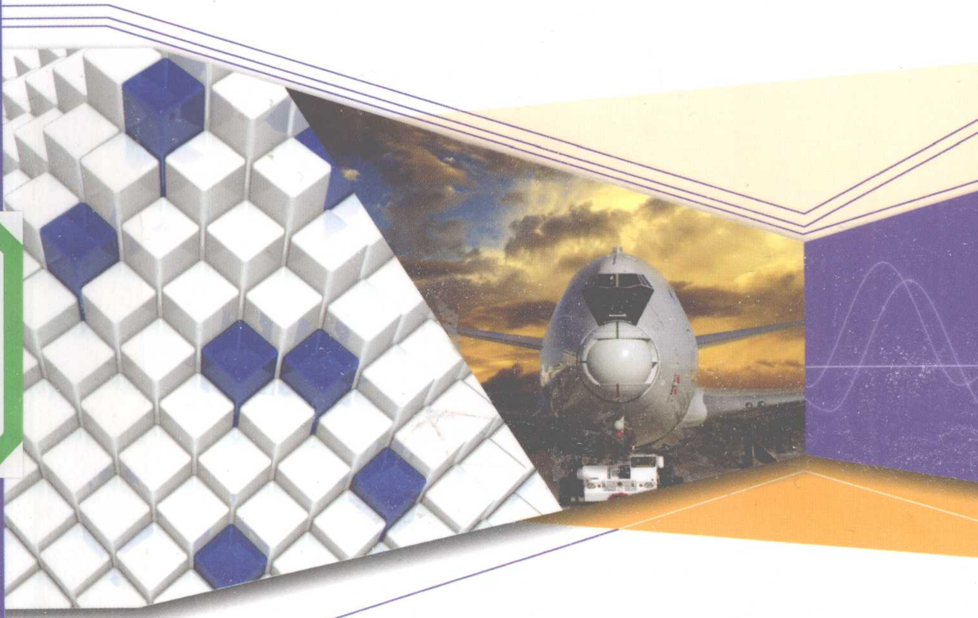
Signal and Information

信号与信息

胡来招　著



電子工業出版社
PUBLISHING HOUSE OF ELECTRONICS INDUSTRY
http://www.phei.com.cn

信号与信息

胡来招　著

電子工業出版社
Publishing House of Electronics Industry
北京 · BEIJING

图书在版编目（CIP）数据

信号与信息 / 胡来招著. —北京：电子工业出版社，2010.3
ISBN 978-7-121-10450-3

I. 信… II. 胡… III. ①信号处理②信息处理 IV. TN911.7 TP391

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2010）第 032028 号

责任编辑：竺南直
印　　刷：北京天宇星印刷厂
装　　订：三河市皇庄路通装订厂
出版发行：电子工业出版社
　　　　　北京市海淀区万寿路 173 信箱　邮编 100036
开　　本：850×1168　1/32　印张：6.75　字数：175 千字
印　　次：2010 年 3 月第 1 次印刷
印　　数：4000 册　定价：19.80 元

前　言

由于研究电子对抗的技术问题，我开始考虑人们利用电子信号进行对抗的实质到底是什么，进而想归纳人们利用各种电子信号的活动到底有什么根本性的东西。结果发现在电子对抗这个领域内，我们对信号的利用效率非常低。于是，考虑把这方面的思考总结出来，或许不仅有益于电子对抗专业的发展，而且可能会使人们把电子信号与信息活动关联起来，进而推动产生创新的思维。

自从电被人类认识以来，它对人类的生活、生产、科研和军事等产生了巨大的作用，这甚至远远超出了人们最初的预期。人们利用电，可以分为两大类。一类是利用电本身所具有的能量，我们称之为强电。另一类则利用电信号能够携带、传递信息的能力，我们称之为弱电。从路的观点看，电具有一定的电压和电流，它们的乘积代表功率。从场的观点看，对应的是场强，表示场具有能量。电能可以由化学能和机械能等转换过来，同时又可以转换成其他形式的能量，被人们利用。由于电能具有传输方便的特点，使之成为一种很好的能量传输方式。电能与其他形式能量的转换装置、电能与电能的转换装置、电能的传输及控制装置就成为人们研究以强电形式使用电的主要内容。与其他形式的能量相比，我们知道，电能在远距离传送时具有突出的优点，其速度是光速，其效率明显高于其他所有形式的能量。然而，仅仅利用电信号携带信息，把具有微弱能量的电信号作为信息的载体，给人类带来了更多的具体应用。由于人类的各种活动，无不与信息有关，我们把与信息有关的产业叫做信息产业。几乎所有的人都认识到，这个产业的发展太惊人了。

