高中数学
学习方法

周光璧　著

中国农业出版社

高中数学学习方法

周光璧 著

中国农业出版社

高中数学学习方法

周光壁 著

* * *

责任编辑 郭永立

中国农业出版社出版（北京市朝阳区农展馆北路2号）

新华书店北京发行所发行 中国农业出版社印刷厂印刷

787×1092mm 32开本 21印张 462千字

1996年6月第1版 1996年6月北京第1次印刷

印数 1—5,000册 定价 18.80元

ISBN 7-109-04159-X/O·91

前言

数学是高中阶段最基本最重要的学科之一。高中数学的门类多(代数、三角、立体几何、平面解析几何),内容多,题目更多,确实是许多学生感觉难学的一门学科。怎样才能学好数学?自然成了高中学生面临的一个普遍性问题。为了指导和帮助他们解决这个问题,作者以唯物辩证法为指导思想,结合国内外有关数学方法论与数学学习规律的重要观点,回顾总结了个人近四十年来从事数学教学的实践经验及教育教学研究的心得,紧密结合高中数学教材写成了本书。特别注意针对当前学生在学习数学课中普遍存在的学习效率低,方法不得当以及其它带有倾向性的弱点和问题,加以深入具体的分析阐述,以帮助广大高中学生掌握科学的学习方法,学好数学课。全书共分六章。第一章全面概述了学好数学课应该努力做好的四个方面或四个层次的工作:①钻进去,真正“搞懂”;②抓联系,力求融汇贯通;③多解题,提高“转化”能力;④勤思考,不断总结提炼,以使读者对学好数学课有明确的目标、方向及要求。第二、三、四、五章分别系统地讲述了学好代数、三角、立体几何、平面解析几何几门数学分科的具体学习方法。其中,主要讲述:①怎样深入分析理解重要的数学概念,引导读者深入剖析概念的本质特征及相关概念的联系与区别,对立与统一的关系。不仅从正面,而且从侧面、从反面去全面认识概念,并在运用中不断深化对概念的理解和

掌握。②重要定理公式的含意，推理论证的思路及方法，如何灵活运用或变形运用，特别是分析揭示它们的由来与前后定理公式间的内在联系，使读者通过自己的努力能够达到融汇贯通，灵活应用。③各类数学题的解题方法与思路，对相当数量具有典型性、针对性、新颖性的例题进行深入分析，阐述解题过程中思路的发散与集中，正面与反面，纵向与横向，从多角度、多侧面、多方位去分析思考探索，从而帮助读者既掌握解各类数学题的一般思考途径与方法，又能针对题目的具体特征，采用种种特殊、灵活、简捷的方法和技巧，把普遍性和特殊性结合起来。不少例题后面配有“说明或启示”，使读者在解完一个典型的题目后学会回顾思考，从而逐步达到举一反三，触类旁通。同时还精选了一定数量的自我检测题并附有答案。第六章集中讲述了综合题的思考方法。着重分析怎样在不同数学内容与方法之间，“数”与“形”之间进行“转化”及“沟通”，从而达到化难为易，化繁为简，化隐蔽为明显，化未知为已知，以帮助读者进一步提高综合应用各种数学方法独立分析解决问题的能力。总之，作者希望本书能成为一本好的学习数学的指导书，成为广大高中学生以及具有相应文化程度的知识青年的良师益友，以帮助他们掌握科学的学习方法，提高学习质量和效率，为他们今后进一步深造和创造性地工作打下良好的基础。同时，也希望本书能够帮助中学青年数学教师和师范院校数学系的学生去深入分析把握高中数学教材的内在规律及种种数学思维方法，以利于较快地提高他们的数学素质和教学水平。

本书适用于高中各年级的学生。对于高中一、二年级的学生，在学完数学课本上每一章后，可以通过学习本书相应章节对所学知识进一步总结、深化和提高，特别是进一步掌

握解各类数学题的一般思考方法及种种灵活有用的解题技能技巧，以帮助他们进一步提高学业水平。对于高三年级的学生，本书是他们全面复习掌握高中数学内容方法的一本好的、实用的指导书，他们完全可以通过按顺序逐章节学习本书而达到全面系统地掌握高中数学内容及方法，进一步提高解题能力的目的。

