J.D.杰克逊经典电动力学

解题指导

·奚定平·

深圳大学 学报

J.D.杰克逊经典电动力学

解题指导

·奚定平·

深圳大学 学报

前　言

J·D·杰克逊的《经典电动力学》是一本国内外公认的经典著作。该书收集了大量有代表性的习题，从而大大丰富了它的内容。国外，该书广泛被用为研究生的教材；国内，普遍用作参考书。由于该书有一定的深度，广大读者希望有一本关于该书的参考书，以便能完成习题和加深对课文的理解。笔者正是基于此目的，编写了《J·D·杰克逊经典电动力学解题指导》，对该书的全部习题作了启发性的解答。

本书保持杰克逊《经典电动力学》原书(第二版，1975年，中译本)的章节顺序和符号规则，并直接引用原书上的公式和图表。例如"根据公式(13.10)……"即表示根据原书公式(13.10)。由于习题的份量较大，不可能将每一解题步骤都列出来，故作了些省略。省略的步骤，读者根据提示是可以推导出来的，而且这种推导对读者大有裨益。书中引用的公式多数给出了出处，没有给出出处的均可在《数学手册》中查到。同类型的数值计算只取例示范。有几处习题原书要求参考有关文献进行讨论，故不宜以答案的形式写出，读者可参看有关文献理解。

本书稿发排时删去题解中的题目，主要考虑是本解题指导要与《经典电动力学》配合使用，原书已有题目，本书就没有再列出的必要了。

本书前六章有刘维宁、李实践和陈伟同志参与编写。中山大学郭硕宏教授审阅了本书的大部分章节，并写了推荐意见。笔者深表谢意。

在编写过程中，我们力图使解法新颖，准确，但是由于水平有限，而且习题涉及面广，错误和不足之处在所难免，欢迎读者指出。

奚定平

1988年3月于深圳粤海门

目　录

第一章　静电学导论

1.1证：（a）如果导体内部存在过剩的静电荷，其分布为$\rho(\mathbf{x})$，在导体内作任一包含静电荷的高斯面S，根据高斯定律，高斯面上电场不为零，因此导体内部的自由电荷将在电场E的作用下定向运动，直至所有的过剩电荷都分布在导体表面。

（b）由于导体内部电场为零，所以外电荷所产生的场的电力线只能终止在导体外表面的感应电荷上，不能穿透导体进入导体内部。导体及内腔的电势会受到外电荷的影响，由于电势是常数，所以不影响内场的分布。可见一个闭合的中空导体能将其内部屏蔽起来。

若在导体内腔放一个电荷$Q_{内}$，在导体外包围导体作一高斯面，由高斯定律可知，导体内部电荷对高斯面上的电场有贡献。

（c）用反证法。如果电场不垂直导体表面，即$E_{/\!/}\neq 0$，则在和导体表面平行的电场的作用下电荷仍将有定向运动，这与静电平衡矛盾，故导体表面上的电场垂直于表面。

又，在导体表面作一个高斯面，上平面平行于导体表面且在导体外，下平面在导体内，侧面垂直于导体表面，根据高斯定律，有：

$$\Delta S\cdot(E_2+E_1)=4\pi\sigma\cdot\Delta S$$

在导体内部，$E_1=0$，所以　$E_2=4\pi\sigma$

这里，σ是面电荷密度。

1.2证：由δ函数的定义

$$\delta(x)=\begin{cases}1 & \text{当}x=0\text{时}\\ 0 & \text{当}x\neq 0\text{时}\end{cases}$$

$$\int \delta(\mathbf{x})d^3x=1$$

显然，当$\alpha\to 0$时，高斯函数D（α；$\mathbf{x}$，y，z）满足δ函数的定义。

依题意：

$$\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}')=\lim_{\alpha\to 0} D(\alpha;\ \triangle x,\ \triangle y,\ \triangle z)$$

$$=\lim_{\alpha\to 0}(2\pi)^{-3/2}\alpha^{-3}\exp\left[-\frac{1}{2\alpha^2}(\triangle x^2+\triangle y^2+\triangle z^2)\right]$$