于是，我们不得不从根本上考虑，当我们把电看成信息的载体时，应当怎样看待信号与信息，我们可能用什么办法让信号承载信息，又可能用什么办法把信息从信号中提取出来。本书就是试图为解决这方面的问题而写的。

人类对信息最初并没有深刻的认识，甚至没有把信息当成一种客观实体，不认为信息可以计量，没有把信息当成我们研究的对象。自从香农确定信息理论的基础以来，事情发生了一些根本性的变化。首先，我们把信息定义为事件发生前后我们所掌握的熵的变化，这是一个与事件的概率大小有关的量，于是信息可以被计量。信息计量的具体定义为：如果一个事件发生为不同状态的概率为 p_i，那么，在它确定发生以前，我们认为事件含有一定总量的熵，其度量可以被定义为 $I=\Sigma-p_i\cdot\log(p_i)$ 。而一旦它已经发生，就已经没有任何不确定性，熵的总量将下降到 0。因此，我们就把前者定义为事件的信息量。特别是，当我们用 2 作为对数的底时，所得到的信息量的计量单位为比特，即 $I=\Sigma-p_i\cdot\log_2(p_i)$（比特）。由于有了这样一个对信息计量的定义，我们就可以具体地研究一个信号究竟包含多少信息、能够携带多少信息等。于是，我们又发现了信号与信息之间的一个最基本的关系，那就是携带一定量的信息，需要一定的信号功率、时间和频带宽度。本书将在第 2 章中详细论述这一点。既然发现了信号与信息的基本关系，我们想问，当利用信号携带信息时，是否也存在一些最基本的规律，从而使我们可能从根本上理解、解释、优化使用信号的过程。本书正是全面地论述了这个方面的考虑。希望它给读者带来启发，使我们可以自觉地、更好地使用信号，也可以让我们开发出新的应用方式和实际用途。

作者所以想写这本书，是受了很多思路的启发。比如说，人们研究了很多压缩信息的办法，这等于告诉人们，当信号用来携带信息时，我们往往没有有效地使用信号，因此，在功率、带宽或时间方面，有很多潜力可以挖掘。又比如说，GPS 采用扩谱信号，使得

信号处理可以有 50dB 以上的增益，实现接收机非常高的灵敏度。又比如说，采用合成孔径原理，从信号的时延和频移中提取目标反射的距离和速度信息，从而实现对目标的成像。所有这些，似乎告诉人们，信号与信息之间的关系，非常有意思，但是在人们构造一个具体的应用时，有些规律很可能并没有完全被认识清楚。如果我们能够从本质上看清问题，就有可能更有效地利用信号，并且开拓新的使用信号的途径。因此，书写本书在一定意义上也是一个学习和总结，或者说，本书力图从简单的、容易接受的一些事实出发，提出信号和信息之间最本质的关系。

要写一本专业技术书籍是很困难的。能够鼓励我继续思考，完成这个短作，是西南电子设备研究所这个群体。如果没有应用技术的发展对理论的需求，如果没有这个群体在自身的活动中对发展的渴望，根本就没有人向我提出需要考虑信号与信息的基本关系，也不可能有环境支持我把这个问题想下去，因此也就不可能有这本书的诞生。尽管问题的提出不是直接的，但我认为这是技术发展的规律。所以，我还想大声地呼吁，很多技术问题还在等待着从事于技术开发、研究的人们去总结；我也想由衷地感谢，我们丰富的科研活动，它们是这些新观点的源泉。

初稿完成以后，重读一遍，发现有些地方不够严密，再由于时间的推移，觉得有些提法也不尽合理，于是不得不做稍大一点的修改。这样一来，这本小册子的完成就几乎经历了 7 个年头。同时，由于作者从事的是电子对抗专业，最初似乎是想总结侦察和干扰的基本理论，但是实际上，本书所论述的问题，显然并不局限于电子对抗，它可能带来的应用，或许会大大地超越电子对抗的范畴。

