在中国出生的人.

例 1.1.2　全体奇数构成一个集合.

例 1.1.3　方程 $x^2+x-2=0$ 的根构成一个集合.

例 1.1.4　双曲线 $y=\dfrac{1}{x}$上的所有点.

若 x 是集合 A 的元素，则说 x 属于 A，记为 $x\in A$；若 x 不是集合 A 的元素，则说 x 不属于 A，记为 $x\notin A$.

含有有限个元素的集合称为有限集；含有无限个元素的集合称为无限集；不含任何元素的集合称为空集，记作$\varnothing$.

集合一般有两种表示方法.

一是列举法，在{　}中按任意顺序、不遗漏、不重复地列出集合的所有元素. 如集合 A 由元素 $a_1,a_2,\cdots,a_n$组成，可表示为 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$. 这种表示法一般适用于有限集和可数无限集.

二是描述法，若 A 是具有某种特征 P 的元素 x 全体所构成的集合，一般形式为

$$A=\{x\mid x\text{ 具有特征 }P\}.$$

例如，一元二次方程 $x^2+x-2=0$ 的解集，记为

$$A=\{x\mid x^2+x-2=0\}.$$

又如，全体奇数构成一个集合，记为

$$A=\{x\mid x=2n+1,n\text{ 为正整数}\}.$$

（2）集合与集合间的关系

设 A,B 是两个集合，若集合 A 的每一个元素都是集合 B 的元素，则称 A 是 B 的**子集**，简称为**子集**，记作 $A\subset B$(读作 A 包含于 B）或者 $B\supset A$(读作 B 包含 A). 如果 $A\subset B$ 且 $B\subset A$，则称 A 与 B **相等**，记为 $A=B$. 我们规定，空集 $\varnothing$ 是任何集合 A 的子集，即 $\varnothing\subset A$.

如果集合的元素都是数，则称之为**数集**. 常见的数集有

N——自然数集；**Z**——整数集；**Q**——有理数集；**R**——实数集.

显然有 $\mathbf{N}\subset\mathbf{Z}\subset\mathbf{Q}\subset\mathbf{R}$.

（3）集合的运算

集合的基本运算有三种：交、并、差.

设 A,B 是两个集合，则集合

$$A\cup B=\{x\mid x\in A\text{ 或 }x\in B\};$$
$$A\cap B=\{x\mid x\in A\text{ 且 }x\in B\};$$
$$A\backslash B=\{x\mid x\in A\text{ 但 }x\notin B\}.$$

分别称为 A 与 B 的**并集**、**交集**、**差集**.

我们把研究某一问题时所考虑的对象的全体称为**全集**，并用 Ω 表示，把差集 $\Omega\setminus A$ 称为 A 的余集或补集，记作 A^c.

1.1.2 区间和邻域

（1）区间

区间是常用的一类数集，可以分为有限区间和无限区间.

符号	名称		定义
(a,b)	有限区间	开区间	$\{x\mid a<x<b\}$
$[a,b]$		闭区间	$\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$
(a,b)		半开区间	$\{x\mid a<x\leqslant b\}$
$[a,b)$		半开区间	$\{x\mid a\leqslant x<b\}$
$(a,+\infty)$	无限区间	开区间	$\{x\mid a<x\}$
$[a,+\infty)$		半开区间	$\{x\mid a\leqslant x\}$
$(-\infty,b)$		开区间	$\{x\mid x<\mathrm{b}\}$
$(-\infty,b]$		半开区间	$\{x\mid x\leqslant b\}$
$(-\infty,+\infty)$		开区间	$\{x\mid \lvert x\rvert<+\infty\}$

（2）邻域

设 $a\in R$，$\delta>0$，数集 $\{x\|x-a|<\delta\}$ 称为 a 的 δ **邻域**，记为 $U(a,\delta)$，即

$$U(a,\delta)=(a-\delta,a+\delta)=\{x\mid |x-a|<\delta\}.$$

a 称为邻域的中心，δ 称为邻域的半径.