$$=\lim_{\alpha\to 0}(2\pi)^{-3/2}\alpha^{-3}\exp\left[-\frac{1}{2\alpha^2}\left(\frac{\triangle u^2}{U^2}+\frac{\triangle U^2}{V^2}+\frac{\triangle w^2}{W^2}\right)\right.$$

$$=\lim(2\pi)^{-3/2}(abc)^{-1}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\triangle u^2}{a^2}+\frac{\triangle v^2}{b^2}+\frac{\triangle w^2}{c^2}\right)\right]UVW$$

设：$a=\alpha U\to 0$

$b=\alpha V\to 0$

$c=\alpha W\to 0$

上式$=\delta(u-u')\delta(v-v')\delta(w-w')UVW$

最后一步是用了题意，即三维δ函数可以看作$\alpha\to 0$的高斯函数。

1.3解：（a）面电荷密度应为$Q/4\pi R^2$，　则

$$\rho(\mathbf{x})=\frac{Q}{4\pi R^2}\delta(r-R)$$

（b）面电荷密度应为$\lambda/2\pi b$，　则

$$\rho(\mathbf{x})=\frac{\lambda}{2\pi b}\delta(r-b)$$

（c）不妨设圆盘中心位置为$z=z_0$，而面电荷 密 度为$Q/\pi R^2$（$r\leqslant R$时），则

$$\rho(\mathbf{x})=\frac{Q}{\pi R^2}\delta(z-z_0)\theta(R-r)$$

（d）不妨设圆盘中心位置为$z=0$，而面电荷密度 为$Q/\pi R^2$（$r\leqslant R$时），则

$$\rho(x)=\frac{Q}{\pi R^2}\delta(\theta-\frac{\pi}{2})\theta(R-r)$$

这里，$\theta(R-r)=\begin{cases}1 & 当r\leqslant R时\\ 0 & 当r>R时\end{cases}$

1.4解：（a）对第一个球，球内 $E_{内}=0$。球外$E_{外}=Q/r^2$

（b）第二个球，球内$E_{内}=(Q/\varepsilon a^2)r$。外场同（a）

（c）对第三个球，球内

$$E_{内}=\frac{Q}{\epsilon r^3}\left(\frac{r}{a}\right)^{n+3}\frac{\mathbf{r}}{r}$$

球外同(a)，这里ϵ是球内的介电常数。

1.5解：由泊松方程，可求得电荷密度

$$\rho=-\frac{1}{4\pi}\nabla^2\Phi$$

将Φ写成$\Phi=qe^{-\alpha r}\left(\frac{1}{r}+\frac{\alpha}{2}\right)$

令　$f=e^{-\alpha r}$，　$g=\frac{1}{r}+\frac{\alpha}{2}$

由公式$\nabla^2(f\cdot g)=f\nabla^2g+g\nabla^2f+2\nabla f\cdot\nabla g$　　得

$$\rho=q\delta(r)-\frac{\alpha^3q}{8\pi}e^{-\alpha r}$$

其中，第一项表示位于$r=0$处的正电荷原子核；第二项表 示连续分布的负电荷电子云。

1.6解：（a）$c=A/4\pi d$

（b）$c=ab/(b-a)$

（c）$c=L/(2\ln(b/a))$

（d）$b_1=0.304\text{cm}$，$b_2=6691\text{cm}$

1.7证：设一根导线单位长度电荷密度是λ，另一根是$-\lambda$，在两柱导体轴联线上某点的电场是：

$$E=\frac{2Q}{x}+\frac{2Q}{d-x}$$

故 $\Delta\Phi=\int_{a1}^{d-a_2}\left(\frac{2Q}{x}+\frac{2Q}{d-x}\right)dx=4Q\ln(d/a)$

于是 $c=\frac{Q}{\Delta\Phi}\simeq(4\ln d/a)^{-1}$

现在需要$c=0.1\mu\mu F/\text{cm}$，将$d=0.5\text{cm}$，1.5cm，5cm分别代入上式，得导线的规格分别为0.62mm，1.86mm，6.2mm。