目　录

第 1 章　信号的描述

1.1　信号的基本描述

我们研究信号，首先想到怎样来描述一个信号。我们可以用电场、电压或电流等来表示信号。因此，一个最直接的答案是，我们可以把信号看成一个时间的函数，用一个函数式来描述信号，即 $s = f(t)$。如果信号是时间的某一个简单函数，我们可以用少数参数来描述这个信号。比如，一个单一频率的正弦信号可以用它的频率、幅度、初始相位等参数来描述，一个规律的重复脉冲信号可以用它的幅度、脉冲宽度和重复频率来描述，等等。更一般的情况是，信号具有某种看似随机变化的属性，我们似乎无法用有限的参数来准确地描述信号。但是事实并不是这样的，为了便于理解，首先从工程的观点出发进行简单分析。至于支持这个论述的更严格的说法，我们将在本章的后面分别讨论。

考虑一个信号，具有一定的时间长度 T。由于它具有有限的时间长度，我们可以人为地以该长度为周期，复制该信号，并将其首尾相接。这样可以得到一个周期信号，其周期就是 T。根据傅里叶级数的理论，这个信号将可以被展开成一个无穷级数，写成如下形式：

$$f(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty}[A_k \cdot \cos(k\frac{2\pi}{T}t) + B_k \cdot \sin(k\frac{2\pi}{T}t)] \qquad (1.1)$$

也就是说，这个信号可以用一个直流和无数个简谐波来表示，而且这些简谐波的频率都是 $1/T$ 的整数倍。由于时间长度有限，这

个信号不含有非 $1/T$ 的整数倍的频率分量。如果信号的带宽是无限的，对信号的描述将仍然是无限的。

如果我们再添加一个条件，假设信号的带宽是有限的，其频带宽度为 B。那么我们就会发现，原来需要连续描述的信号，可以被转换成用一些离散的量来描述，而且它们的数量是有限的。因为这个信号已经被我们分解成有限个简谐波的总和。对于其中的任何一个频率分量，确切描述它所需要的仅仅是一个序号和它的幅度。我们不妨规定，直流分量的序号为 0，频率为 k/T 的余弦分量用正整数 k 表示，频率为 k/T 的正弦分量用负整数 $-k$ 表示。于是，一个这样的信号可以简单地用一系列的幅度值来描述。

也就是说，对于我们所设定的信号，不但其频率分量是离散的，而且具体频率落在给定的频率范围以外的那些分量，由于其幅度为零，我们根本不必描述。于是，一个信号将可以由有限个频率分量的幅度来描述。由于频率分量之间的频率间隔为 $1/T$，在带宽 B 内将有 $2B/(1/T)+1= 2BT+1$ 个分量（包含直流分量可以被认为是一种很特殊的情况，与 $2BT$ 这样一个很规范的数相比，在分量的个数上的差距为 1）。上述分析的结论就是说，我们可以用 $2BT+1$ 个幅度值来描述一个信号，$2BT+1$ 个简谐波的总和就可以构成这个信号。用公式描述，就是

$$f(t) = A_0 + \sum_{k=n_1}^{n_2} [A_k \cdot \cos(k\frac{2\pi}{T}t) + A_{-k} \cdot \sin(k\frac{2\pi}{T}t)] \qquad (1.2)$$

$f(t) \leftrightarrow A_k$　　　其中 k 的数量为 $2BT+1$ 个。

还可以换一个角度来分析这同一个问题。如果说信号具有有限的带宽，我们总可以把它变换到频率为 0 到 B 的另外一个信号。混频就是这样的一种线性变换，变换前后的信号具有一一对应的关系。因此，描述后一个信号也就描述了前一个信号。而对于后一个信号，著名的采样定理告诉我们，用频率为 $2B$ 的速率对信号采样，

所获得的信息可以唯一地描述这个信号。于是我们也可以用一系列离散的量来描述信号。由于信号的时间是有限的，描述信号的数也将只需要有限个。对于时间长度为 T 而言，需要的也就是用 $2BT+1$ 个幅度值来描述一个信号。我们用不同的分析方法得到了同样的结果。