由于作者水平有限，书中所述难免有不足之处，望数学教育界同行和广大读者批评指正。

作者　周光璧

一九九五年二月于太原教育学院

目　　录

第一章　怎样才能学好数学

要学好数学，最基本也是最重要的是课堂上不仅要专心听讲，而且要在听讲的同时积极主动地思考，力争当堂就能理解并基本消化所学知识方法。同时，课下要及时回忆、复习、钻研、消化、巩固，独立完成好课外作业。在此基础上还应进一步努力作好以下四个方面或四个层次的工作。

一、钻进去，真正搞"懂"

不论对每一个数学概念、定理公式、性质法则、例题，甚至对书上每一段话，每一个连接词都要钻进去，深入思考理解，反复琢磨，真正搞得一清二楚，达到真"懂"，不能有丝毫马虎或含糊。怎样深入钻研？怎样才算真"懂"呢？下面着重就怎样钻研数学概念及定理公式来谈。

1. 对于数学概念，特别是重要的数学概念，不能满足于从文字上看懂它，而应该逐字逐句深入分析理解它的确切含意，明确它的本质特征以及不同概念（特别是相近概念）间质的区别；对于表示数学概念的数学符号要能用自己的语言准确简炼地表述它的意义，同时写出它的数学表达式或图形（几何）表示，使自己对概念的含意能达到"一目了然"和"直观形象"的理解；对一些重要的概念，不仅要从正面去认识理解，还要从侧面、从反面提出问题进一步分析理解，并在应用概念的过程中不断深化对它的认识及理解，这样才

能达到真“懂”，才能真正掌握数学概念。

例如，反正弦函数的概念课本上是这样讲的：“函数 $y=\sin x\left(x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\right)$的反函数叫做反正弦函数，记作 $x=\arcsin y$，常改写成$y=\arcsin x$。”在钻研它时，就应该深入分析，清楚地理解和掌握以下几点：

（1）函数$y=\sin x$的定义域是R，值域是$[-1,1]$。对于$[-1,1]$上的每一个y值，有无穷多个x值与之对应，因此$y=\sin x$在其整个定义域上反函数并不存在；

（2）对于函数$y=\sin x$，若规定在$x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$上考察它，此时它是单增函数，$y$值从$-1$增加到$1$，$x$、$y$之间是一一对应关系（确定它的映射是一一映射），故其反函数存在，叫做反正弦函数，习惯上用$y=\arcsin x$表示；

（3）因此，符号$\arcsin x$表示的是$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$上正弦等于$x$的那个唯一确定的值。也就是说，反正弦$\arcsin x$的存在条件和意义是：

$$\arcsin x\begin{cases}-1\leqslant x\leqslant 1 & \text{（定义域）}\\ -\dfrac{\pi}{2}\leqslant\arcsin x\leqslant\dfrac{\pi}{2} & \text{（值域）}\\ \sin(\arcsin x)=x & \text{（定义恒等式）}\end{cases}$$

当我们一看到符号$\arcsin x$时，脑子里就要清醒地想到以上三点；

（4）利用单位圆中的正弦线，$\arcsin a(-1\leqslant a\leqslant 1)$的

意义可以在单位圆中图示（图1—1）。

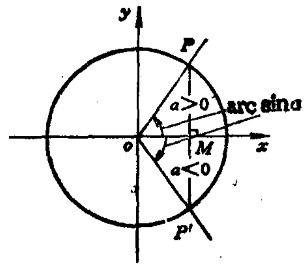

图 1—1

又如，奇（偶）函数的概念课本上是这样规定的："如果对于函数$f(x)$定义域内任意一个x，都有$f(-x)=-f(x)$（$f(-x)=f(x)$），那么函数$f(x)$就叫做奇函数（偶函数）。"我们在学习这一节时，怎样深入钻研，搞清它们的确切含意，并在应用中逐步深化和扩展对它们的认识及理解呢？可以通过从正面、侧面、反面提出并解答以下问题来正确理解（答案请读者参看课本及本章第二节）。