1.8解：（a）电容器静电能为

$$W=\frac{1}{2}VQ=\frac{1}{2}CQ^2=\frac{1}{2}\frac{V^2}{C}$$

故对平行板电容，$W_1=\frac{A}{8\pi d}V^2=\frac{2\pi dQ^2}{A}$

对球形电容，$W_2=\frac{ab}{2(b-a)}V^2=\frac{(b-a)}{2ab}Q^2$

对同轴电容，$W_3=\frac{L}{4\ln(b/a)}V^2=\frac{\ln(b/a)^2}{L}Q^2$

（b）当保持电量不变时，

$w_1=\frac{2\pi Q^2}{A^2}$，$w_2=\frac{Q^2}{8\pi r^4}$，$w_3=\frac{Q^2}{2\pi L^2r^2}$

当电势差V保持不变时，结合(1.6)题，有

$w_1=\frac{V^2}{8\pi d^2}$，　$w_2=\frac{a^2b^2}{(b-a)^2}\frac{V^2}{8\pi r^4}$，$w_3=\frac{V^2}{8\pi r^2\ln^2(b/a)}$

1.9解：（a）导体上的电荷固定不变时

$$F=-\frac{\partial W}{\partial d}$$

对平行板电容器，由习题（1.8)的结果得

$$F=-\frac{\partial}{\partial d}\left(\frac{2\pi dQ^2}{A}\right)=-\frac{2\pi Q^2}{A}$$

对平行圆柱电容，由习题（1.7）的结果得

$$F=-\frac{\partial}{\partial d}\left[2Q^2\ln(d/a)\right]=-\frac{2Q^2}{d}$$

注意，这是单位长度上的作用力。

（b）两导体间电势差固定不变时

对平行板电容器，

$$F=-\frac{\partial}{\partial d}\left(\frac{A}{8\pi d}V^2\right)=\frac{A}{8\pi d^2}V^2$$

对平行圆柱电容，

$$F=-\frac{\partial}{\partial d}\left(\frac{V^2}{8\ln(d/a)}\right)=-\frac{V^2}{8d\ln^2(d/a)}$$

1.10证：对于无电荷空间区域的任一点，Φ满足拉普拉斯方程，由格林定理

$$\int_V(\Phi\nabla^2\psi-\psi\nabla^2\Phi)d^3x=\int_S\left[\Phi\frac{\partial\psi}{\partial n}-\psi\frac{\partial\Phi}{\partial n}\right]da$$

取一个特殊的$\psi=1/R=1/|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|$，把坐标原点取在我们研究的$\mathbf{x}'$点，积分面是以原点为心的球面S。　　则

$$\Phi(0)=\frac{1}{4\pi}\int_S\left[\frac{1}{R}\frac{\partial\Phi}{\partial n'}-\Phi\frac{\partial}{\partial n'}\left(\frac{1}{R}\right)\right]da'$$

$$=\frac{1}{4\pi R^2}\int_S\left(R\frac{\partial\Phi}{\partial n'}+\Phi\right)da'$$

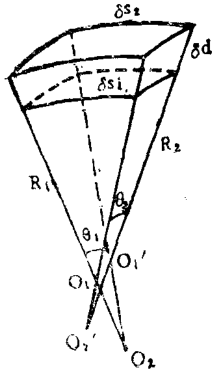
而　$$\frac{\partial\Phi}{\partial n}=\nabla\phi\cdot\mathbf{n}=-\mathbf{E}\cdot\mathbf{n}$$