如果说，用简谐波信号合成一个信号还让人觉得不是那么直观（尽管我们在前面已经用一个简单的级数对此进行了描述）。那么，用采样的观点，实际上就是用一批在本采样点幅度非零、而在其他所有采样点幅度均为零的信号合成一个信号。对于一个有限带宽的信号，假设信号频谱为 0 到 B，如果再设所有频率分量的相位均为零，以及在时间为零时的幅度为 1，通过计算傅里叶反变换，可以得到这个基本的信号在时域内看为：

$$g(t)=\frac{\sin(2\pi Bt)}{2\pi Bt} \tag{1.3}$$

其波形如图 1.1 所示。把这个基本信号在时间轴上移动采样周期的整数倍，就成为 $g(t-k/2B)$，其中 k 可以是任意整数。这样，原信号就可以表示成这个基本信号在时间轴上移动后再乘以信号在采样点的幅度后的累加：

$$f(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(\frac{k}{2B})g(t-\frac{k}{2B}) \tag{1.4}$$

当信号的时间长度有限时，这个求和式自然只有有限项：

$$f(t)=\sum_{k=n_1}^{n_2} f(\frac{k}{2B})g(t-\frac{k}{2B}) \tag{1.5}$$

$f(t)\leftrightarrow f(\frac{k}{2B})$　　其中 k 的数量正好为 $2BT+1$ 个。

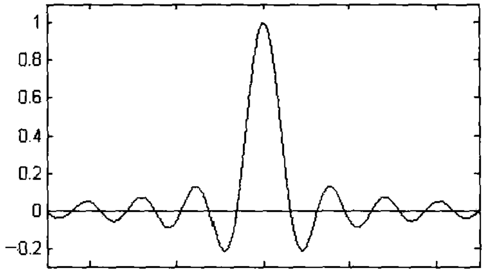


图 1.1 仅一个采样点为非零的有限带宽信号

在结束本节前，我们想申明一下，本节所论述的概念其实是包含有一定的近似的，这就是为什么我们在前面提到了让我们用工程的概念来分析。严格的数学分析告诉我们，任何一个信号，如果它是时间有限的，那它就不可能是频带有限的；反之，如果它是频带有限的，那它就不可能是时间有限的。我们为了陈述信号的描述，或者确切地说，为了获取信号可以被用有限的参数描述，从一开始就引入了一个近似，那就是信号既是时间有限，又是频带有限的。实际上，思维严谨的读者可能会提问，我们提到了数量 $2BT+1$，它与 $2BT$ 的差距为 1。如果要准确一点，到底是哪一个？其实问题还不仅仅是 1 的差别。当用前一种方式分解、描述信号时，我们假定了信号是周期存在的，这其实不同于在限定的时间以外没有信号，所以实际上信号在时间上并不是严格意义的被限定了的。对于后一种分解方式，我们从信号具有限定的频带宽度出发，但是后来又规定了信号具有有限的时间长度。观察在式（1.3）中给出的函数，就会发现，它不是一个时间有限的函数。如果强行在某一个时间段以外把它设定为零，那么信号的频带宽度将不再是严格意义被限定了的。这样的说明在一定意义上解释了两个数量的差别。好在对于一般的工程问题，我们有 $2BT\gg1$，于是在工程上也就不计较这个不大的差别。或者说，当信号的时间带宽乘积比较大时，我们认为在规定的时间和频率以外，信号的其他分量已经可以被认为不存在

了。或者说由于实际中总是存在着噪声，当被我们忽略的部分比噪声还小时，我们做这样的忽略不会引起概念上的差错。因此，作者将提醒读者，如果这两个有限的界限都非常小，或者说不满足 $2BT \gg 1$，这样的假设将可能是不合理的，我们的论述至少是不那么严格的。

1.2　内积、投影和正交

为了确切地分析对信号的描述，下面引入一些数学概念，它们是信号的内积和与内积有关的一些基本概念，包括投影、正交、距离等。有了这些基本概念，我们将可以把 1.1 节所提出的问题一般化，从而为更理性地阐述信号与信息的关系打下基础。