数集 $\{x \mid 0<|x-a|<\delta\}$ 表示在 a 的 δ 邻域 $U(a,\delta)$ 中去掉 a 的集合，称为 a 的去心 δ **邻域**，记作

$$\mathring{U}(a,\delta)=(a-\delta,a)\cup(a,a+\delta)=\{x \mid 0<|x-a|<\delta\}.$$

如果无需指明邻域的半径 δ 时，常把 a 的某邻域（或去心邻域）表示为 $U(a)$（或 $\mathring{U}(a)$）.

习题 1.1

1. 如果 $A=\{x \mid 4<x<6\}$，$B=\{x \mid x>5\}$. 求

(1) $A\cup B$；　　(2) $A\cap B$；　　(3) $A\setminus B$.

2. 已知集合 $A=\{a,2,4,5\}$，$B=\{1,3,4,b\}$. 若 $A\cap B=\{1,4,5\}$，求 a,b.

3. 解下列不等式：

(1) $x^2\leqslant 25$；　　(2) $0<|x-4|\leqslant 2$；

(3) $|x-1|\geqslant 2$；　　(4) $|x+1|\leqslant|x|$.

4. 用区间表示下列不等式的解：

(1) $|x-a|<\varepsilon$（a 为常数，$\varepsilon>0$）；　　(2) $|2x+1|\geqslant|x-1|$.

1.2 函　　数

1.2.1 映射的概念

定义 1.1 设 X,Y 是两个非空集合，若对集合 X 中的每一个元素 x，均可找到集合 Y 中唯一确定的元素 y 与之对应，则称这个对应是集合 X 到集合 Y 的一个**映射**，记为 f，更详细地写为

$$f: X\to Y.$$

将 x 的对应元 y 记作 $f(x): x\mapsto y=f(x)$. 并称 y 为映射 f 下 x 的像，x 称为映射 f 下 y 的原像（或称为逆像）. 集合 X 称为映射 f 的定义域，记作 $D_f=X$，而 X 的所有元素的像 $f(x)$ 的集合

$$\{y \mid y\in Y, y=f(x), x\in X\}$$

称为映射的值域，记为 R_f（或 $f(X)$）.

例 1.2.1 设 X 是平面上所有三角形的全体，Y 是平面上所有圆的全体，因每个三角形都有唯一确定的外接圆，若定义对应法则

$$f: X\to Y,$$
$$x\mapsto y\ （y\text{ 是三角形 } x \text{ 的外接圆}），$$

则 f 显然是一个映射，其定义域与值域分别为 $D_f=X$ 和 $R_f=Y$.

例 1.2.2 设 $X=\{\alpha,\beta,\gamma\}$，$Y=\{a,b,c,d\}$，下面所规定的对应关系 f 显然

也是一个映射：

$$f(\alpha)=a,\quad f(\beta)=d,\quad f(\gamma)=c.$$

f 的定义域与值域分别为 $D_f=X=\{\alpha,\beta,\gamma\}$，$R_f=\{a,d,c\}\subset Y$.

在这个例子中，R_f 是 Y 的真子集.

概括起来，构成一个映射必须具备下列三个基本要素：

① 集合 X，即定义域 $D_f=X$；

② 集合 Y，即 $R_f\subset Y$；

③ 对应法则 f，使每个 $x\in X$，都有唯一确定的 $y=f(x)$ 与之对应.

需要指出两点：

(1) 映射要求元素的像必须是唯一的

例如，设 $X=\mathrm{R}^+$，$Y=\mathrm{R}$，对每一个 $x\in\mathrm{R}^+$，它的像 $y\in\mathrm{R}$ 且有 $y^2=x$，这样的 f 不是映射. 因为对每一个 $x\in\mathrm{R}^+$，都有两个实数 $y_1=\sqrt{x}$ 与 $y_2=-\sqrt{x}$ 与之对应，即 f 不满足像的唯一性.

对于不满足像的唯一性要求的对应法则，一般只要对值域范围加以限制，就能使它成为映射.

例 1.2.3 设 $X=\mathrm{R}^+$，$Y=\mathrm{R}^+$，则对应关系

$$f: X\to Y,$$
$$x\mapsto y\ (y^2=x)$$

是一个映射.

(2) 映射并不要求逆像也具有唯一性

例 1.2.4 设 $X=Y=\mathrm{R}$.

$$f: X\to Y,$$
$$x\mapsto y\ (y=x^2).$$

虽然 Y 中与 $x=2$ 和 $x=-2$ 对应的元素都是 $y=4$，但这并不影响 f 成为一个映射.