由于球面内无电荷，由高斯定律知

$$\int_{s}\frac{\partial\Phi}{\partial n}da=0$$

故 $\Phi(0)=\frac{1}{4\pi R^{2}}\oint_{s}\Phi da'$

1.11证：如图，在导体表面取一个小平面元δS_1，θ_1、θ_2为小面元所张的角。将小面元沿着主曲率半径的方向平移一个小距离δd，得到另一个小平面元δS_2，则



$$\delta S_1=R_1\theta_1R_2\theta_2$$

$$\delta S_2=(R_1+\delta d)\theta_1(R_2+\delta d)\theta_2$$

我们以这两个小面元及侧面为高斯面，由高斯定律知：

$$E_2\cdot\delta S_2-E_1\cdot\delta S_1=0$$

将δS_1、δS_2代入，忽略两阶小量（δd）^{2}，有

$$(E_2-E_1)\cdot(R_1R_2)=-E_2(R_1+R_2)\delta d$$

由于两面距离很近，$E_2-E_1=\delta E$

在δd趋于零的极限条件下，有

$$\frac{1}{E}\frac{\partial E}{\partial n}=-\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)$$

1.12证：由格林定理：

$$\int_{v}(\Phi\nabla^{2}\Phi'-\Phi'\nabla^{2}\Phi)d^{3}x=\oint\left[\Phi\frac{\partial\Phi'}{\partial n}-\Phi'\frac{\partial\Phi}{\partial n}\right]da$$

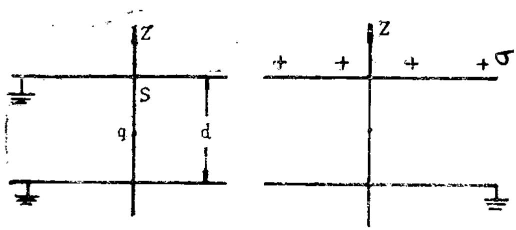
这里，$\nabla^{2}\Phi'=-4\pi\rho'$，$\nabla^{2}\Phi=-4\pi\rho$

$$\frac{\partial\Phi'}{\partial n}=-E'\cdot n=4\pi\sigma',\quad\frac{\partial\Phi}{\partial n}=4\pi\sigma$$

代入上式得格林互易定理：

$$\int_V \rho\Phi' d^3x+\int_S \sigma\Phi' da=\int_V \rho'\Phi d^3x+\int_S \sigma'\Phi d_a$$

1.13解：如下图，我们考虑两个具有相同表面的静电问题。



平板电容器上下距离为d，其一是将电容器上下板接地，在离上板距离为s外放一个点电荷q；另一个是将下板接地，上板带有面电荷密度σ′。于是，很容易求出在离上板距离为s处某点的电势为$4\pi\sigma'(d-S)$，上板面上的电势是$4\pi\sigma' d$.

将这两个不同情况的电荷分布和电势代入格林互易定理（习题1.12），有

$$\int q\delta(z-s)\cdot 4\pi\sigma'(d-s)\,dz+\int \sigma\cdot(4\pi\sigma' d)da=0$$

故得$Q_{上}=\int_S \sigma\cdot da=-q\dfrac{d-s}{d}$

同理，$Q_{下}=-q\dfrac{s}{d}$

1.14证：W[ψ]是稳定的，是指对任意ψ值的微小改变Δψ，W的改变值非负，Δψ满足在导体面上为零的条件。

由于 $W[\psi]=\dfrac{1}{8\pi}\int_V |\nabla\psi|^2 d^3x$

若设ψ是实数，

$$\Delta W[\psi]=\frac{1}{8\pi}\int_v\left\{\left[\nabla(\psi+\Delta\psi)\right]^2-(\nabla\psi)^2\right\}d^3x$$

$$=\frac{1}{8\pi}\int_v\left\{2\nabla\psi\nabla(\Delta\psi)+\left[\nabla(\Delta\psi)\right]^2\right\}d^3x$$

$$=-\frac{1}{4\pi}\int_v\left[\nabla^2(\psi+\frac{1}{2}\Delta\psi)\cdot\Delta\psi\right]d^3x$$

$$+\frac{1}{4\pi}\int_s\left[\nabla(\psi+\frac{1}{2}\Delta\psi)\cdot\Delta\psi\right]n da$$