对于两个时间长度一样的信号 $f(t)$和 $g(t)$，称积分

$$\int f(t)g(t)\cdot \mathrm{d}t \tag{1.6}$$

为这两个信号的**内积**。如果信号已经表示为离散的，内积就是描述信号的各点的乘积之和

$$\sum_i f_i \cdot g_i \tag{1.7}$$

称信号自己与自己的内积的平方根为信号的**模**

$$|f| = \sqrt{f \cdot f} \tag{1.8}$$

显然，模是一个非负的量。我们可以把信号的模看成是对信号强度的一个度量。实际上，对于已经被离散描述的信号，我们也可以把它看成是一个 n 维的列矢量，模就是这个矢量的幅度。如果函数是信号的电压，那么，模的平方除以点数在一定程度上表示了信号的功率，或者更确切一点地说，是这个电压被施加在单位电阻上时所给出的功率。由于信号的点数是信号的时间长度乘以采样的频率，

所以模的平方除以采样的频率在一定程度上也就代表了信号的能量，如果不把采样频率当成一种变量，信号的模就代表了信号的能量。

我们在这里采用了一个说法，叫做“一定程度上”。如果想把问题说得确切一点，可以把这个说法理解为“成正比”。因为读者很容易发现，模的平方与功率或能量并不是同一个物理量纲的东西。如果我们有两个信号，它们的功率和能量相同，时间长度也相同，但是信号的频带宽度不同，结果描述信号的点数就不同，计算得到的模将会是不同的。

由于引入了这样的概念，根据著名的希瓦尔兹不等式：

$$\int f(t)g(t)\mathrm{d}t \leqslant \sqrt{\int f^2(t)\mathrm{d}t}\cdot\sqrt{\int g^2(t)\mathrm{d}t} \tag{1.9}$$

我们得到了内积的重要特性

$$\int f(t)g_1(t)\mathrm{d}t \leqslant |f| \tag{1.10}$$

其中

$$g_1(t)=\frac{g(t)}{|g(t)|} \tag{1.11}$$

为归一化函数，我们把它称为方向函数。用语言描述，式（1.10）的意义就是，任何一个信号函数与任何一个方向函数的内积不会大于该信号函数的模。对离散表示的函数，这也是成立的，即

$$\sum_i f_i\cdot g_{1i} \leqslant |f| \tag{1.12}$$

这样，我们引入一个新的概念，称信号函数与一个方向函数的内积乘以该方向函数为原函数在该方向函数上的投影，记作 $f_{/g}(t)$。上述不等式用语言描述，就是一个信号函数在任何方向函数上的投影的模不会大于自己的模。

于是，我们可以设想，是不是可以把信号看成是在一个高维空

间内的量，在这个空间内，信号由很多基本的信号合成。事实上，我们确实可以这样来理解一个信号。对于一个参考的方向函数，任何一个信号函数将可以被分解成两部分的和，即在参考的方向函数上的投影和剩余部分，这个剩余部分为

$$f_{\perp g}(t)=f(t)-f_{/g}(t) \tag{1.13}$$

很容易用投影的定义证明，这个新的分量在同一参考的方向函数上的投影为零。于是我们再引入一个概念，称这个分量与参考的方向函数**正交**。这也就是为什么我们引入了平行和垂直两个下标符号的理由。这样，对于一个参考的方向函数，任何一个信号函数都可以表示为在该方向函数上的投影和与该方向函数正交的另一个函数的和。当一个函数被分解成正交的两个函数的和时，根据定义，我们有

$$|f(t)|^2=|f_{\perp g}(t)+f_{/g}(t)|^2=|f_{\perp g}(t)|^2+|f_{/g}(t)|^2 \tag{1.14}$$

于是

$$\begin{cases}|f(t)|\geqslant|f_{\perp g}(t)|\\|f(t)|\geqslant|f_{/g}(t)|\end{cases} \tag{1.15}$$

即原函数的模不会小于它的任何一个正交分量函数的模。

我们似乎没有理由认为，与参考方向函数正交的函数只有一个形式。实际上，当我们用离散的方式表示函数时，正交给出了一个方程，即两个高维矢量的内积为零。这等于在原来多维的空间内引入了一个制约条件，使空间的维数减少。这样，我们可以做一个递推，在与第一个参考的方向函数正交的空间内，信号依然可以被分解，成为第二个方向函数上的分量和剩余部分的和。这样的分解可以进行下去，直到最后不能再分解为止。我们称这样的正交的方向函数的数量为信号的维数。