定义 1.2 设 f 是集合 X 到集合 Y 的一个映射，若在映射 f 下像的逆像也具有唯一性，即对 X 中的任意两个不同元素 $x_1\neq x_2$，它们的像 y_1 与 y_2 也满足 $y_1\neq y_2$，则称 f 为**单射**，如果映射 f 满足 $R_f=Y$，则称 f 为**满射**；如果映射 f 既为单射，又是满射，则称 f 为**双射**（又称**一一映射**）.

例 1.2.2 与例 1.2.3 中的映射是单射，例 1.2.1 与例 1.2.3 中的映射是满射，因而例 1.2.3 中的映射是双射.

1.2.2 逆映射与复合映射

设 $f: X\to Y$ 是单射，则由定义 1.2，对任意一个 $y\in R_f\subset Y$，它的逆像 $x\in X$（即满足 $f(x)=y$ 的 x）是唯一确定的，由定义 1.1，对应关系

$$g: R_f \to X,$$
$$y \mapsto x \ (f(x)=y)$$

构成了 R_f 到 X 上的一个映射，称为 f 的逆映射，记为 f^{-1}. 其定义域为 $D_{f^{-1}}=R_f$，值域为 $R_{f^{-1}}=X$.

显然，只要逆映射 f^{-1} 存在，它就一定是 R_f 到 X 上的双射.

现设有如下两个映射

$$g: X \to U_1,$$
$$x \mapsto u \ (u=g(x))$$

和

$$f: U_2 \to Y,$$
$$u \mapsto y \ (y=f(u)).$$

如果 $R_g \subset U_2 = D_f$，那就可以构造出一个新的对应关系

$$f \circ g: X \to Y,$$
$$x \mapsto y \ (y=f(g(x))),$$

由定义 1.1 可知，这还是一个映射，我们将之称为 f 和 g 的复合映射.

容易看出，复合映射 $f \circ g$ 的构成，实质上是引入了中间变量 u，因此关键在于 $R_g \subset D_f$ 是否成立. 如果这一条件得不到满足，就不能构成复合映射.

例 1.2.5　设 $X=Y=U_1=U_2=\mathrm{R}$，映射 g 与 f 为

$$g: X \to U_1,$$
$$x \mapsto u \ (u=\cos x)$$

和

$$f: U_2 \to Y,$$
$$u \mapsto y \left(y=\frac{2u}{1+u^2}\right),$$

显然 $R_g=[-1,1] \subset D_f$，因此可以构成复合映射

$$f \circ g: X \to Y,$$
$$x \mapsto y \left(y=f(g(x))=\frac{2\cos x}{1+\cos^2 x}\right).$$

例 1.2.6　设映射 g 与 f 为

$$g: \mathrm{R} \to \mathrm{R},$$
$$x \mapsto u \ (u=1-x^2)$$

和

$$f: \mathrm{R}^+ \to \mathrm{R},$$
$$u \mapsto y \ (y=\lg u),$$

显然 $\mathrm{R}_g=(-\infty,1] \not\subset D_f$，此 $f \circ g$ 不能构成复合映射.

但若将映射 g 的定义域缩小，就有可能构成复合映射. 如令

$$g^*: X=(-1,1) \to \mathrm{R},$$
$$x \mapsto u \ (u=1-x^2)$$

和
$$f: \mathrm{R}^+ \to \mathrm{R},$$
$$u \mapsto y\ (y=\lg u),$$
则 $R_{g^*}=(0,1)\subset D_f$，此时就构成复合映射
$$f\circ g^*: X=(-1,1)\to \mathrm{R},$$
$$x\mapsto y\ (y=f(g(x))=\lg(1-x^2))$$

一般地，若 $R_g\subset D_f$ 不成立，但 $R_g\cap D_f\neq\varnothing$，且在映射 g 下 $R_g\cap D_f$ 的原像集 $X_0\subset X$，则将 g 限制在 X_0 上得到 g^*，这时 $R_{g^*}\subset D_f$，于是可以确定一个由 X_0 到 Y 的复合映射 $f\circ g^*$. 在后面定义复合函数时，我们也采用与此一致的说法.