第二项面积分为零，因为在导体面$\Delta\psi=0$。

要使ΔW是非负的，则须使$\Delta^2\psi=0$，即ψ在导体内满足拉普拉斯方程，且此时$W[\psi]$取最小值。

1.15证：导体以外空间的静电场的能量是：

$$W=\frac{1}{8\pi}\int_v|\nabla\Phi|^2d^3x$$

设导体面上不等势而引起的电荷重新分布为$\Delta\sigma$，对应的电势变化是$\Delta\Phi$，由线性叠加原理，在导体表面上

$$\left.\frac{\partial(\Delta\Phi)}{\partial n}\right|_s=-4\pi\Delta\sigma$$

因此，能量的改变为：

$$\Delta W=\frac{1}{8\pi}\int_v\left\{\left[\nabla(\Phi+\Delta\Phi)\right]^2-(\nabla\Phi)^2\right\}d^3x$$

$$\simeq\frac{1}{4\pi}\int_s\left[\nabla(\Delta\Phi)\cdot\Phi\right]n\cdot da-\frac{1}{4\pi}\int_v\nabla^2(\Delta\Phi)\cdot\Phi d^3x$$

其中第二项积分为零，因为$\nabla^2(\Delta\phi)=0$

则 $\Delta W=-\frac{1}{4\pi}\int_s\frac{\partial(\Delta\Phi)}{\partial n}\Phi ds=\int_v\Delta\sigma\cdot\Phi ds$

对于正电荷，电荷转移总是从高电势的表面到低电势的表面，若转移的电荷为$\Delta Q>0$，近似地有

$$\Delta W\sim-\Delta Q\Phi_{高}+\Delta Q\Phi_{低}<0$$

同理，带负电荷的导体也有$\Delta W<0$。

可见，只有当电荷分布使导体为等势面，$\Delta\sigma=0$，因此有$\Delta W=0$，此时静电能是极小值。

1.16证：设原系统的能量、电场及电场所占空间分别为W、**E**和V，引进导体后就分别为W′、**E**′和V′，则能量的改变为：

$$W-W'=\frac{1}{8\pi}\int_{V}E^2dv-\frac{1}{8\pi}\int_{V'}E'^2dv$$

$$=\frac{1}{8\pi}\int_{V-V'}E^2dv+\frac{1}{8\pi}\int_{V'}(\mathbf{E}-\mathbf{E}')^2dv$$

$$+\frac{1}{8\pi}\int_{V'}2\mathbf{E}'\cdot(\mathbf{E}-\mathbf{E}')dv$$

现在来看最后一项积分

$$\int_{V}2\mathbf{E}'\cdot(\mathbf{E}-\mathbf{E}')dv=\int_{S'}\Phi'\left(\frac{\partial\Phi}{\partial n}-\frac{\partial\Phi'}{\partial n}\right)ds$$

$$=4\pi\int_{S'}\Phi'(\sigma'-\sigma)ds$$

面积分遍及所有导体表面，在每一导体表面上，Φ'是常数，所以上式为

$$\int_{S'}\Phi'(\sigma'-\sigma)ds=\sum_i\Phi'(Q_i'-Q_i)=0$$

可见$W-W'$是个正值。

所以，当导体引入电场时，导体上的电荷将重新分布，结果是使电场的能量减少。

1.17证：（a）设第k个导体保持单位电势，其它导体电势为零，则

$$W=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}Q_iV_i=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}C_{ij}V_iV_j$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}C_{ij}\delta(i-k)\delta(j-k)=\frac{c}{2}$$

而 $W=\frac{1}{8\pi}\int_{v}|\nabla\Phi|^{2}d^{3}x$

故 $C=\frac{1}{4\pi}\int_{v}|\nabla\Phi|^{2}d^{3}x$

（b）设Φ有一微变量，即$\psi=\Phi+\delta\Phi$

由习题1.14结果，则有

$$\frac{1}{8\pi}\int_{v}|\nabla\psi|^{2}d^{3}x\geqslant\frac{1}{8\pi}\int_{v}|\nabla\Phi|^{2}d^{3}x=\frac{C}{2}$$