信号的维数无非是有限的和无限的两种。当信号表示为长度有

限的离散形式时，它是一个长度为 n 的矢量。我们不可能构造出数量比 n 更多的彼此独立的矢量。因此，在这样的信号空间内，我们最多也就只能构造 n 个正交的矢量。也就是说，对这样的信号，信号的维数一定是有限的。当信号是连续信号时，如果它的带宽是有限的，它一定可以用有限频率采样量化，表示成离散的信号。因此，只要假定信号的时间长度是有限的，它的维数也必定是有限的。或者更一般地说，对于本书所设定的时间、带宽有限的信号而言，信号维数总是有限的。

对于有限维的信号，我们可以递推式（1.14），也就是说，信号的模的平方为它的所有正交分量的模的平方和。于是，式（1.15）也得到推广，也就是说，不论分解成多少个正交的分量，一个信号的模不会小于它的任何一个正交分量函数的模。

一般说来，当我们把一个信号函数分解成任何两个函数的和时，不同信号函数的模之间有什么关系呢？如果我们在平面内画出一个矢量，这个矢量的模就是平面内这个矢量的长度。把它分解为两个矢量的和，我们在平面内就构成了一个三角形。几何原理告诉我们，两个分量的模的和不会小于总矢量的模。设信号

$$f(t)=f_1(t)+f_2(t) \tag{1.16}$$

则 $$\int f^2(t)\cdot \mathrm{d}t=\int f_1{}^2(t)\cdot \mathrm{d}t+\int f_2{}^2(t)\cdot \mathrm{d}t+2\int f_1(t)f_2(t)\cdot \mathrm{d}t \tag{1.17}$$

根据式（1.9），这个式子就是

$$|f(t)|^2\leqslant|f_1(t)|^2+|f_2(t)|^2+2|f_1(t)||f_2(t)|=[|f_1(t)|+|f_2(t)|]^2 \tag{1.18}$$

于是就得到了有名的三角形不等式

$$|f(t)|\leqslant|f_1(t)|+|f_2(t)| \tag{1.19}$$

它告诉我们，任何一个信号函数的模确实不大于它的两个分量函数的

模的和。如果我们用离散的方式表示函数，这个性质同样是成立的。

当我们把一个函数分解成在参考的方向函数上的一个函数（其大小为 k）与另一个函数的和时，即

$$f(t)=k\cdot f_{/g}(t)+f_2(t) \tag{1.20}$$

可以发现

$$\left|f_2(t)\right|=\left|f(t)-f_{1/g}(t)\right|=\left|(1-k)f_{/g}(t)+f_{\perp g}(t)\right| \tag{1.21}$$

根据式（1.15），有

$$\left|f_2(t)\right|\geqslant\left|f_{\perp g}(t)\right| \tag{1.22}$$

用语言描述，就是在所有可能的 $f_2(t)$ 中，原函数扣去它在参考的方向函数上的投影的那个分量具有一个特别的性质，就是它的模最小。因此，我们又称后者为原函数到参考的方向函数上的**距离**。

这一概念同样可以推广到多维，也就是说，一个函数可以被分解成在若干个正交的方向函数上的投影及剩余部分的和。如果我们在所有方向函数上的分量不等于在该方向函数上的投影，这个剩余部分将发生变化。在所有的剩余部分中，前一个的模是最小的，它是原函数到那几个正交的方向函数所构成的子空间的距离。

虽然一个信号可能有比较高的维数，但是我们在研究这个信号时，可能会用较低维数的信号来近似。如果对于所有正交的方向函数，我们把信号分解完毕，将这些分量的模按顺序排列，发现在若干维以后，其余所有维的模的平方和已经比较小了，那就意味着，信号到由前面那些方向函数所组成的子空间的距离比较小。或者说，信号很接近于它在前面那若干维中的投影的和。这样，我们将用那些数量比较少的正交的方向函数上的投影的和来代替原函数，于是信号的维数将被减少。这样的做法显然也可以被推广到具有无限维的信号空间，于是，一个真正的具有无限维的信号，在工程中