注意 映射 f 和 g 的复合是有顺序的，$f\circ g$ 有意义并不意味着 $g\circ f$ 也有意义，即使都有意义，即 $R_g\subset D_f$ 与 $R_f\subset D_g$ 都满足，复合映射 $f\circ g$ 与 $g\circ f$ 也不一定相同.

1.2.3 函数的概念

定义 1.3 设非空数集 $D\subset\mathrm{R}$，则称映射 $f: D\to\mathrm{R}$ 为定义在 D 上的函数，通常记为
$$y=f(x),\quad x\in D,$$
其中 x 称为**自变量**，y 称为**因变量**，D 称为**定义域**，记作 D_f，即 $D_f=D$. 数 x 对应的数 y，称为 x 的**函数值**，函数值的集合 R_f 或 $f(X)$ 称为函数 f 的**值域**. 即
$$R_f=f(X)=\{y\,|\,y=f(x),x\in D_f\}.$$
f 是一个对应关系，对每一个 $x\in D_f$，都有唯一的实数 $y=f(x)\in\mathrm{R}$ 与之对应. 由映射的定义可知，定义域和对应关系是构成函数的两个要素.

函数的表示方法有三种：列表法、图示法、解析法（公式法）. 将解析法和图示法相结合来研究函数，可以将抽象问题具体化. 同时，一些几何问题也可以通过解析法来做理论研究.

例 1.2.7 求函数 $y=\sqrt{x+2}+\dfrac{1}{1-x^2}$ 的定义域.

解 函数的定义域是使函数有意义的自变量 x 的全体. 即
$$\begin{cases}x+2\geqslant 0,\\ 1-x^2\neq 0.\end{cases}$$
得到函数的定义域 $D_f=[-2,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$.

例 1.2.8 绝对值函数 $y=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0\end{cases}$ 的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$，值域 $R_f=[0,+\infty)$，如图 1.2.1.

例 1.2.9　符号函数 $y=\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0\end{cases}$的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$，值域 $R_f=\{-1,0,1\}$，如图 1.2.2.

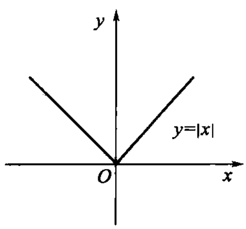

图 1.2.1

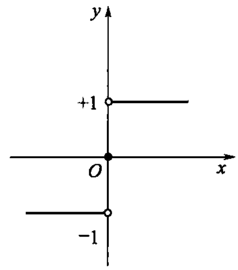

图 1.2.2

不难看出，例 1.2.8、例 1.2.9 具有这样特征，对于自变量的不同取值，函数不能用一个式子表示，而需要用两个或两个以上的式子表示，这样的函数通常称之为分段函数. 分段函数是用几个式子合起来表示的是一个函数. 在自然科学、工程技术和经济管理领域涉及的许多函数都属于分段函数的形式.

1.2.4　函数的四个性质

(1) 函数的奇偶性

设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称，若对于 $\forall x\in D$(记号“$\forall$”表示“对于任意给定的”)，都有

$$f(-x)=-f(x)$$

成立，则称 $f(x)$ 为**奇函数**；若对于 $\forall x\in D$，都有

$$f(-x)=f(x)$$

成立，则称 $f(x)$ 为**偶函数**.

例如，函数 $y=x^4-2x^2$，$y=\sqrt{1-x^2}$，$y=\dfrac{\sin x}{x}$都是偶函数；函数 $y=\dfrac{1}{x}$，$y=x^3$，$y=x^2\sin x$ 都为奇函数；函数 $y=\sin x+\cos x$ 既不是奇函数也不是偶函数，称为非奇非偶函数. 显然，奇函数的图像关于原点对称，偶函数的图像关于 y 轴对称.

例 1.2.10　判断函数 $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$的奇偶性.

解　函数的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，且

$$f(-x)=\ln(-x+\sqrt{1+x^2})=\ln\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}$$

$$=-\ln(x+\sqrt{1+x^2})=-f(x).$$

所以，函数 $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$是奇函数.