故 $C\leqslant C[\psi]=\frac{1}{4\pi}\int_{v}|\nabla\psi|^{2}d^{3}x$

1.18证：格林函数$G(\mathbf{x},\mathbf{x}')$满足

$$\nabla^{2}G(\mathbf{x},\mathbf{x}')=-4\pi\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}') \qquad (1)$$

在S_1以外的导体表面上有$G(\mathbf{x},\mathbf{x}')=0$。在$S_1$导体面上，将高斯定律用于（1）式，则有

$$\int_{S_1}\frac{\partial G}{\partial n}da=0$$

这相当于S_1面上感应的总电荷量仍为零。

再由格林定理

$$\Phi(\mathbf{x})=\int\rho(\mathbf{x}')G(\mathbf{x},\mathbf{x}')d^{3}x'+\frac{1}{4\pi}\int_{s}\left[G\frac{\partial\Phi}{\partial n'}-\Phi\frac{\partial}{\partial n'}G\right]da'$$

$$=\int_{S_1}\sigma(\mathbf{x})G(\mathbf{x},\mathbf{x}')da'$$

由（1.53）式可求得静电能

$$W=\frac{1}{2}\int\rho(\mathbf{x})\Phi(\mathbf{x})d^{3}x$$

$$=\frac{1}{2}\int_{S_1}da\int_{S_1}da'\sigma(\mathbf{x})G(\mathbf{x},\mathbf{x}')\sigma(\mathbf{x}')$$

(b) 将$Q=\oint_{s1}\sigma(\mathbf{x})da$代入$W=Q^2/2C$，则可求得

$$C^{-1}[\sigma]=\frac{\int_{s1}da\int_{s1}da'\sigma(\mathbf{x})G(\mathbf{x},\ \mathbf{x}')\sigma(\mathbf{x}')}{\left[\oint_{s1}\sigma(\mathbf{x})da\right]^2}$$

由汤姆逊定理，当导体表面总电荷不变时，电荷分布使导体成等势面，其静电能为最小值，也就是上式的分子项最小，对应给出的电容量是最大值。所以，任何电荷分布$\sigma(\mathbf{x})$的尝试函数将给出真电容的下限。

1.19解：首先考虑尝试函数$\psi_1(\rho)=(b-\rho)/(b-a)$的情况，把$\psi_1(\rho)$代入(1.17(b))题的结果，有

$$C_1=\frac{1}{4\pi}\int_v|\nabla\psi_1|^2d^3x$$

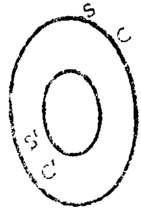
$$=\frac{1}{4\pi}\int_v\left|-\frac{\hat{\rho}_0}{b-a}\right|^2d^3x=\frac{L(b/a+1)}{4(b/a-1)}$$

再把严构结果$\psi_R(\rho)=\ln(b/\rho)/(\ln b-\ln a)$代入同一式，即得

$$C_R=\frac{1}{4\pi}\int_v|\nabla\psi_R|^2d^3x$$

$$=\frac{1}{4\pi}\int_v\left|-\frac{\rho_0}{\rho(\ln b-\ln a)}\right|^2d^3x=\frac{L}{2\ln(b/a)}$$

数值计算将表明，比值b/a越接近1，则变分值越精确。



1.20解：(a) 对导体系S，设其电势为Φ，在导体面S以外的电势满足$\nabla^2\Phi=0$，导体面S_1以内及在导体面上的电势Φ是一个常数，当将导体面变形到S'时，Φ在S'以外的空间则不满足拉普拉斯方程。设Φ'是满足拉

普拉斯方程的势，根据习题1.14的结果，可用Φ作为一个的能量积分将大于Φ′的能量积分。又根据习题1.17的结果，Φ作为尝试函数给出真电容的上限，故以S′为界面的导体的电容总是小于S为界面的电容。

(b)按以上分析，我们作正方体的外接球和内切球，则有

$C_{外}=a/\sqrt{2}=0.707a$，$C_{内}=a/2=0.5a$

根据（a）的分析，它们分别为C_R的上下限。