（1）等式$f(-x)=-f(x)$，$f(-x)=f(x)$的含义是什么？它们是对定义域内某些x成立，还是对定义域内所有x恒成立？

（2）奇（偶）函数的定义域有何特征？

（3）奇（偶）函数的图像有何特征？为什么？反之是否成立？又为什么？

（4）常函数$f(x)=c$是什么函数？有没有既是奇函数又是偶函数的函数？如果有，找出来；

（5）两个奇（偶）函数的和、差、积、商是否是奇函数或偶函数？为什么？

（6）奇（偶）函数在$(-a,0)$内的增减性与它在$(0,a)$内$(a>0)$的增减性有何关系？为什么？

（7）若函数$y=f(x)$与$u=\phi(y)$都是奇函数或偶函数，那么复合函数$u=\phi(f(x))$在什么情况下是奇函数，什么情况

下是偶函数？为什么？

（8）当a为何值时，$f(x)=\dfrac{a^2-1}{x+a}$是奇函数？特别地，当$a=1$或$a=-1$时，$f(x)$是不是奇（偶）函数，为什么？等等。

2.对于重要的定理公式，首先要搞清楚它的条件是什么？结论是什么？含意是什么？如何证明？其次要分析定理公式的主要用途和使用方法，防止错用或乱用。在此基础上还要进一步深入分析定理公式的背景是什么？它从何而来？它和前后有关定理公式的关系，以及逆定理是否成立等问题。

例如，对于正弦定理和余弦定理，除了钻研搞懂它们本身外，还应更深入一步，分析搞清楚以下几点：

（1）余弦定理是直角三角形中勾股定理的推广，它和勾股定理是一般与特殊的关系，因此在推证余弦定理时只需要作出三角形的高，再利用勾股定理即可。同样，正弦定理是直角三角形中锐角正弦的规定$\dfrac{a}{c}=\sin A$、$\dfrac{b}{c}=\sin B$推广到任意三角形中而得到的，它们之间也是一般和特殊的关系。因此，作出斜三角形ABC的外接圆直径CA_1，利用圆周角定理立即就可以从锐角正弦的规定推导出正弦定理（图1—2）：

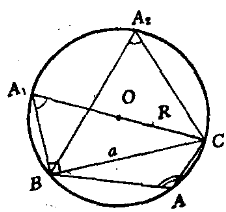

图 1—2

$\because A=A_1$或$A=\pi-A_1$

$\therefore \sin A=\sin A_1$

$$\therefore \quad \frac{a}{\sin A}=\frac{a}{\sin A_1}=A_1C=2R$$

同理

$$\frac{b}{\sin B}=2R,\quad \frac{c}{\sin C}=2R$$

∴　得正弦定理

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$$

（2）正弦定理和余弦定理都是三角形中最基本的边角关系式，它们是三角形边与角间内在联系的不同反映形式，因此在它们之间必然存在某种深刻的联系，“猜想”很可能是等价关系，推证如下：

由正弦定理推出余弦定理：$\triangle ABC$中由正弦定理，$a=2R\sin A, b=2R\sin B, c=2R\sin C$，那么有

$$\begin{aligned}b^2+c^2-2bc\cos A&=4R^2[\sin^2B+\sin^2C+\\&\quad 2\sin B\sin C\cos(B+C)]\\&=4R^2[\sin^2B+\sin^2C+2\sin B\sin C\\&\quad(\cos B\cos C-\sin B\sin C)]\\&=4R^2[\sin^2B(1-\sin^2C)+\sin^2C(1-\\&\quad\sin^2B)+2\sin B\sin C\cos B\cos C]\\&=4R^2[\sin^2B\cos^2C+\sin^2C\cos^2B+\\&\quad 2\sin B\sin C\cos B\cos C]\\&=4R^2(\sin B\cos C+\cos B\sin C)^2\\&=4R^2\sin^2(B+C)=4R^2\sin^2A\\&=a^2\end{aligned}$$

同理可推出 $b^2=c^2+a^2-2ac\cos B$

$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$

由余弦定理推出正弦定理：$\triangle ABC$中由余弦定理，

$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$，又$0<A<\pi$，$\therefore \sin A>0$，那么有

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{a}{\sqrt{1-\cos^2 A}}=\frac{a}{\sqrt{1-\dfrac{(b^2+c^2-a^2)^2}{4b^2c^2}}}$$

$$=\frac{2abc}{\sqrt{4b^2c^2-(b^2+c^2-a^2)^2}}$$

$$=\frac{2abc}{\sqrt{(2bc+b^2+c^2-a^2)(2bc-b^2-c^2+a^2)}}$$

$$=\frac{2abc}{\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)}}$$

同理可导出

$$\frac{b}{\sin B}=\frac{2abc}{\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)}}$$

$$\frac{c}{\sin C}=\frac{2abc}{\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)}}$$

$$\therefore\quad \frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$$