（2）函数的单调性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，区间 $I\subset D$，若对于 $\forall x_1,x_2\in I$ 且 $x_1<x_2$，都有

$$f(x_1)<f(x_2)$$

成立，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是**单调增加**或称**递增**，区间 I 称为单调增加区间.

若对于 $\forall x_1,x_2\in I$ 且 $x_1<x_2$，都有

$$f(x_1)>f(x_2)$$

成立，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上**单调减少**或称**递减**，区间 I 称为单调减少区间.

单调增加或单调减少函数统称为单调函数. 从几何直观上看，递增是指随着自变量 x 的增加，函数的图像逐渐上升；递减是指随着自变量 x 的增加，函数的图像逐渐下降. 关于函数单调性的讨论，将在后续导数的几何应用中研究.

（3）函数的有界性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，区间 $I\subset D$，若存在正数 M，使得对于 $\forall x\in I$，都有

$$|f(x)|\leqslant M$$

成立，则称函数 $f(x)$ 在 I 上**有界**，或称 $f(x)$ 为区间 I 上的有界函数；否则称 $f(x)$ 在区间 I 上**无界**，或称 $f(x)$ 是区间 I 上的无界函数.

可以证明，函数 $f(x)$ 在 I 上有界的充分必要条件是存在数 m，M 且 $M>m$，使得对于 $\forall x\in I$，都有 $m\leqslant f(x)\leqslant M$. 其中 m 称为函数 $f(x)$ 在 I 上的一个下界，M 称为函数 $f(x)$ 在 I 上的一个上界.

例如，函数 $y=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是有界的，因为对 $\forall x\in(-\infty,+\infty)$，都有 $|\sin x|\leqslant 1$. 而函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 上是无界的，在 $[1,+\infty)$上是有界的.

（4）函数的周期性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，若存在正数 T，使得对于 $\forall x\in D$，有 $x\pm T\in D$，且

$$f(x\pm T)=f(x),$$

则称 $f(x)$ 为**周期函数**，T 称为 $f(x)$ 的一个周期. 满足上式的最小正数 T，称为函数 $f(x)$ 的最小正周期.

周期函数的图形特点是，如果把一个周期为 T 的周期函数在一个周期内的

图形向左或向右平移周期的正整数倍距离，则它将与周期函数的其它部分图形重合，如图 1.2.3.

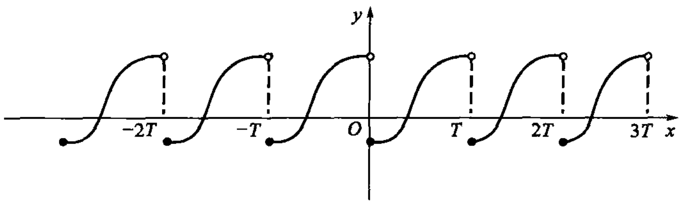

图 1.2.3

例如，$y=\sin 3x$ 是周期为$\frac{2\pi}{3}$的周期函数．再如，$y=|\cos x|$是周期为 π 的周期函数.

1.2.5　反函数

定义 1.4　设函数 $f: D\to f(D)$ $(x\mapsto y=f(x))$是单射，所以它存在逆映射 $f^{-1}: f(D)\to D$ $(y\mapsto x, f^{-1}(y)=x)$，则称 $x=f^{-1}(y)$为函数 $y=f(x)$的反函数.

习惯上，常以 x 为自变量，y 表示函数，于是反函数又记为 $y=f^{-1}(x)$.

注意　①$y=f(x)$ 的定义域为 $y=f^{-1}(x)$ 的值域，$y=f(x)$ 的值域为 $y=f^{-1}(x)$的定义域；②$y=f^{-1}(x)$的图形与 $y=f(x)$的图形关于直线 $y=x$ 对称，如图 1.2.4；③函数 $y=f^{-1}(x)$与 $y=f(x)$具有相同的单调性.

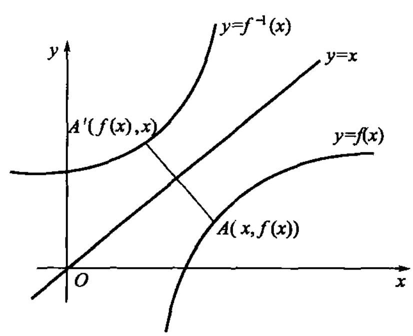

图 1.2.4

例 1.2.11　求 $y=1+\log_3(x+3)$的反函数.

解　由 $y=1+\log_3(x+3)$，得 $\log_3(x+3)=y-1$，解得$x=3^{y-1}-3$，故所求反函数为 $y=3^{x-1}-3$.

1.2.6　复合函数

在实际问题中经常出现这样的情形：在某变化过程中，第一个变量依赖于第二个变量，而第二个变量依赖于另外一个变量．例如，某商品的销售成本 C 依赖于商品的销售数量Q，函数关系：$C=81+3Q$；而销售数量 Q 依赖于该商品的销售价格 P，函数关系：$Q=3e^{-P}$．可以看出，销售成本 C 实际上依赖于销售价格 P，现通过所谓“中间变量 Q”传递的方法产生新的函数，得到 $C=81+9e^{-P}$．像这种将一个函数“代入”到另一个函数中的运算称为函数的复合运算，得到的函数称为复合函数.

复合函数实际是复合映射的一种特例. 按照通常函数的记号，复合函数的概念表述如下.

定义 1.5 设有函数 $y=f(u)$ 和 $u=g(x)$，若 $R_g\cap D_f\neq\varnothing$，则称定义在

$$\{x\mid x\in D_g, g(x)\in D_f\}$$

上的函数 $(f\circ g)(x)=f(g(x))$ 为函数 $y=f(u)$ 和 $u=g(x)$ 的复合函数，其中 u 为中间变量.

若 $R_g\cap D_f=\varnothing$，则 $y=f(u)$ 和 $u=g(x)$ 两者不能进行复合运算. 例如，$f(u)=\arccos u$，$u=g(x)=2+x^2$，由于 $R_g\cap D_f=[2,+\infty)\cap[-1,1]=\varnothing$，所以这两个函数不能进行复合运算.

利用复合函数的概念，可以把一个复杂函数分解成若干个简单的函数，也可以利用几个简单函数复合成一个较复杂的函数. 例如，$y=\cos\ln x$ 可以看作是由 $y=\cos u$，$u=\ln x$ 复合而成的；$y=\sqrt{u}$，$u=\sin x$ 可以复合成函数 $y=\sqrt{\sin x}$. 另外，还可以将复合函数的概念推广到有限个函数生成的复合函数. 例如，$y=\sqrt{u}$，$u=\ln v$，$v=2x+3$ 可以复合成函数 $y=\sqrt{\ln(2x+3)}$，$x\in[-1,+\infty)$.

习题 1.2

1. 求下列函数的定义域：

(1) $y=\dfrac{1}{x+2}$；　　(2) $y=\sqrt{x^2-8}$；

(3) $y=\dfrac{1}{1-x^2}+\sqrt{x+1}$；　　(4) $y=\arcsin\dfrac{x-1}{4}$；

(5) $y=\sqrt{\lg\dfrac{5x-x^2}{4}}$；　　(6) $y=\begin{cases}\sqrt{4-x^2}, & |x|<2,\\ x^2-2, & 2<|x|<4.\end{cases}$

2. 下列两个函数是否相同？为什么？

(1) $f(x)=\dfrac{x}{x}$ 与 $g(x)=1$；　　(2) $f(x)=x$ 与 $g(x)=\sqrt{x^2}$；

(3) $f(x)=\dfrac{x^4-1}{x^2+1}$ 与 $g(x)=x^2-1$；　　(4) $y=\sin^2x+\cos^2x$ 与 $y=1$；

(5) $f(x)=\lg x^2$ 与 $g(x)=2\lg x$；　　(6) $y=2x+1$ 与 $x=2y+1$.

3. 设 $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\leqslant 0,\\ x^2+x, & x>0.\end{cases}$ 求 $f(-x)$.

4. 设 $f(x)=\begin{cases}|\sin x|, & |x|<\dfrac{\pi}{3},\\ 0, & |x|\geqslant\dfrac{\pi}{3}.\end{cases}$，试求 $f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$，$f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$，$f\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)$，$f(-2)$ 并作出函数 $y=f(x)$ 图像.

5. 讨论下列函数的奇偶性：

(1) $y=x+x^2-x^3$；　　(2) $y=2+3\cos x$；